

Matematyka



Informator Matura 2026

• sięgnij • zamów • poćwicz • zdaj



OFICyna
EDUKACYJNA
KRZYSZTOF PAZDRO

NASI PRZEDSTAWICIELE

Jeżeli chcielibyście Państwo dowiedzieć się więcej o naszych książkach, to przedstawiciele regionalni Oficyny Edukacyjnej * Krzysztof Pazdro:

- **przyjadą** do Państwa szkoły, aby przedstawić ofertę wydawnictwa
- **dokonają** wśród grona nauczycieli prezentacji podręczników z jednego lub z kilku przedmiotów
- **porozmawiają** indywidualnie z każdym nauczycielem i pomogą w wyborze podręczników
- **udzielą** szczegółowych informacji na temat konferencji i warsztatów organizowanych przez wydawnictwo
- **przedstawiają** najkorzystniejsze warunki zakupu publikacji Oficyny.

REGIONY

- 1** **Lubuski**
Zachodniopomorski
Pomorski (zachód)
Powiaty: bytowski, chojnicki, człuchowski, kartuski, kościerski, lęborski, pucki, Słupsk, słupski, wejherowski, Gdańsk, Gdynia, Sopot
Wielkopolski (zachód)
Powiaty: czarnkowsko-trzcianecki, grodziski, międzychodzki, nowotomyski, szamotulski, wolsztyński
692-403-384
lubuskie@pazdro.com.pl
- 2** **Dolnośląski**
Opolski
Śląski
692-490-546
dolnoslaskie@pazdro.com.pl
- 3** **Wielkopolski**
Łódzki
Kujawsko-Pomorski
694-498-275
wielkopolskie@pazdro.com.pl
- 4** **Mazowiecki (północ)**
Powiaty: ciechanowski, gostyński, makowski, mławski, ostrołęcki, Ostrołęka, ostrowski, Płock, plocki, płoński, przasnyski, sierpecki, żuromiński
Podlaski
Warmińsko-Mazurski
Pomorski (wschód)
Powiaty: gdański, kwidzyński, malborski, sztumski, nowodworski, starogardzki, tczewski
694-498-274
mazowieckie@pazdro.com.pl



- 5** **Mazowiecki (centrum)**
Powiaty: białobrzezki, garwoliński, grodziski, grójecki, legionowski, łosicki, miński, nowodworski, otwocki, piaseczyński, pruszkowski, pułtuski, Siedlce, siedlecki, sochaczewski, sokołowski, Warszawa, warszawski zachodni, węgrowski, wołomiński, wyszkowski, żyrardowski
Lubelski (północ)
Powiaty: bialski, Biała Podlaska, łukowski, parczewski, radzyński
Podlaski (południe)
Powiat: siemiatycki
666-376-451
warszawa@pazdro.com.pl
- 6** **Lubelski**
Podkarpacki
Świętokrzyski
Małopolski
Mazowiecki (południe)
Powiaty: kozienicki, lipski, przysuski, Radom, radomski, szydłowiecki, zwoleniński
692-490-544
lubelskie@pazdro.com.pl

Szanowni Państwo,

oto informator o naszych pozycjach wydawniczych z matematyki, które są przeznaczone dla uczniów liceów i techników, przygotowujących się **do matury w roku 2026**, według zasad obowiązujących od roku szkolnego 2024/2025, a więc według uszczuplonej podstawy programowej z roku 2019. W nowych książkach zadania dotyczące usuniętych treści, jako nieobowiązujące, zostały oznaczone symbolem nożyczek ✂.

Wybrane fragmenty książek ilustrują zakres i sposób opracowania treści nauczania. W poszczególnych pozycjach prezentujemy: okładkę, spis treści, wstęp do książki, przykładowy fragment opracowania treści i odpowiedni fragment odpowiedzi.

Na końcu informatora przedstawiamy kilka pozycji przeznaczonych dla uczniów, nauczycieli i dla tych, którzy szczególnie interesują się matematyką oraz współczesnymi narzędziami informatycznymi, przydatnymi w jej nauczaniu i zastosowaniu.

Gorąco zachęcamy do korzystania z naszej oferty. Jesteśmy przekonani, że pozycje te pomogą uczniom skutecznie przygotować się do matury i osiągnąć sukces podczas egzaminu.

Wydawca



ul. Kościańska 4, 01-695 Warszawa
tel. 22 560 81 00
e-mail: pazdro@pazdro.com.pl
www.pazdro.com.pl

SPIS TREŚCI INFORMATORA

NOWOŚĆ	Matematyka. Zbiór zadań maturalnych. Lata 2010–2025. Poziom podstawowy. 1243 zadania CKE z rozwiązaniami	3
NOWOŚĆ	Matematyka. Zbiór zadań maturalnych. Lata 2002–2025. Poziom rozszerzony. 612 zadań CKE z rozwiązaniami.....	9
NOWOŚĆ	Matematyka. Próbne arkusze maturalne. Zestaw 2. Poziom podstawowy	15
NOWOŚĆ	Matematyka. Próbne arkusze maturalne. Zestaw 2. Poziom rozszerzony	21
NOWOŚĆ	Zbiór zadań maturalnych z matematyki. Poziom rozszerzony 1008 zadań z rozwiązaniami. Umiesz? Sprawdź to!	28
NOWOŚĆ	GPS w labiryncie matematyki. Zbiór 2956 zadań. Zakres podstawowy	35
NOWOŚĆ	207 dowodów matematycznych w dwóch krokach	42
NOWOŚĆ	Matematyczny szlif. Zestawy powtórzeniowe do matury. Poziom podstawowy	47
	Przedmaturalny tryptyk zadaniowy. Zbiór zadań z matematyki. Poziom rozszerzony	54
	Typologia zadań maturalnych z matematyki. Poziom podstawowy.....	61
	Matematyka. Porady i wskazówki, których nie ma w tablicach maturalnych	67
	Matematyka w liceum i technikum. Zbiór zadań na 6	72
	Mała Olimpiada Matematyczna. Zadania konkursowe z rozwiązaniami. Tom 1. Algebra i tom 2. Geometria	78
Uczniom liceów i techników polecamy także:		
	Matematyka. Twierdzenia i dowody. Zadania z rozwiązaniami	86
	Zadania i problemy matematyczne. Zbiór 270 oryginalnych zadań.....	92
	Analiza matematyczna dla licealistów i studentów. Repetytorium.....	100
	Matematyka. Podstawianie zmiennej pomocniczej w równaniach i nie tylko	107
	Podróże matematyczne.....	114
	Spacerzy matematyczne.....	115
	Opowieści geometryczne.....	116
	Między matematyką a humanistyką.....	117
	ABC GeoGebry. Poradnik dla początkujących	118
	Wolfram Alpha. Praktyczny przewodnik dla każdego	119

MATEMATYKA

Matura
od 2025
oznaczenie zadań
nieobowiązujących

ZBIÓR ZADAŃ MATURALNYCH

Lata 2010–**2025**

Poziom podstawowy



NOWOŚĆ

1243 zadania

Centralnej Komisji Egzaminacyjnej
z rozwiązaniami

Opracował Ryszard Pagacz



format 205 x 292 mm
stron 352

Spis treści

Wstęp	4
1. Liczby. Potęgi	5
2. Logarytmy	12
3. Procenty	17
4. Wartość bezwzględna	22
5. Równania. Nierówności	27
6. Funkcja liniowa	42
7. Równanie prostej	50
8. Układ równań liniowych	59
9. Funkcja kwadratowa	65
10. Wielomiany i wyrażenia algebraiczne	86
11. Funkcje. Wykresy	92
12. Ciągi	110
13. Trygonometria	125
14. Planimetria	137
15. Stereometria	169
16. Geometria analityczna	194
17. Statystyka	206
18. Kombinatoryka	215
19. Rachunek prawdopodobieństwa	220
20. Dowody (algebra)	229
21. Dowody (geometria)	233

1. Liczby. Potęgi	241
2. Logarytmy	244
3. Procenty	246
4. Wartość bezwzględna	248
5. Równania. Nierówności	250
6. Funkcja liniowa	256
7. Równanie prostej	258
8. Układ równań liniowych	261
9. Funkcja kwadratowa	263
10. Wielomiany i wyrażenia algebraiczne	269
11. Funkcje. Wykresy	272
12. Ciągi	275
13. Trygonometria	282
14. Planimetria	287
15. Stereometria	301
16. Geometria analityczna	315
17. Statystyka	325
18. Kombinatoryka	329
19. Rachunek prawdopodobieństwa	332
20. Dowody (algebra)	339
21. Dowody (geometria)	344

zadania

rozwiązania

Wstęp

Od roku 2010 matematyka na poziomie podstawowym jest zdawana na maturze jako przedmiot obowiązkowy. Od tej pory upłynęło już 16 lat. Jest to wystarczający czas, by na podstawie przeglądu arkuszy maturalnych zorientować się, jakiego typu zadań i o jakiej skali trudności może spodziewać się na egzaminie przyszły maturzysta.

W tym zbiorze zebrałem zadania z lat 2010–2024, które występowały w arkuszach maturalnych CKE na poziomie podstawowym. Zadania zostały jednak podzielone i uporządkowane według rozdziałów występujących w typowym programie nauczania matematyki w szkole. Obok numeru każdego zadania jest wskazówka, z arkusza której matury dane zadanie pochodzi (miesiąc, rok, nr zadania i liczba punktów). Do wszystkich zadań podałem szkice rozwiązań, również do zadań zamkniętych.

Ten zbiór zadań może być świetnym materiałem do samodzielnego przygotowania się do egzaminu. Może również być pomocny nauczycielowi w zaplanowaniu cyklu powtórzeń przygotowujących uczniów do matury.

Lata 2020–2021 przejdą do historii m.in. z powodu COVID-19 i zdalnego nauczania. Sesja maturalna 2020 też była wyjątkowa, ponieważ odbyła się z miesięcznym przesunięciem. Egzaminy maturalne w latach 2021–2022 zostały przeprowadzone na podstawie nieco zmodyfikowanych podstaw programowych. Sesje maturalne 2023–2024 to arkusze w nowej formule, zbudowane dla absolwentów 8-klasowej szkoły podstawowej.

Do zbioru zadań włączono zadania pochodzące z arkuszy maturalnych w terminach dodatkowych (lipiec 2020 i czerwiec 2021–2024), z arkuszy matury poprawkowej (wrzesień 2020 i 2021–2023) oraz z arkuszy diagnostycznych i pokazowych (2014, 2021–2023).

