

MATEMATYKA

# ZBIÓR ZADAŃ MATURALNYCH

Lata 2010-2017  
Poziom rozszerzony



**252** ZADANIA  
Centralnej Komisji Egzaminacyjnej  
**Z ROZWIĄZANIAMI**

Opracował Ryszard Pagacz



# Spis treści

<b>Wstęp</b> .....	4
<b>Zadania maturalne</b> .....	5
1. Funkcja kwadratowa .....	5
2. Wielomiany .....	7
3. Trygonometria .....	9
4. Wartość bezwzględna .....	11
5. Planimetria .....	15
6. Stereometria .....	17
7. Geometria analityczna .....	20
8. Ciągi .....	23
9. Kombinatoryka .....	26
10. Rachunek prawdopodobieństwa .....	27
11. Dowody (geometria) .....	30
12. Dowody (algebra) .....	34
13. Pochodna .....	36
14. Optymalizacja .....	37
15. Inne .....	39
<b>Szkice rozwiązań</b> .....	40
1. Funkcja kwadratowa .....	40
2. Wielomiany .....	52
3. Trygonometria .....	57
4. Wartość bezwzględna .....	67
5. Planimetria .....	75
6. Stereometria .....	85
7. Geometria analityczna .....	97
8. Ciągi .....	110
9. Kombinatoryka .....	117
10. Rachunek prawdopodobieństwa .....	120
11. Dowody (geometria) .....	128
12. Dowody (algebra) .....	136
13. Pochodna .....	143
14. Optymalizacja .....	144
15. Inne .....	152

# Wstęp

Od roku 2010 matematyka na poziomie rozszerzonym jest zdawana na maturze wyłącznie jako przedmiot dodatkowy.

Od tego czasu upłynęło już 8 lat. Jest to wystarczający okres czasu, by na podstawie przeglądu arkuszy maturalnych zorientować się, jakiego typu i o jakiej skali trudności zadań może spodziewać się na egzaminie przyszły maturzysta.

W tym zbiorze zebrałem wszystkie zadania, które występowały w arkuszach maturalnych CKE, na poziomie rozszerzonym, w latach 2010-2017. Zadania zostały jednak podzielone i uporządkowane według rozdziałów, występujących w typowym programie nauczania matematyki w szkole. Obok numeru każdego zadania jest wskazówka, z arkusza której matury dane zadanie pochodzi (miesiąc, rok, nr zadania i liczba punktów). Do wszystkich zadań podałem szkice rozwiązań, również do zadań zamkniętych.

Ten zbiór zadań może być świetnym materiałem do samodzielnego przygotowania się do egzaminu. Może również być pomocny nauczycielowi w zaplanowaniu cyklu powtórzeń przygotowujących uczniów do matury.

Mam nadzieję, że ten bogaty materiał pozwoli uczniom lepiej przygotować się do egzaminu.

*Autor*

**Zadanie 6.3.** [matura, maj 2011, zad. 11. (6 pkt)]

Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny  $ABCD$  o podstawie  $ABCD$ . W trójkącie równoramiennym  $ASC$  stosunek długości podstawy do długości ramienia jest równy  $|AC| : |AS| = 6 : 5$ . Oblicz sinus kąta nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy.

**Zadanie 6.4.** [matura, czerwiec 2011, zad. 12. (4 pkt)]

W ostrosłupie trójkątnym  $ABCS$  o podstawie  $ABC$  i wierzchołku  $S$  dane są:  $|AB| = |AC| = |SB| = |SC| = 9$  i  $|AS| = |BC| = 8$ . Oblicz objętość tego ostrosłupa.

**Zadanie 6.5.** [matura, maj 2012, zad. 10. (5 pkt)]

Podstawą ostrosłupa  $ABCS$  jest trójkąt równoramienny  $ABC$ . Krawędź  $AS$  jest wysokością ostrosłupa oraz  $|AS| = 8\sqrt{210}$ ,  $|BS| = 118$ ,  $|CS| = 131$ . Oblicz objętość tego ostrosłupa.

**Zadanie 6.6.** [matura, czerwiec 2012, zad. 11. (5 pkt)]

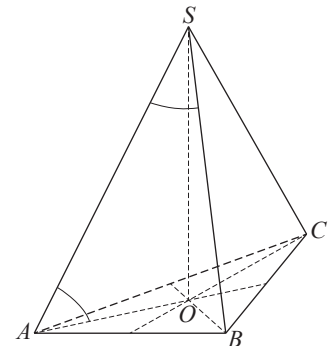
Podstawą ostrosłupa  $ABCS$  jest trójkąt równoramienny  $ABC$ , w którym  $|AB| = 30$ ,  $|BC| = |AC| = 39$  i spodek wysokości ostrosłupa należy do jego podstawy. Każda wysokość ściany bocznej poprowadzona z wierzchołka  $S$  ma długość 26. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