Matura od 2023 to całkiem nowe, niespotykane dotąd typy zadań maturalnych. Wyniki egzaminu okazały się dość wysokie, co nie oznacza, że w 2025 będzie podobnie. W czerwcu 2024 została „odchudzona” podstawa programowa i w związku z tym w 2025 na pewno nie pojawi się kilka zagadnień. Zadania ich dotyczące zostały oznaczone symbolem nożyczek ✂. Wszystkie zadania oznaczone ✂ mogą być rozwiązywane przez przygotowujących się do egzaminu maturalnego z matematyki na poziomie rozszerzonym. Zadania z sesji maturalnych 2023 i 2024 w terminie podstawowym i dodatkowym zostały zapisane na szarym tle.

W załączonym Aneksie można zapoznać się z nowymi typami zadań na bazie arkusza matury dodatkowej 2022. Swego rodzaju „tłumaczenie” wykonał redaktor Tomasz Szwed.

Mam nadzieję, że ten bardzo bogaty materiał pozwoli uczniom skutecznie przygotować się do egzaminu. Niech przyszli zdający nie boją się nowej, na pewno innej matury z matematyki. Starajcie się zrozumieć treści matematyczne. I po prostu ćwiczcie.

Ryszard Pagacz

7. Równanie prostej

Zadanie 7.1. [matura, maj 2010, zadanie 9. (1 pkt)]

Prosta o równaniu $y = -2x + (3m + 3)$ przecina w układzie współrzędnych oś Oy w punkcie $(0, 2)$. Wtedy

- A. $m = -\frac{2}{3}$ B. $m = -\frac{1}{3}$ C. $m = \frac{1}{3}$ D. $m = \frac{5}{3}$

Zadanie 7.2. [matura, maj 2011, zadanie 18. (1 pkt)]

Prosta k ma równanie $y = 2x - 3$. Wskaż równanie prostej l równoległej do prostej k i przechodzącej przez punkt D o współrzędnych $(-2, 1)$.

- A. $y = -2x + 3$ B. $y = 2x + 1$ C. $y = 2x + 5$ D. $y = -x + 1$

Zadanie 7.3. [matura, czerwiec 2011, zadanie 15. (1 pkt)]

Dane są punkty $A = (-2, 2)$ i $B = (4, -2)$. Współczynnik kierunkowy prostej AB jest równy

- A. $a = -\frac{2}{3}$ B. $a = -\frac{3}{2}$ C. $a = \frac{3}{2}$ D. $a = \frac{2}{3}$

Zadanie 7.4. [matura, maj 2012, zadanie 21. (1 pkt)]

Wskaż równanie prostej równoległej do prostej o równaniu $3x - 6y + 7 = 0$.

- A. $y = \frac{1}{2}x$ B. $y = -\frac{1}{2}x$ C. $y = 2x$ D. $y = -2x$

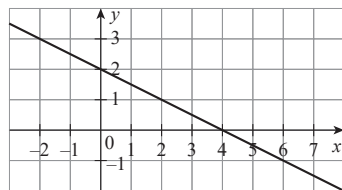
Zadanie 7.5. [matura, maj 2013, zadanie 8. (1 pkt)]

Prosta o równaniu $y = \frac{2}{m}x + 1$ jest prostopadła do prostej o równaniu $y = -\frac{3}{2}x - 1$. Stąd wynika, że

- A. $m = -3$ B. $m = \frac{2}{3}$ C. $m = \frac{3}{2}$ D. $m = 3$

Zadanie 7.6. [matura, czerwiec 2013, zadanie 18. (1 pkt)]

Wskaż równanie prostej, której fragment przedstawiony jest na wykresie obok



- A. $x - 2y - 4 = 0$ B. $x + 2y + 4 = 0$
C. $x - 2y + 4 = 0$ D. $x + 2y - 4 = 0$

Zadanie 7.7. [matura, czerwiec 2013, zadanie 25. (1 pkt)]

Dana jest prosta l o równaniu $y = -\frac{2}{5}x$. Prosta k równoległa do prostej l i przecinająca oś Oy

w punkcie o współrzędnych $(0, 3)$ ma równanie

- A.** $y = -0,4x + 3$ **B.** $y = -0,4x - 3$ **C.** $y = 2,5x + 3$ **D.** $y = 2,5x - 3$

Zadanie 7.8. [matura, maj 2014, zadanie 8. (1 pkt)]

Punkt $C = (0, 2)$ jest wierzchołkiem trapezu $ABCD$, którego podstawa AB jest zawarta w prostej o równaniu $y = 2x - 4$. Wskaż równanie prostej zawierającej podstawę CD .

- A.** $y = \frac{1}{2}x + 2$ **B.** $y = -2x + 2$ **C.** $y = -\frac{1}{2}x + 2$ **D.** $y = 2x + 2$

Zadanie 7.9. [matura, czerwiec 2014, zadanie 1. (1 pkt)]

Na prostej o równaniu $y = ax + b$ leżą punkty $K = (1, 0)$, $L = (0, 1)$. Wynika stąd, że

- A.** $a = -1$ i $b = 1$ **B.** $a = 1$ i $b = -1$ **C.** $a = -1$ i $b = -1$ **D.** $a = 1$ i $b = 1$

Zadanie 7.10. [matura, czerwiec 2014, zadanie 22. (1 pkt)]

Proste o równaniach: $y = mx - 5$ oraz $y = (1 - 2m)x + 7$ są równoległe, gdy

- A.** $m = -1$ **B.** $m = -\frac{1}{3}$ **C.** $m = \frac{1}{3}$ **D.** $m = 1$

 Zadanie 7.11. [matura, sierpień 2014, zadanie 19. (1 pkt)]

Dane są równania czterech prostych:

$$k: y = \frac{1}{2}x + 5, \quad l: y = 2x + 5, \quad m: y = -2x + 3, \quad n: y = 2x - 5$$

Prostopadłe są proste

- A.** l i n **B.** l i m **C.** k i n **D.** k i m

 Zadanie 7.12. [przykładowy arkusz CKE, grudzień 2014, zadanie 8. (0-1)]

Równania $y = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$ oraz $y = -\frac{4}{3}$ opisują dwie proste

- A.** przecinające się pod kątem o mierze 90° . **B.** pokrywające się.
C. przecinające się pod kątem różnym od 90° . **D.** równoległe i różne.

Zadanie 7.13. [matura, maj 2015, zadanie 18. (1 pkt)]

Prosta l o równaniu $y = m^2x + 3$ jest równoległa do prostej k o równaniu $y = (4m - 4)x - 3$.

Zatem

- A.** $m = 2$ **B.** $m = -2$ **C.** $m = -2 - 2\sqrt{2}$ **D.** $m = 2 + 2\sqrt{2}$

Zad.	Rozwiązanie	Odp.
6.38.1	$f(0) = 6,5; \quad f(1) = 6,5 + 1,03; \quad f(x) \geq 6,5$	FP
6.38.2	$f(10) = 6,5 + 10 \cdot 1,03 = 16,8$	A
6.38.3	$f(x) = 6,5 + x \cdot 1,03$	D
6.39	$a = \frac{4}{-2} = -2, \quad P = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 = 4$	PF
6.40	$3 - m = 0 \Leftrightarrow m = 3$	C
6.41	Miejszem zerowym funkcji f jest liczba $2k$, więc $2k > 2$, czyli $k > 1$.	D
6.42	$g(x) = f(x - 1) = 5(x - 1) = 5x - 5$	A

7. Równanie prostej

Zad.	Rozwiązanie	Odp.
7.1	$3m + 3 = 2 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{3}$	B
7.2	$a_1 = a_2$ i $y(-2) = 1$	C
7.3	$a = \frac{-2 - 2}{4 + 2} = -\frac{2}{3}$	A
7.4	$3x - 6y + 7 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{6}$	A
7.5	$\frac{2}{m} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = -1 \Leftrightarrow m = 3$	D
7.6	$y = -\frac{1}{2}x + 2, \quad x + 2y - 4 = 0$	D
7.7	$a = -0,4. \quad y = -0,4x + 3$	A
7.8	$a = 2$ i $b = 2$	D
7.9	$y = -x + 1$	A
7.10	$m = 1 - 2m \Leftrightarrow m = \frac{1}{3}$	C
7.11	$a_1 \cdot a_2 = -1$	D
7.12	$a_1 = -\frac{3}{4}, \quad a_2 = 0$	C

MATEMATYKA

Matura
od 2025
oznaczenie zadań
nieobowiązujących

ZBIÓR ZADAŃ MATURALNYCH

Lata 2002–**2025**

Poziom rozszerzony

NOWOŚĆ

612 zadań

Centralnej Komisji Egzaminacyjnej
z rozwiązaniami

Opracował Ryszard Pagacz



format 205 x 292 mm
stron 368

Spis treści

Wstęp	4
1. Funkcja kwadratowa	5
2. Wielomiany	11
3. Funkcje wymierne, wykładnicze, logarytmiczne	15
4. Trygonometria	20
5. Wartość bezwzględna	25
6. Ciągi	28
7. Granica ciągu, suma szeregu nieskończonego	33
8. Planimetria	38
9. Stereometria	45
10. Geometria analityczna	54
11. Kombinatoryka	63
12. Rachunek prawdopodobieństwa	65
13. Dowody algebra	72
14. Dowody geometria	76
15. Granice. Pochodna	84
16. Optymalizacja	90
17. Inne	101

1. Funkcja kwadratowa	103
2. Wielomiany	124
3. Funkcje wymierne, wykładnicze, logarytmiczne	133
4. Trygonometria	142
5. Wartość bezwzględna	162
6. Ciągi	171
7. Granica ciągu, suma szeregu nieskończonego	182
8. Planimetria	191
9. Stereometria	215
10. Geometria analityczna	238
11. Kombinatoryka	271
12. Rachunek prawdopodobieństwa	279
13. Dowody algebra	295
14. Dowody geometria	305
15. Granice. Pochodna	322
16. Optymalizacja	333
17. Inne	364

zadania

rozwiązania

Wstęp

W zbiorze zebrałem zadania z lat 2002–2025, które występowały w arkuszach maturalnych CKE na poziomie rozszerzonym. Są tu zadania pochodzące z egzaminów maturalnych w terminach głównych i dodatkowych, z egzaminów próbnych przygotowanych przez CKE, z diagnozy przedmaturalnej z lat 2020–2024, z informatora o egzaminie maturalnym z matematyki z roku 2021, z arkusza pokazowego z roku 2022 oraz z arkuszy z sesji 2023–2025. Zadania zostały jednak podzielone i uporządkowane według rozdziałów występujących w typowym programie nauczania matematyki w szkole. Obok numeru każdego zadania jest wskazówka, z arkusza której matury dane zadanie pochodzi (miesiąc, rok, nr zadania i liczba punktów).

Do wszystkich zadań podałem szkice rozwiązań.

W czerwcu 2024 r. została „odchudzona” podstawa programowa i w związku z tym na maturze w 2025 r. na pewno nie pojawi się kilka zagadnień. Zadania ich dotyczące zostały oznaczone symbolem nożyczek ✂.

Ten zbiór zadań może być dobrym materiałem do samodzielnego przygotowania się do egzaminu. Może również być pomocny nauczycielowi w zaplanowaniu cyklu powtórzeń przygotowujących uczniów do matury.

Mam nadzieję, że ten bogaty materiał pozwoli uczniom skutecznie przygotować się do egzaminu.

Ryszard Pagacz

zadania

1. Funkcja kwadratowa

Zadanie 1.1. [próbną maturą CKE, styczeń 2004, zadanie 14. (4 pkt)]

Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c funkcja:

$$f(x) = (x-a)(x-b) + (x-b)(x-c) + (x-c)(x-a)$$

ma co najmniej jedno miejsce zerowe.

Zadanie 1.2. [matura próbna CKE, listopad 2006, zadanie 11. (3 pkt)]

Funkcja f przyporządkowuje każdej liczbie naturalnej $n > 1$ największą liczbę całkowitą spełniającą nierówność $x^2 - 3nx + 2n^2 < 0$ o niewiadomej x . Wyznacz wzór funkcji f .

Zadanie 1.3. [matura, maj 2008, zadanie 3. (5 pkt)]

Liczby $x_1 = 5 + \sqrt{23}$ i $x_2 = 5 - \sqrt{23}$ są rozwiązaniami równania $x^2 - (p^2 + q^2)x + (p + q) = 0$ z niewiadomą x . Oblicz wartości p i q .

Zadanie 1.4. [matura, maj 2010, zadanie 6. (5 pkt)]

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których równanie $x^2 + mx + 2 = 0$ ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste takie, że suma ich kwadratów jest większa od $2m^2 - 13$.

Zadanie 1.5. [matura, sierpień 2010, zadanie 4. (5 pkt)]

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których równanie $x^2 - (m - 4)x + m^2 - 4m = 0$ ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste, których suma jest mniejsza od $2m^3 - 3$.

Zadanie 1.6. [matura, sierpień 2010, zadanie 5. (4 pkt)]

Narysuj wykres funkcji f określonej wzorem $f(x) = x^2 - 4|x|$ i na jego podstawie wyznacz liczbę rozwiązań równania $f(x) = m$ w zależności od wartości parametru m .

Zadanie 1.7. [matura, maj 2011, zadanie 3. (6 pkt)]

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których równanie

$$x^2 - 4mx - m^3 + 6m^2 + m - 2 = 0$$

ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste x_1, x_2 takie, że $(x_1 - x_2)^2 < 8(m + 1)$.

Zadanie 1.8. [matura, czerwiec 2011, zadanie 2. (5 pkt)]

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których równanie $2x^2 - (m - 2)x - 3m = 0$ ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste x_1, x_2 , spełniające warunek $x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 \leq 25$.

Zadanie 1.9. [matura, maj 2012, zadanie 1. (4 pkt)]

Wyznacz cztery kolejne liczby całkowite takie, że największa z nich jest równa sumie kwadratów trzech pozostałych liczb.

Zadanie 1.10. [matura, maj 2012, zadanie 4. (6 pkt)]

Oblicz wszystkie wartości parametru m , dla których równanie $x^2 - (m + 2)x + m + 4 = 0$ ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste x_1, x_2 takie, że $x_1^4 + x_2^4 = 4m^3 + 6m^2 - 32m + 12$.

Zadanie 1.11. [matura, czerwiec 2012, zadanie 4. (5 pkt)]

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których równanie $2x^2 + (3 - 2m)x - m + 1 = 0$ ma dwa różne pierwiastki x_1, x_2 takie, że $|x_1 - x_2| = 3$.

Zadanie 1.12. [matura, maj 2013, zadanie 6. (6 pkt)]

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których równanie $x^2 + 2(1 - m)x + m^2 - m = 0$ ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste x_1, x_2 spełniające warunek $x_1x_2 \leq 6m \leq x_1^2 + x_2^2$.

Zadanie 1.13. [matura, czerwiec 2013, zadanie 2. (5 pkt)]

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których równanie $(m + 1)x^2 - 3mx + m + 1 = 0$ ma dwa różne pierwiastki takie, że ich suma jest nie większa niż 2,5.

Zadanie 1.14. [matura, maj 2014, zadanie 2. (6 pkt)]

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których funkcja kwadratowa $f(x) = x^2 - (2m + 2)x + 2m + 5$ ma dwa różne pierwiastki x_1, x_2 takie, że suma kwadratów odległości punktów $A = (x_1, 0)$, $B = (x_2, 0)$ od prostej o równaniu $x + y + 1 = 0$ jest równa 6.

Zadanie 1.15. [matura, czerwiec 2014, zadanie 6. (6 pkt)]

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których równanie $x^2 + (2m - 5)x + 2m + 3 = 0$ ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste x_1, x_2 takie, że $(x_1 + x_2)^2 \geq x_1^2 \cdot x_2^2 \geq x_1^2 + x_2^2$.

Zadanie 1.16. [matura, maj 2015, zadanie 7. (2 pkt)]

Liczby (-1) i 3 są miejscami zerowymi funkcji kwadratowej f . Oblicz $\frac{f(6)}{f(12)}$.

rozwiązania

1. Funkcja kwadratowa

Zadanie 1.1.

Po przekształceniu otrzymujemy

$$f(x) = 3x^2 - (2a + 2b + 2c)x + ab + bc + ca$$

Wyznaczamy wyróżnik

$$\begin{aligned}\Delta &= 4(a + b + c)^2 - 12(ab + bc + ca) = \\ &= 4a^2 + 4b^2 + 4c^2 + 8ab + 8bc + 8ca - 12ab - 12bc - 12ca = \\ &= 2(a^2 - 2ab + b^2) + 2(b^2 - 2bc + c^2) + 2(c^2 - 2ca + a^2) = \\ &= 2(a - b)^2 + 2(b - c)^2 + 2(c - a)^2\end{aligned}$$

Dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi nierówność $x^2 \geq 0$, stąd $\Delta \geq 0$, czyli funkcja f ma co najmniej jedno miejsce zerowe.

Zadanie 1.2.

$$x^2 - 3nx + 2n^2 < 0 \Leftrightarrow (x - n)(x - 2n) < 0 \Leftrightarrow x \in (n, 2n)$$

Największą liczbą całkowitą należącą do przedziału $(n, 2n)$ jest liczba $2n - 1$.

Odp. Wzór funkcji $f(n) = 2n - 1$, gdzie $n > 1$.

Zadanie 1.3.

Ze wzorów Viete'a otrzymujemy

$$\begin{cases} p^2 + q^2 = 10 \\ p + q = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p^2 + p^2 - 4p + 4 = 10 \\ q = 2 - p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p^2 - 2p - 3 = 0 \\ q = 2 - p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = -1 \\ q = 3 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} p = 3 \\ q = -1 \end{cases}$$

Odp. $(p, q) = (-1, 3)$, $(p, q) = (3, -1)$.

Zadanie 1.4.

Rozwiązanie zadania sprowadza się do rozwiązania układu nierówności $\begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1^2 + x_1^2 > 2m^2 - 13 \end{cases}$,

gdzie Δ jest wyróżnikiem równania kwadratowego, natomiast x_1, x_2 są pierwiastkami tego równania.

Zatem

$$x_1^2 + x_1^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = m^2 - 4$$



MATURA
od 2025
uszczuplona
podstawa
programowa

NOWOŚĆ

MATEMATYKA

Próbne arkusze maturalne

Zestaw 2.

POZIOM PODSTAWOWY

Tomasz Szwed
Piotr Pawlikowski
Waldemar Górski



format 205 x 292 mm
stron 144

Spis treści

Wstęp	4
1. próbny arkusz maturalny 2026 na poziomie podstawowym	5
2. próbny arkusz maturalny 2026 na poziomie podstawowym	26
3. próbny arkusz maturalny 2026 na poziomie podstawowym	48
4. próbny arkusz maturalny 2026 na poziomie podstawowym	68
5. próbny arkusz maturalny 2026 na poziomie podstawowym	88
6. próbny arkusz maturalny 2026 na poziomie podstawowym	107
Odpowiedzi i szkice rozwiązań	126

Wstęp

O egzaminie maturalnym z matematyki od 2023 roku na pewno można powiedzieć dwie rzeczy: jest inny i jest trudniejszy (przynajmniej teoretycznie). Jego inność wynika z faktu, że pojawiły się nowe typy zadań maturalnych. Do tej pory na poziomie podstawowym mieliśmy trzy typy zadań, od 2023 roku jest ich znacznie więcej. Trudność arkusza maturalnego może wynikać z faktu różnorodności typów zadań oraz ich pojawiania się w arkuszu. Od 2010 roku zadania były poukładane typami, od 2023 są poukładane zgodnie z kolejnością występowania treści i wymagań w podstawie programowej. Jest to nowa sytuacja, do której należy się dobrze przygotować.

W przygotowaniu do matury z matematyki przede wszystkim należy zrozumieć treści matematyczne i dobrze wyćwiczyć podstawowe umiejętności. To wymaga czasu, zaangażowania, samodzielnej pracy, również pracy w zespole, i przede wszystkim decyzji: **chcę i będę się uczyć**. Nasza propozycja to **zestaw sześciu przykładowych arkuszy typu maturalnego na poziomie podstawowym**. Każdy arkusz jest inny, każdy następny jest trudniejszy od poprzedniego.

Zachęcamy naszych Czytelników, uczniów i nauczycieli, do rzetelnej pracy w oparciu o nasz materiał ćwiczeniowy. W drugiej części książki są odpowiedzi do każdego zadania, a do zadań otwartych dołączyliśmy również ich pełne rozwiązania. Mamy nadzieję, że pomoże to uczniom samodzielnie przygotowującym się do egzaminu.

Życzymy cierpliwości, determinacji, komfortu pracy i przede wszystkim powodzenia na egzaminie w maju 2026 roku.

Autorzy

Odpowiedzi i szkice rozwiązań

Akceptowane są wszystkie rozwiązania merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.