**Zadanie 6.7.** [matura, maj 2013, zad. 10. (4 pkt)]

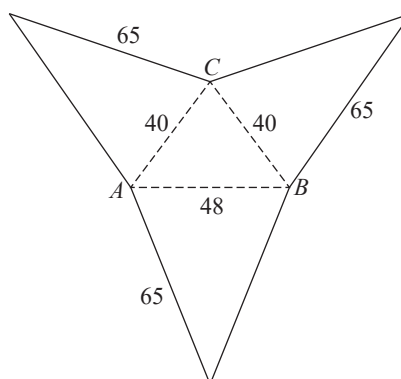
W ostrosłupie  $ABCS$  podstawa  $ABC$  jest trójkątem równobocznym o boku długości  $a$ . Krawędź  $AS$  jest prostopadła do płaszczyzny podstawy. Odległość wierzchołka  $A$  od ściany  $BCS$  jest równa  $d$ . Wyznacz objętość tego ostrosłupa.

**Zadanie 6.8.** [matura, czerwiec 2013, zad. 9. (5 pkt)]

Podstawą ostrosłupa prawidłowego trójkątnego  $ABCS$  jest trójkąt  $ABC$ . Kąt nachylenia krawędzi bocznej  $AS$  do płaszczyzny podstawy ostrosłupa jest równy kątowi między krawędziami bocznymi  $AS$  i  $BS$  zawartymi w ścianie bocznej  $ASB$  tego ostrosłupa (zob. rysunek). Oblicz kosinus tego kąta.

**Zadanie 6.9.** [matura, maj 2014, zad. 9. (6 pkt)]

Oblicz objętość ostrosłupa trójkątnego  $ABCS$ , którego siatkę przedstawiono na rysunku.



**Zadanie 6.6.** (5 pkt)

Podstawą ostrosłupa  $ABCS$  jest trójkąt równoramienny  $ABC$ , w którym  $|AB| = 30$ ,  $|BC| = |AC| = 39$  i spodek wysokości ostrosłupa należy do jego podstawy. Każda wysokość ściany bocznej poprowadzona z wierzchołka  $S$  ma długość 26. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

*Rozwiązanie:*

Oznaczenia tak jak na rysunku.

Wysokości ścian bocznych są równej długości, więc spodek wysokości tego ostrosłupa jest środkiem okręgu wpisanego w podstawę.

$$|CE| = \sqrt{39^2 - 15^2} = \sqrt{1521 - 225} = \sqrt{1296} = 36.$$

Pole podstawy:

$$P = \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 36 = 540.$$

Jednocześnie

$$P = r \cdot p.$$

Stąd

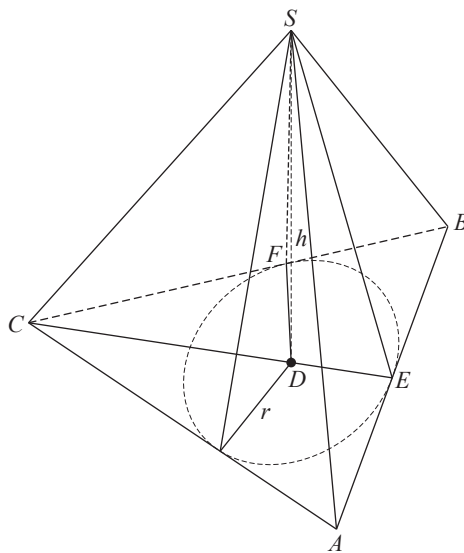
$$540 = r \cdot \frac{39 + 39 + 30}{2}, \quad 540 = r \cdot 54, \quad r = 10.$$

Wysokość ostrosłupa:

$$h = \sqrt{26^2 - 10^2} = \sqrt{676 - 100} = \sqrt{576} = 24.$$

Objętość

$$V = \frac{1}{3} \cdot 540 \cdot 24 = 4320.$$

**Zadanie 6.7.** (4 pkt)

W ostrosłupie  $ABCS$  podstawa  $ABC$  jest trójkątem równobocznym o boku długości  $a$ . Krawędź  $AS$  jest prostopadła do płaszczyzny podstawy. Odległość wierzchołka  $A$  od ściany  $BCS$  jest równa  $d$ . Wyznacz objętość tego ostrosłupa.

*Rozwiązanie:*

Oznaczenia tak jak na rysunku.

$$|AD| = \frac{\sqrt{3}}{2}a, \quad |DE| = \sqrt{\frac{3}{4}a^2 - d^2} = \frac{\sqrt{3a^2 - 4d^2}}{2}$$

Trójkąty  $ADE$  i  $ADS$  są podobne.

$$\frac{|DS|}{|DA|} = \frac{|DA|}{|DE|}, \quad |DS| = \frac{|DA|^2}{|DE|} = \frac{\frac{3}{4}a^2}{\frac{\sqrt{3a^2 - 4d^2}}{2}} = \frac{3a^2}{2\sqrt{3a^2 - 4d^2}}.$$

Objętość ostrosłupa wynosi

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}a \cdot \frac{3a^2}{2\sqrt{3a^2 - 4d^2}} \cdot d = \frac{a^3d}{4\sqrt{3a^2 - 4d^2}}.$$