1. próbný arkusz maturalny 2026 na poziomie podstawowym

Odpowiedzi do zadań zamkniętych

1.	2.	3.	4.	6.	7.	8.	12.2.	13	14.1.	14.2.	16.	17.	18.	19.	20.
D	A	B	C	A	B	C	B	D	B	FP	C	D	C	D	D

21.	22.	23.	24.	25.	27.	28.	29.	30.
B	FP	B	A	A	C	B	D	A

Odpowiedzi i rozwiązania zadań otwartych

Zadanie 5.

Rozwiązanie:

$$3^{51} + 9^{25} + 27^{16} = 3^{51} + (3^2)^{25} + (3^3)^{16} = 3^{51} + 3^{50} + 3^{48} = 3^{48}(1 + 9 + 27) = 37 \cdot 3^{48}$$

Zadanie 9.

Odpowiedź:

Zespół X otrzymał **100 000 zł** na realizację projektu edukacyjnego.

Rozwiązanie:

Przyjmijmy, że

x – kwota pozyskana przez zespół X

y – kwota pozyskana przez zespół Y

Mamy zatem

$$\begin{cases} x + y = 1\,500\,000 \\ 0,14x + 0,12y = 182\,000 \end{cases}$$

Rozwiązując układ równań dowolną metodą otrzymamy: $x = 100\,000$ oraz $y = 1\,400\,000$

Zadanie 10. Odpowiedź: $x \in \left[-\frac{1}{3}, \frac{5}{2}\right]$

Rozwiązanie:

$$6x(x - 2) \leq x + 5$$

$$6x^2 - 12x \leq x + 5$$

$$6x^2 - 13x - 5 \leq 0$$

$$\Delta = 289, x_1 = -\frac{1}{3}, x_2 = \frac{5}{2}$$

$$\text{stąd } x \in \left[-\frac{1}{3}, \frac{5}{2}\right]$$

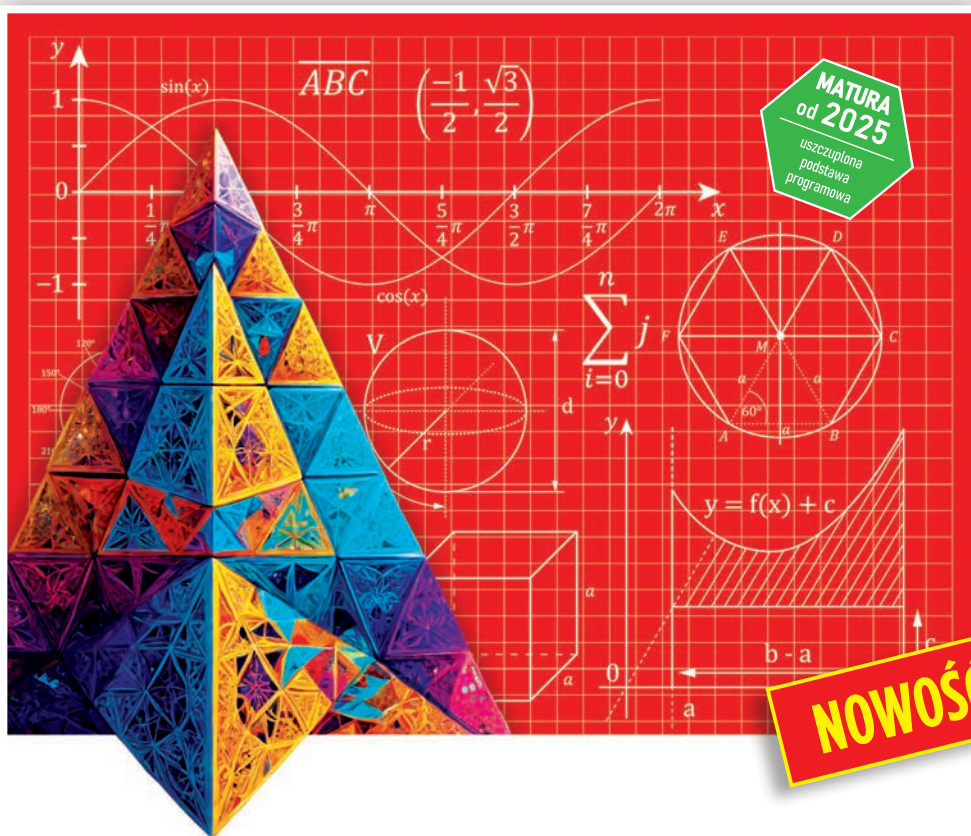
Zadanie 11.

1. $(-4, 5]$

2. $[-3, 0] \cup [1, 2)$

3. $(-4, 2)$

4. $[2, 4]$



MATURA
od 2025
uszczuplona
podstawa
programowa

NOWOŚĆ

MATEMATYKA

Próbne arkusze maturalne

Zestaw 2.

POZIOM ROZSZERZONY

Ryszard Pagacz
Tomasz Szwed



format 205 x 292 mm
stron 128

Spis treści

Wstęp	4
1. próbny arkusz maturalny 2026 na poziomie rozszerzonym	5
2. próbny arkusz maturalny 2026 na poziomie rozszerzonym	19
3. próbny arkusz maturalny 2026 na poziomie rozszerzonym	31
4. próbny arkusz maturalny 2026 na poziomie rozszerzonym	43
5. próbny arkusz maturalny 2026 na poziomie rozszerzonym	56
6. próbny arkusz maturalny 2026 na poziomie rozszerzonym	70
Odpowiedzi i szkice rozwiązań	83

Wstęp

Z analizy arkuszy maturalnych 2025 wynika, że egzamin maturalny z matematyki na poziomie rozszerzonym nie odbiegł zbyt wiele od egzaminu, jaki znamy do roku 2023. Nie ma zadań testowych ani zadań z kodowaną odpowiedzią. Pojawiły się wiązki zadań oraz zadania osadzone w kontekście realistycznym. Nie było takiej różnorodności typów zadań jak na poziomie podstawowym. Zdający w czasie 180 minut miał do rozwiązania nieco ponad 12 zadań otwartych.

W przygotowaniu do matury z matematyki przede wszystkim należy postarać się dobrze zrozumieć treści matematyczne i dobrze wyćwiczyć podstawowe umiejętności. To wymaga czasu, zaangażowania, samodzielnej pracy, również pracy w zespole, i przede wszystkim decyzji: **chcę i będę się uczyć**. Od liczby samodzielnie rozwiązanych zadań i od ich jakości zależy ostateczny wynik maturalny.

W czerwcu 2024 r. została „uszczuplona” podstawa programowa z matematyki. Mając to na uwadze, przygotowaliśmy zestaw **sześciu przykładowych arkuszy typu maturalnego na poziomie rozszerzonym**. Chcieliśmy zapewnić różnorodność w kwestii sformułowań i trudności zadań, dlatego arkusze ułożyliśmy w zespole dwóch autorów, doświadczonych, ale i różnie postrzegających rzeczywistość szkolną uczniów, którzy uczą się matematyki w zakresie rozszerzonym i deklarują chęć zdawania matury na poziomie rozszerzonym.

Do każdego zadania dołączyliśmy jego pełne rozwiązanie. Mamy nadzieję, że pomoże to uczniom samodzielnie przygotowującym się do egzaminu.

Życzymy cierpliwości, determinacji, komfortu pracy i przede wszystkim powodzenia na egzaminie w maju 2026 roku.

Autorzy

5. próbný arkusz maturalny 2026 na poziomie rozszerzonym

Zadanie 1. (0-2)

Funkcja f określona jest wzorem $f(x) = \log_a(x - b)$, dla $x \in (b, +\infty)$, gdzie a, b są pewnymi liczbami rzeczywistymi i $a \in (0, +\infty)$ oraz $a \neq 1$.

Wyznacz liczby a i b wiedząc, że do wykresu funkcji f należą punkty $A = (1, 1)$, $B = (7, 2)$.



Zadanie 2. (0-2)

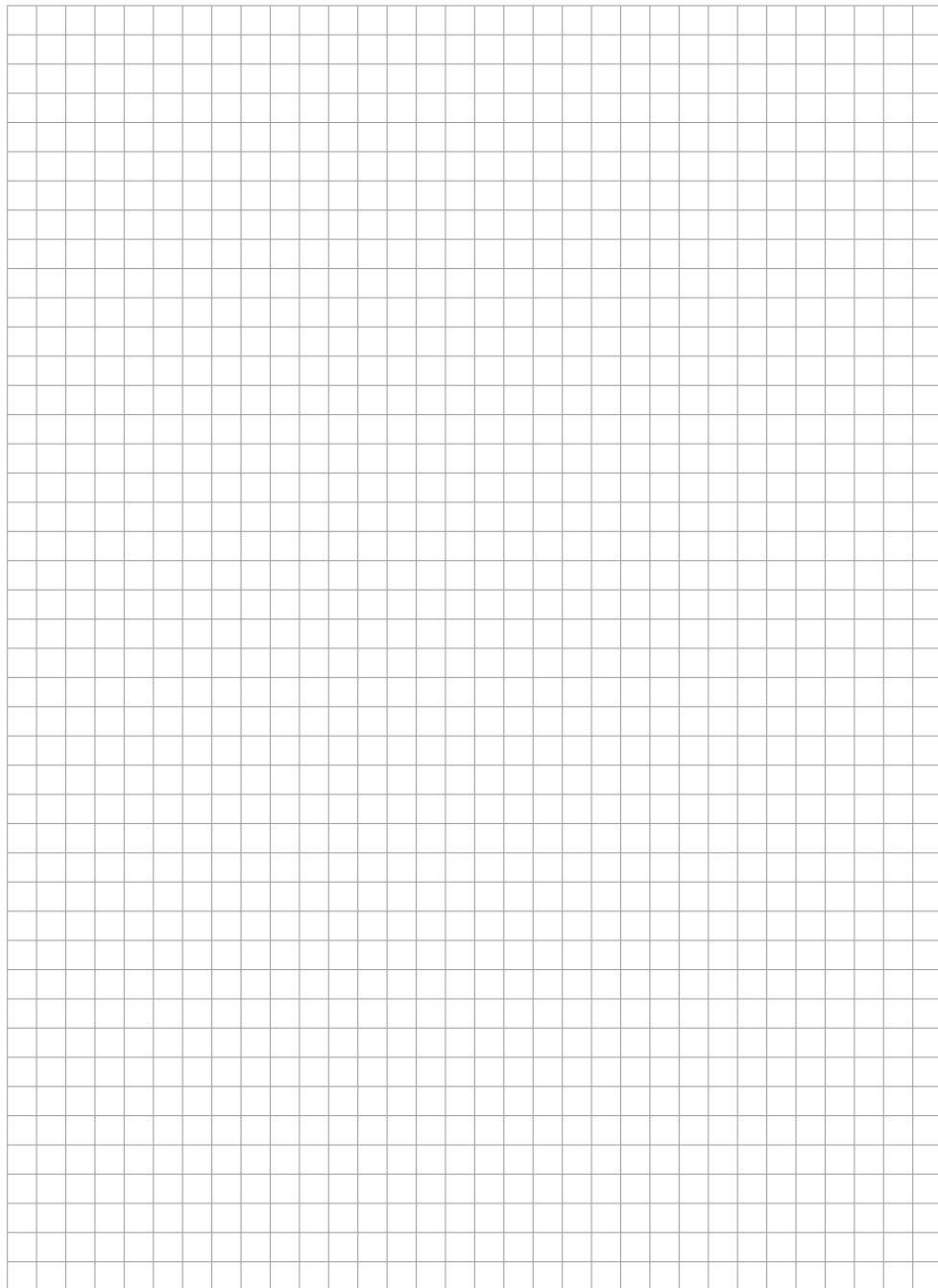
Ciąg (a_n) określony jest wzorem

$$a_n = \sin n^\circ$$

dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$.

Udowodnij, że

$$a_{87} - a_{59} - a_{93} + a_{61} = a_1.$$



Zadanie 3. (0-3)

Liczby rzeczywiste a i b spełniają dwa warunki:

1. $a = \sin x + \cos x$

2. $b = \sin^4 x + \cos^4 x$

dla pewnej liczby rzeczywistej x .

Udowodnij, że $2b = -a^4 + 2a^2 + 1$.



5. próbný arkusz maturalny 2026 na poziomie rozszerzonym

Zadanie 1.

Rozwiązanie

$$\begin{cases} f(1)=1 \\ f(7)=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_a(1-b)=1 \\ \log_a(7-b)=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^1=1-b \\ a^2=7-b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1-b \\ (1-b)^2=7-b \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a=1-b \\ b^2-b-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=3 \end{cases} \vee \begin{cases} a=3 \\ b=-2 \end{cases}$$

Odp. $(a, b) = (3, -2)$.

Zadanie 2.

Rozwiązanie

$$\begin{aligned} a_{87} - a_{59} - a_{93} + a_{61} &= \sin 87^\circ - \sin 59^\circ - \sin 93^\circ + \sin 61^\circ = \\ \cos 3^\circ - \sin(60^\circ - 1^\circ) - \cos 3^\circ + \sin(60^\circ + 1^\circ) &= \\ -\sin 60^\circ \cos 1^\circ + \sin 1^\circ \cos 60^\circ + \sin 60^\circ \cos 1^\circ + \sin 1^\circ \cos 60^\circ &= \\ 2 \sin 1^\circ \cos 60^\circ = \sin 1^\circ = a_1 &\quad \blacksquare \end{aligned}$$

Zadanie 3.

Rozwiązanie

$$\begin{aligned} b &= \sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x = 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x \quad (1) \\ a^2 &= (\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cos x = 1 + 2\sin x \cos x \\ \text{Stąd} \end{aligned}$$

$$\sin x \cos x = \frac{a^2 - 1}{2}$$

$$\sin^2 x \cos^2 x = \left(\frac{a^2 - 1}{2} \right)^2 = \frac{a^4 - 2a^2 + 1}{4}$$

$$1 - 2\sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{a^4 - 2a^2 + 1}{2} = \frac{2 - a^4 + 2a^2 - 1}{2} = \frac{1 - a^4 + 2a^2}{2}$$

Wykorzystując (1) otrzymujemy

$$b = \frac{1 - a^4 + 2a^2}{2}$$

$$2b = -a^4 + 2a^2 + 1 \quad \blacksquare$$

Zadanie 4.

Rozwiązanie

Z własności ciągów otrzymujemy układ równań

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x^2 y^2 = 1 \end{cases}$$

Podstawiając $y = 2 - x$ do drugiego równania otrzymujemy

$$x^2(2-x)^2 = 1$$

$$x(2-x) = 1 \text{ lub } x(2-x) = -1$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \text{ lub } x^2 - 2x + 1 = 2$$

$$(x-1)^2 = 0 \text{ lub } (x-1)^2 = 2$$

$$x = 1 \text{ lub } x = 1 - \sqrt{2} \text{ lub } x = 1 + \sqrt{2}$$

$$\text{Odp. } \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x=1-\sqrt{2} \\ y=1+\sqrt{2} \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x=1+\sqrt{2} \\ y=1-\sqrt{2} \end{cases}.$$



format 205 x 292 mm
stron 144

format 205 x 292 mm
stron 128



format 205 x 292 mm
stron 120

Sprawdź dostępność na:
www.pazdro.com.pl



format 205 x 292 mm
stron 120

Maria Romanowska
Tomasz Szwed
Bartosz Romanowski

Zbiór zadań maturalnych z **MATEMATYKI**

Poziom rozszerzony

NOWOŚĆ

1008 zadań z rozwiązaniami. Umiesz? Sprawdź to!



format 205 x 292 mm
stron 506

Spis treści

Od autorów

5

I. Liczby rzeczywiste i wyrażenia algebraiczne

Działania na potęgach, pierwiastkach i logarytmach	6
Dowody algebraiczne	9
1. Podzielność liczb	9
2. Wyrażenia algebraiczne, wzory skróconego mnożenia	10
3. Z wykorzystaniem średniej arytmetycznej, geometrycznej i kwadratowej kilku liczb	15
4. Logarytmiczne	16

II. Równania, nierówności i układy równań

Równania i nierówności wielomianowe	19
Równania i nierówności wymierne	21
Równania i nierówności z wartością bezwzględną	23
Układy równań	25

III. Równania i nierówności z parametrem

Równania i nierówności liniowe z parametrem	27
Równania i nierówności kwadratowe z parametrem	28
Równania wielomianowe z parametrem	30
Równania wymierne z parametrem	32
Układy równań z parametrem	32
Zastosowanie metody graficznej w rozwiązywaniu równań z parametrem	33

IV. Funkcje

Przekształcanie oraz kreślenie wykresów funkcji $y = -f(x)$ oraz $y = f(-x)$	35
Złożenie funkcji	36
Funkcja wymierna. Dowodzenie monotoniczności funkcji na podstawie definicji	37
Kontekst realistyczny w zadaniach	37

V. Ciągi

Ciąg określony wzorem ogólnym i rekurencyjnym	42
Ciąg arytmetyczny i geometryczny	43
Granice ciągów	46
Szereg geometryczny	47

VI. Trygonometria

Funkcje trygonometryczne, wykresy oraz tożsamości trygonometryczne	52
Równania trygonometryczne	52

VII. Planimetria

Trójkąty. Podobieństwo i przystawanie trójkątów. Punkty szczególne. Twierdzenie Talesa i twierdzenie do niego odwrotne. Twierdzenie Pitagorasa i twierdzenie do niego odwrotne. Twierdzenie o dwusiecznej. Twierdzenie sinusów i cosinusów	56
Czworokąty. Okrąg wpisany i opisany na czworokącie	59

Pola wielokątów	62
Koła i okręgi. Twierdzenie o odcinkach stycznych. Twierdzenie o odcinkach siecznej i stycznej.	
Twierdzenie o siecznych. Twierdzenie o cięciwach	65

VIII. Dowody geometryczne

Dowody w planimetrii	67
Dowody w trygonometrii	74
Dowody w geometrii analitycznej i stereometrii	78

IX. Geometria analityczna na płaszczyźnie kartezjańskiej

Proste w kartezjańskim układzie współrzędnych	80
Okrąg w układzie współrzędnych. Punkty wspólne krzywych	82
Wektory. Działania na wektorach	89
Pola figur w kartezjańskim układzie współrzędnych	86

X. Stereometria

Kąty w figurach przestrzennych	88
Graniastosłupy. Pole powierzchni całkowitej. Objętość. Przekroje	89
Ostrosłupy. Pole powierzchni. Objętość. Przekroje	94
Walce. Pole Powierzchni. Objętość. Przekroje	97
Stożki. Pole powierzchni. Objętość. Przekroje	98
Kule. Pole powierzchni. Objętość. Przekroje	100
Zależność między polami i objętościami brył podobnych	101

XI. Kombinatoryka

Kombinatoryka zadania różne	104
-----------------------------------	-----

XII. Rachunek prawdopodobieństwa

Prawdopodobieństwo w modelu klasycznym	106
Prawdopodobieństwo warunkowe	108
Twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym. Wzór Bayesa	109
Schemat Bernoulliego	112

XIII. Analiza matematyczna. Rachunek różniczkowy i optymalizacja

Granice funkcji (w punkcie i w nieskończoności)	114
Własność	116
Pochodna funkcji (w tym funkcji złożonej)	117
Styczna do wykresu funkcji	118
Pochodna funkcji a monotoniczność funkcji. Ekstrema funkcji	120
Zadania optymalizacyjne	122

Rozwiązania	128
-------------------	-----

Wstęp

Drogi Uczniu!

Proponowany przez nas **zbiór zadań maturalnych z matematyki na poziomie rozszerzonym** to klucz do Twojego sukcesu na maturze. Praca z nim będzie dla Ciebie wyzwaniem, ale dzięki temu odkryjesz potencjał, który w Tobie drzemie. Przygotowanie do matury to ścieżka wymagająca i pełna trudności, niczym wspinaczka górską. Niech Cię to nie zraża. Pamiętaj, że z każdym krokiem będziesz bliżej celu, a Twój uczciwie zapracowany sukces czeka na Ciebie na szczycie.

Książka powstała dzięki współpracy trzech nauczycieli matematyki z trzech różnych pokoleń, łącząc młodość z doświadczeniem. Każdy z autorów wniósł coś unikalnego, aby dostarczyć Ci narzędzia ułatwiające osiągnięcie sukcesu.

Zbiór zawiera **1008 zadań**. Każde zadanie zostało starannie ułożone na wzór zadań maturalnych, zgodnie z nową formułą egzaminu. Zbiór jest podzielony na bloki tematyczne, pozwalające skoncentrować się na każdym dziale z osobna. Na początku każdego działu został wyróżniony zakres zagadnień na poziomie podstawowym i rozszerzonym, zgodnie ze zmianami w podstawie programowej z matematyki, które obowiązują od września 2024. Kilka zagadnień już nie będzie obowiązywało na maturze od maja 2025. Zadania dotyczące usuniętych treści, jako nieobowiązujące, zaznaczyliśmy symbolem nożyczek. Niejednokrotnie pojawi się pytanie: rozwiązywać te zadania czy nie rozwiązywać? Wybór należy do Ciebie.

Oprócz zadań autorskich znajdziesz tutaj także przykłady zadań z matur CKE. Do każdego zadania dołączyliśmy szkic rozwiązania, co umożliwi Ci porównanie ze swoimi wynikami lub znalezienie inspiracji w pokonywaniu trudniejszych zagadnień. Zbiór zawiera także zadania, które sprawiają uczniom szczególne problemy, a dotyczą m.in. dowodów algebraicznych i geometrycznych, a także: trygonometrii, planimetrii, geometrii analitycznej i stereometrii. Zadania z wymienionych działów zajmują nieco ponad połowę całego zbioru.

W matematyce istnieje pojęcie *liczby obfitej* – jest to liczba, której suma wszystkich dzielników (ale mniejszych od niej) jest większa niż ona sama. Liczba 1008, będąca liczbą obfitą, nie tylko podkreśla bogactwo materiału, ale także odzwierciedla zasób wiedzy, którą pragniemy pomóc Ci przyswoić.

Z życzeniami cierpliwości i wytrwałości
w przygotowaniach do egzaminu oraz sukcesu na maturze

Autorzy

I. Liczby rzeczywiste i wyrażenia algebraiczne

Podstawa programowa

Liczby rzeczywiste.

Zakres podstawowy. Uczeń:

- wykonuje działania (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie, pierwiastkowanie, logarytmowanie) w zbiorze liczb rzeczywistych;
- przeprowadza proste dowody dotyczące podzielności liczb całkowitych i reszt z dzielenia, np.:
 - dowód podzielności przez 24 iloczynu czterech kolejnych liczb naturalnych,
 - dowód własności: jeśli liczba przy dzieleniu przez 4 daje resztę 3, to nie jest kwadratem liczby całkowitej;
- stosuje własności pierwiastków dowolnego stopnia, w tym pierwiastków stopnia nieparzystego z liczb ujemnych;
- stosuje związek pierwiastkowania z potęgowaniem oraz prawa działań na potęgach i pierwiastkach;
- stosuje monotoniczność potęgowania, w szczególności własności: jeśli $x < y$ oraz $a > 1$, to $a^x < a^y$, zaś gdy $x < y$ i $0 < a < 1$, to $a^x > a^y$;
- posługuje się pojęciem przedziału liczbowego, zaznacza przedziały na osi liczbowej;
- stosuje interpretację geometryczną i algebraiczną wartości bezwzględnej, rozwiązuje równania typu: $|x + 4| = 5$;
- wykorzystuje własności potęgowania i pierwiastkowania w sytuacjach praktycznych, w tym do obliczania procentów składanych, zysków z lokat i kosztów kredytów;
- stosuje związek logarytmowania z potęgowaniem, posługuje się wzorami na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto stosuje wzór na zamianę podstawy logarytmu.

Wyrażenia algebraiczne.

Zakres podstawowy. Uczeń:

- stosuje wzory skróconego mnożenia na: $(a + b)^2$, $(a - b)^2$, $a^2 - b^2$;
- dodaje, odejmuje i mnoży wielomiany jednej i wielu zmiennych;
- wyłącza poza nawias jednomian z sumy algebraicznej;

mnoży i dzieli wyrażenia wymierne.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

- dzieli wielomian jednej zmiennej $W(x)$ przez dwumian postaci $x - a$;
- rozkłada wielomiany na czynniki metodą wyłączania wspólnego czynnika przed nawias oraz metodą grupowania wyrazów;
- znajduje pierwiastki całkowite wielomianu o współczynnikach całkowitych;
- stosuje podstawowe własności trójkąta Pascala oraz następujące własności współczynnika

dwumianowego (symbolu Newtona): $\binom{n}{0} = 1$,

$$\binom{n}{1} = n, \quad \binom{n}{n-1} = n, \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k},$$

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1};$$

- korzysta ze wzorów na: $a^3 + b^3$, $a^3 - b^3$, $a^n - b^n$, $(a + b)^n$ i $(a - b)^n$;
- dodaje i odejmuje wyrażenia wymierne, np.:

$$\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}, \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}, \quad \frac{x+1}{x+2} + \frac{x-1}{x+1}.$$

Działania na potęgach, pierwiastkach i logarytmach

Zadanie 1.1.

Dana jest liczba $k = 2^{-\frac{1}{4}}$ oraz liczby $a = \sqrt[4]{8}$, $b = \frac{1}{2\sqrt[4]{8}}$, $c = \frac{\sqrt[4]{8}}{2}$ i $d = \frac{2}{\sqrt[4]{8}}$. Którym liczbom spośród a , b , c , d jest równa liczba k ?

Zadanie 1.2.

Doprowadź następujące wyrażenie do najprostszej postaci:

$$\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right) \cdot \frac{3ab}{a^3 + b^3} : \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2 - ab}; \text{ gdzie } a \neq 0, b \neq 0, a + b \neq 0, a - b \neq 0.$$

Zadanie 1.3.

Usuń niewymierność z mianownika:

a) $\frac{1+\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}}$

b) $\frac{1+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}$

c) $\frac{5-3\sqrt{7}}{\sqrt{7}+4}$

d) $\frac{2+4\sqrt{6}}{3+3\sqrt{2}}$

e) $\frac{2}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

f) $\frac{\sqrt[3]{2}-1}{\sqrt[3]{2}+1}$

g) $\frac{\sqrt[3]{3}+2}{\sqrt[3]{3}-3}$

Zadanie 1.4.Oblicz wartość wyrażenia $\sqrt{(1-\sqrt{3})^2} + \sqrt{(2-\sqrt{3})^2}$.**Zadanie 1.5.**Oblicz wartość wyrażenia $(\sqrt{3+\sqrt{5}} - \sqrt{3-\sqrt{5}})^2$.**Zadanie 1.6.**Oblicz wartość wyrażenia $\left[(\sqrt{3}+1)^2 - (\sqrt{3}-1)^2\right]^3$.**Zadanie 1.7.**Liczba $(1+\sqrt{2})^4 - (1-\sqrt{2})^4$ może być zapisana postaci $a+b\sqrt{2}$, gdzie $a, b \in \mathbf{Z}$. Wyznacz b^a .**Zadanie 1.8.**Liczba $(3+\sqrt{5})^4 + (3-\sqrt{5})^4$ może być zapisana postaci $a+b\sqrt{5}$, gdzie $a, b \in \mathbf{Z}$. Wyznacz $a \cdot b$.**Zadanie 1.9.**Sprawdź, czy wyrażenie $\sqrt{49-12\sqrt{5}} - \frac{1-\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}}$ jest liczbą naturalną.**Zadanie 1.10.**Dane są liczby rzeczywiste x, y . Wiadomo, że $x+y=8$ i $xy=5$. Wyznacz wartość wyrażenia:

a) $x^3y + xy^3$, b) $x^4y + xy^4$.

Zadanie 1.11.Dane są liczby rzeczywiste x, y , takie, że $x-y=4$ i $xy=11$. Wyznacz wartość wyrażenia:

a) $x^3y + xy^3$, b) $x^4y - xy^4$.

Zadanie 1.12.Oblicz wartość wyrażenia $\log_{\sqrt{2}} 2 \cdot \log_2 \sqrt{3} \cdot \log_{\sqrt{3}} 4$.**Zadanie 1.13.**Oblicz wartość wyrażenia $\frac{\frac{1}{5} \log_4 81 \cdot \log_3 64}{-9 \log_7 \sqrt[6]{49}}$.

Zadanie 1.14.

Dane są liczby $a = \left(\frac{1}{3}\right)^{\log_9 64}$ oraz $b = \log_3 2 \cdot \log_8 3$. Oblicz a^b .

Zadanie 1.15.

Wiedząc, że $a = \log_3 5 \cdot \log_{25} 27$, $b = 2^{\log_3 5} - 5^{\log_3 2}$, oblicz a^b .

Zadanie 1.16.

Oblicz wartość wyrażenia $2^{\log_{\frac{3}{25}} \sqrt{5}}$.

Zadanie 1.17.

Oblicz wartość wyrażenia $2^{\log_4 81 \cdot \log_{\sqrt{3}} 8}$.

Zadanie 1.18.

Oblicz wartość wyrażenia $100^{\frac{1}{2} \log 3 - \log 2}$.

Zadanie 1.19.

Oblicz wartość wyrażenia $\log_4 81 \cdot \log_{\sqrt{3}} 8 - \log_3 49 \cdot \log_{\sqrt{7}} 3$.

Zadanie 1.20.

Wiedząc, że $\log_a b = 0,75$ i $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, oblicz $\log_{\sqrt{a}} \sqrt[3]{b^2}$.

Zadanie 1.21.

Wiedząc, że $\log_{ab} a = 4$ i $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$, oblicz $\log_{ab} \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}}$.

Zadanie 1.22.

Oblicz wartość wyrażenia $\frac{\log_5 6 \cdot \log_{36} 625}{\log_9 \sqrt[4]{4} - \frac{1}{4} \log_3 \sqrt{108}}$.

Zadanie 1.23.

Oblicz wartość wyrażenia $\frac{\log_6 3 \cdot \log_6 48 + \log_6^2 4}{\log_6^2 3 + \log_6 16}$.

Zadanie 1.24. [CKE, informator maturalny, zadanie 2. (0-3)]

Dane są liczby $a = (\log_{\sqrt{5}} 2) \cdot \log_2 25$ i $b = \frac{\log_5 6}{\log_5 8}$. Oblicz a^{b+1} .

Zadanie 1.25. [CKE, arkusz próbny styczeń 2009, zadanie 6. (0-4)]

Porównaj liczby a^b i b^a , gdzie $a = \left[(2 - \sqrt{3})^{\frac{1}{2}} + (2 + \sqrt{3})^{\frac{1}{2}} \right]^2$, $b = \frac{81^{-1} \cdot \sqrt{3}}{27^{-2} \cdot \sqrt[4]{9}}$.

POZIOM PODSTAWOWY



Praca zbiorowa

GPS w labiryncie matematyki

Zbiór **2956** zadań

NOWOŚĆ



Matura
od **2025** r.
wydanie II
poszerzone

format 205 x 292 mm
stron 272

SPIS TREŚCI

Wstęp	5
Instrukcja dla korzystających z GPS	7
CZĘŚĆ PIERWSZA	
Zadania odpowiadające maturalnym wymaganiom egzaminacyjnym od roku 2023, zgodne z wcześniejszą podstawą programową	9
CZĘŚĆ DRUGA	
Zadania uzupełniające do zadań pierwszej części pod kątem nowych wymagań egzaminacyjnych, obowiązujących w latach 2023–2024	35
CZĘŚĆ TRZECIA	
Zadania pomocne w przygotowaniu się do matury z matematyki według nowej formuły od roku 2023	83
CZĘŚĆ CZWARTA	
Zadania uzupełniające do zadań pierwszej, drugiej i trzeciej części pod kątem wymagań egzaminacyjnych obowiązujących w latach 2023–2024	129
CZĘŚĆ PIĄTA	
Zadania uzupełniające do poprzednich części pod kątem wymagań podstawy programowej – od roku 2024/2025	185
CZĘŚĆ SZÓSTA	
Zadania przydatne, ale nieobjęte wymaganiami zawartymi w podstawie programowej poziomu podstawowego i rozszerzonego	205
ODPOWIEDZI do zadań	211

WSTĘP

Niniejszy zbiór zadań jest skierowany przede wszystkim **do uczniów, którzy mają duże trudności z nauką matematyki**. Zbiór ten, z założenia, ma być wsparciem dla uczniów i nauczycieli w procesie nauczania matematyki w szkole ponadpodstawowej. Zawiera on zestaw zadań bazowych, które są odzwierciedleniem wymagań szczegółowych, zapisanych w podstawie programowej. Dodatkowo pod każdym zadaniem bazowym zamieszczono ćwiczenia, które przedstawiają w różnych aspektach zagadnienia odnoszące się do tego zadania.

Ten zbiór (wydanie drugie) został uzupełniony i obecnie składa się z sześciu części (do poprzedniej wersji dodano części czwartą, piątą i szóstą).

CZĘŚĆ PIERWSZA powstała w odpowiedzi na zapotrzebowanie nauczycieli przygotowujących uczniów, którzy mają duże trudności z nauką matematyki, do egzaminu maturalnego w roku 2022 na poziomie podstawowym.

CZĘŚĆ DRUGA jest utrzymana w tym samym stylu i stanowi uzupełnienie części pierwszej o zadania odpowiadające wymaganiom egzaminacyjnym egzaminu maturalnego w latach 2023–2024. W tej części również nie uwzględniono zadań otwartych na dowodzenie. Ze względu na założone cele, położono akcent na zrozumienie podstawowych pojęć matematycznych i osiągnięcie wysokiej sprawności rachunkowej. W obu tych częściach występują hasła: BAZA, baza i ćwiczenia. „Duża” BAZA wskazuje dział, którego dotyczą zamieszczone w nim zadania, natomiast „małe” bazy zawierają zadania, których rozwiązanie jest konieczne do opanowania umiejętności podanych w wymaganiach szczegółowych podstawy programowej poziomu podstawowego i dotyczących danego działu. Dla doskonalenia tych umiejętności zamieszczono dodatkowe ćwiczenia.

CZĘŚĆ TRZECIA zawiera zadania, których dotychczas nie było na egzaminie maturalnym. Typy tych zadań wprowadza Informator o egzaminie maturalnym z matematyki od 2023 r. na poziomie podstawowym oraz arkusz pokazowy opublikowany przez CKE. Są to zadania typu „prawda – fałsz”, na dobieranie, wyboru wielokrotnego oraz „z luką”. Zamieszczone zadania typu „q, ponieważ p” są dopełnieniem części pierwszej i drugiej w zakresie dowodzenia, gdyż można je traktować jako krótkie dowody.

CZĘŚĆ CZWARTA zbioru powstała na podstawie doświadczeń w pracy z poprzednim wydaniem. Zamieszczono tu większą liczbę ćwiczeń obejmujących wybrane umiejętności, zgodne z wymaganiami egzaminacyjnymi egzaminu maturalnego z matematyki w latach 2023–2024, tak aby całość stanowiła jeszcze obszerniejszy materiał potrzebny do efektywnego przygotowania młodzieży mającej trudności w nauce matematyki.

CZĘŚĆ PIĄTA zawiera zadania, które nie zostały ujęte w wymaganiach egzaminacyjnych egzaminu maturalnego z matematyki w latach 2023–2024, ale odpowiadają wymaganiom szczegółowym, zawartym w podstawie programowej kształcenia ogólnego dla liceum ogólnokształcącego, technikum oraz branżowej szkoły II stopnia, od roku szkolnego 2024/2025.

W związku ze zmianami w podstawie programowej z matematyki od roku szkolnego 2024/2025, w częściach I, II, IV i V wszystkie zadania, które wybiegają poza obowiązującą podstawę programową poziomu podstawowego, oznaczono literą **R**. W części trzeciej treści zadań zostały zmienione tak, aby odpowiadały nowym wymaganiom.

Dodatkowo powstała **CZĘŚĆ SZÓSTA** zbioru zawierająca zadania, które nie są objęte zmienioną podstawą programową, aczkolwiek są użyteczne z punktu widzenia nauczania innych przedmiotów oraz ich wykorzystania w życiu codziennym.

Do zadań zamieszczonych w każdej z części zbioru podano odpowiedzi, tak aby uczeń rozwiązujący samodzielnie zadania mógł zweryfikować wynik. Oprócz klasycznego spisu treści zamieszczono GPS, który wskazuje, gdzie można szukać zadań dotyczących poszczególnych haseł programowych.

Z życzeniami wiary we własne możliwości i powodzenia na maturze
Autorzy

CZĘŚĆ PIĄTA

Zadania uzupełniające do poprzednich części
pod kątem wymagań podstawy programowej – od roku 2024/2025

BAZA (wyrażenia algebraiczne)

1) Oblicz:

a) baza $(\sqrt{5})^3$

ćwiczenia a1) $(\sqrt{3})^3$ a2) $(\sqrt{2})^3$ a3) $(-\sqrt{7})^3$ a4) $(-\sqrt{8})^3$ a5) $(\sqrt{10})^3$

b) baza $(2\sqrt{5})^3$

ćwiczenia b1) $(3\sqrt{2})^3$ b2) $(2\sqrt{3})^3$ b3) $(5\sqrt{2})^3$ b4) $(2\sqrt{6})^3$

b5) $(4\sqrt{8})^3$ b6) $(5\sqrt{6})^3$

c) baza $(-2\sqrt{5})^3$

ćwiczenia c1) $(-3\sqrt{2})^3$ c2) $(-5\sqrt{3})^3$ c3) $(-4\sqrt{2})^3$ c4) $(-3\sqrt{8})^3$ c5) $(-6\sqrt{5})^3$

R d) baza $(\sqrt{2} + 1)^3$

ćwiczenia d1) $(1 + \sqrt{5})^3$ d2) $(\sqrt{3} + 2)^3$ d3) $(\sqrt{2} + \sqrt{6})^3$

d4) $(2\sqrt{3} + 3)^3$ d5) $(3\sqrt{3} + 2\sqrt{6})^3$

R e) baza $(\sqrt{3} - 1)^3$

ćwiczenia e1) $(\sqrt{2} - 2)^3$ e2) $(1 - \sqrt{5})^3$ e3) $(\sqrt{3} - 3\sqrt{2})^3$

e4) $(-2 + \sqrt{3})^3$ e5) $(-3\sqrt{2} + 2\sqrt{5})^3$

R f) baza $(-\sqrt{2} - 1)^3$

ćwiczenia f1) $(-\sqrt{3} - 2)^3$ f2) $(-\sqrt{5} - 3)^3$ f3) $(-4\sqrt{2} - 1)^3$

f4) $(-4\sqrt{3} - 2\sqrt{2})^3$ f5) $(-3\sqrt{3} - \sqrt{6})^3$

R g) baza $\sqrt{2} - (2 + \sqrt{2})^3$

ćwiczenia g1) $2\sqrt{2} + (1 - \sqrt{2})^3$ g2) $6\sqrt{3} - (1 + \sqrt{3})^3$ g3) $28 - (2 + 2\sqrt{3})^3$

g4) $22 - (2 + 3\sqrt{2})^3$ g5) $31 - 4\sqrt{5} - (1 + 2\sqrt{5})^3$

R 2) Wykonaj wskazane działania i zredukuj wyrazy podobne:

a) baza $(2x - 1)^3$

ćwiczenia a1) $(2x + 1)^3$ a2) $(3x - 2)^3$ a3) $(3x + 2)^3$ a4) $(3x - 5)^3$ a5) $(3x + 5)^3$

b) baza $(2x - y)^3$

ćwiczenia b1) $(x + y)^3$ b2) $(5x - 2y)^3$ b3) $(3x + 2y)^3$ b4) $(3x - 2y)^3$ b5) $(3x + 5y)^3$

c) baza $(-2x - y)^3$

ćwiczenia c1) $(-x + y)^3$ c2) $(-5x - 2y)^3$ c3) $(-3x + 2y)^3$

c4) $(-3x - 2y)^3$ c5) $(-3x + 5y)^3$

d) baza $(2 - x^2)^3$

ćwiczenia d1) $(5 + 2x^2)^3$ d2) $(5x^3 - 2)^3$ d3) $(3x^2 - 2)^3$ d4) $(3 - 2x^2)^3$ d5) $(3 + 5x^2)^3$

e) baza $(2x - x^2)^3$

ćwiczenia e1) $(5x + 2x^2)^3$ e2) $(5x^3 - 2x)^3$ e3) $(3x^2 - 2x^3)^3$

e4) $(3x - 2x^2)^3$ e5) $(3x^3 + 5x^2)^3$

f) baza $(2y^2 - x^2)^3$

ćwiczenia f1) $(5x^3 - 2y^2)^3$ f2) $(3y - 2x^3)^3$

g) baza $x^3 - (1 + x)^3$

ćwiczenia g1) $12x^2 - (1 + 2x)^3$ g2) $2x^3 - (2 + x)^3$ g3) $8x^3 - (3 + 2x)^3$

g4) $54x^2 - (2 + 3x)^3$ g5) $27 - (3 + 2x)^3$

h) baza $4^3 - 2(2 + x)^3$

ćwiczenia h1) $-2^3 + 2(1 + 2x)^3$ h2) $2(3x)^0 - 2(1 + x)^3$ h3) $(2x)^3 - 2(2 + 2x)^3$

h4) $(-3x)^3 - (2 + 3x)^3$ h5) $2(2x)^3 - 3(1 + 2x)^3$

R 3) Podane wyrażenia zapisz w postaci iloczynu.

a) baza $x^3 + 8$

ćwiczenia a1) $x^3 + 125$ a2) $8x^3 + 1$ a3) $27x^3 + 8$ a4) $x^3 + 27$ a5) $27x^3 + 1$

b) baza $x^3 - 8$

ćwiczenia b1) $x^3 - 125$ b2) $8x^3 - 1$ b3) $27x^3 - 8$ b4) $x^3 - 27$ b5) $27x^3 - 1$

c) baza $x^3 + 0,125$

ćwiczenia c1) $x^3 + 0,001$ c2) $\frac{1}{8}x^3 + 1$ c3) $x^3 + 0,064$ c4) $x^3 - \frac{1}{125}$ c5) $\frac{1}{1000} - x^3$

d) baza $x^3 + (\sqrt{2})^3$

ćwiczenia d1) $x^3 + (\sqrt{7})^3$ d2) $(\sqrt{5}x)^3 + 1$ d3) $(\sqrt{3}x)^3 + 8$

d4) $(\sqrt{2}x)^3 + 27$ d5) $x^3 + (2\sqrt{6})^3$

e) baza $x^3 - (\sqrt{2})^3$

ćwiczenia e1) $x^3 - (\sqrt{5})^3$ e2) $(\sqrt{3}x)^3 - 8$ e3) $(2\sqrt{3}x)^3 - 27$

e4) $(5\sqrt{5}x)^3 - 1$ e5) $(3\sqrt{3}x)^3 - 1$

BAZA (wielomiany)

R 4) Wyznacz wszystkie całkowite pierwiastki wielomianu $W(x)$, jeśli:

a) baza $W(x) = x^3 - 3x^2 + 2$

ćwiczenia a1) $W(x) = x^3 + 3x - 4$ a2) $W(x) = x^3 - 4x^2 + 24$ a3) $W(x) = x^3 + 4x^2 - 3$

a4) $W(x) = x^3 - 7x + 6$ a5) $W(x) = x^3 - 10x + 3$

b) baza $W(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 2$

ćwiczenia b1) $W(x) = x^3 + 3x^2 + 4x + 2$

b2) $W(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$ b3) $W(x) = x^3 + 6x^2 - 4x - 3$

b4) $W(x) = x^3 + 6x^2 + x - 4$ b5) $W(x) = x^3 + 3x^2 - 5x - 10$

R 5) Wykonaj dzielenie wielomianu $W(x)$ przez wielomian $P(x)$, gdy:

a) baza $W(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 2$, $P(x) = x - 1$

ćwiczenia a1) $W(x) = x^3 + 5x^2 - 4x - 2$, $P(x) = x - 1$

a2) $W(x) = x^3 + 7x^2 + 4x - 2$, $P(x) = x + 1$

a3) $W(x) = x^3 + 13x^2 + 14x + 2$, $P(x) = x + 1$

a4) $W(x) = x^3 + 10x^2 + 4x - 15$, $P(x) = x - 1$

a5) $W(x) = x^3 - 6x^2 + 7x - 2$, $P(x) = x - 1$

b) baza $W(x) = 2x^3 + x^2 - 13x + 6$, $P(x) = x - 2$

ćwiczenia b1) $W(x) = 2x^3 + 4x^2 - 13x - 6$, $P(x) = x - 2$

b2) $W(x) = x^3 + x^2 - x + 2$, $P(x) = x + 2$

b3) $W(x) = 2x^3 + 7x^2 + 4x + 3$, $P(x) = x + 3$

b4) $W(x) = 4x^3 - 18x^2 + 17x + 3$, $P(x) = x - 3$

b5) $W(x) = 3x^3 - 3x^2 + x + 7$, $P(x) = x + 1$

c) baza $W(x) = -2x^3 + 11x^2 - 11x - 4$, $P(x) = x - 4$

ćwiczenia c1) $W(x) = -x^3 + 6x^2 - 6x - 4$, $P(x) = x - 2$

c2) $W(x) = -3x^3 - x^2 + x - 1$, $P(x) = x + 1$

c3) $W(x) = -5x^3 + 21x^2 + 23x - 15$, $P(x) = x - 5$

c4) $W(x) = -4x^3 - 11x^2 - 4x - 21$, $P(x) = x + 3$

c5) $W(x) = -2x^3 - 4x^2 + 7x - 36$, $P(x) = x + 4$

BAZA (równania dwukwadratowe)

R 6) Rozwiąż równanie:

a) baza $x^4 - 9x^2 = 0$

ćwiczenia a1) $x^4 - 25x^2 = 0$ a2) $x^4 = 16x^2$ a3) $x^4 = 100x^2$ a4) $x^4 = 49x^2$

a5) $x^4 = 625x^2$

b) baza $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$

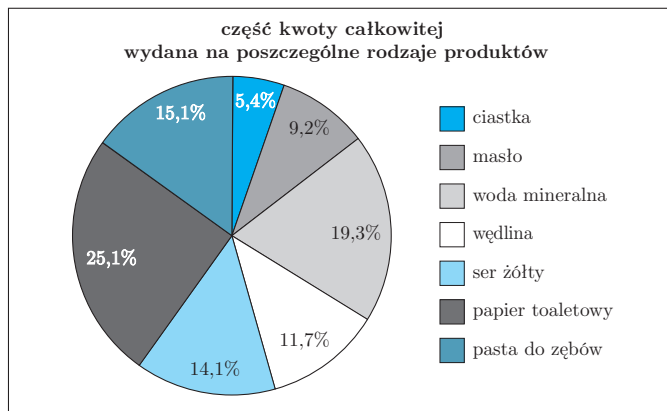
ćwiczenia b1) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ b2) $x^4 - 29x^2 + 100 = 0$ b3) $x^4 - 26x^2 + 25 = 0$

b4) $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$ b5) $x^4 - 6x^2 + 8 = 0$

c) baza $x^4 - 2x^2 + 1 = 0$

ćwiczenia c1) $x^4 - 8x^2 + 16 = 0$ c2) $x^4 - 6x^2 + 9 = 0$ c3) $x^4 - 10x^2 + 25 = 0$

c4) $x^4 + 14x^2 + 49 = 0$ c5) $x^4 + 12x^2 + 36 = 0$



Średnia cena produktu to 5,42 zł.

ODPOWIEDZI DO CZĘŚCI PIĄTEJ

- 1) a) baza $5\sqrt{5}$ ćwiczenia a1) $3\sqrt{3}$ a2) $2\sqrt{2}$ a3) $-7\sqrt{7}$ a4) $-16\sqrt{2}$ a5) $10\sqrt{10}$
 b) baza $40\sqrt{5}$ ćwiczenia b1) $54\sqrt{2}$ b2) $24\sqrt{3}$ b3) $250\sqrt{2}$ b4) $48\sqrt{6}$ b5) $1024\sqrt{2}$
 b6) $750\sqrt{6}$
 c) baza $-40\sqrt{5}$ ćwiczenia c1) $-54\sqrt{2}$ c2) $-375\sqrt{3}$ c3) $-128\sqrt{2}$ c4) $-432\sqrt{2}$
 c5) $-1080\sqrt{5}$
 d) baza $5\sqrt{2} + 7$ ćwiczenia d1) $8\sqrt{5} + 16$ d2) $15\sqrt{3} + 26$ d3) $20\sqrt{2} + 12\sqrt{6}$
 d4) $78\sqrt{3} + 135$ d5) $297\sqrt{3} + 210\sqrt{6}$
 e) baza $6\sqrt{3} - 10$ ćwiczenia e1) $14\sqrt{2} - 20$ e2) $16 - 8\sqrt{5}$ e3) $57\sqrt{3} - 81\sqrt{2}$
 e4) $15\sqrt{3} - 26$ e5) $148\sqrt{5} - 234\sqrt{2}$
 f) baza $-5\sqrt{2} - 7$ ćwiczenia f1) $-15\sqrt{3} - 26$ f2) $-32\sqrt{5} - 72$ f3) $-140\sqrt{2} - 97$
 f4) $-288\sqrt{3} - 304\sqrt{2}$ f5) $-135\sqrt{3} - 87\sqrt{6}$
 g) baza $-13\sqrt{2} - 20$ ćwiczenia g1) $-3\sqrt{2} + 7$ g2) -10 g3) $-52 - 48\sqrt{3}$
 g4) $-94 - 90\sqrt{2}$ g5) $-50\sqrt{5} - 30$
- 2) a) baza $8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$ ćwiczenia a1) $8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$
 a2) $27x^3 - 54x^2 + 36x - 8$ a3) $27x^3 + 54x^2 + 36x + 8$
 a4) $27x^3 - 135x^2 + 225x - 125$ a5) $27x^3 + 135x^2 + 225x + 125$
 b) baza $8x^3 - 12x^2y + 6xy^2 - y^3$ ćwiczenia b1) $x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$
 b2) $125x^3 - 150x^2y + 60xy^2 - 8y^3$ b3) $27x^3 + 54x^2y + 36xy^2 + 8y^3$
 b4) $27x^3 - 54x^2y + 36xy^2 - 8y^3$ b5) $27x^3 + 135x^2y + 225xy^2 + 125y^3$
 c) baza $-8x^3 - 12x^2y - 6xy^2 - y^3$ ćwiczenia c1) $-x^3 + 3x^2y - 3xy^2 + y^3$
 c2) $-125x^3 - 150x^2y - 60xy^2 - 8y^3$ c3) $-27x^3 + 54x^2y - 36xy^2 + 8y^3$
 c4) $-27x^3 - 54x^2y - 36xy^2 - 8y^3$ c5) $-27x^3 + 135x^2y - 225xy^2 + 125y^3$

Maria Mędrzycka

207 dowodów MATEMATYCZNYCH w dwóch krokach

Matura
od 2025 r.



NOWOŚĆ



format 165 x 235 mm
stron 152

Spis treści

Wstęp	5
1. Liczby pierwsze	7
2. Reszty z dzielenia	12
3. Cechy podzielności	17
4. Podzielność jako rozkład na iloczyn	22
5. Nierówności	33
6. Algebra	46
7. Ciągi	57
8. Prawdopodobieństwo	63
9. Środki w trójkącie	68
10. Twierdzenie Pitagorasa	73
11. Trójkąty – pola	82
12. Trójkąty – podobieństwo i przystawanie	87
13. Trójkąty i okręgi, czworokąty i okręgi	97
14. Koła i okręgi	126
15. Trygonometria	143

Wstęp

Szanowny Czytelniku!

Przed Tobą „207 dowodów matematycznych w dwóch krokach”, czyli dowody łatwe, chociaż nie najprostsze. Te dwa kroki mogą być różnej długości, ale – jak to w zadaniach na dowodzenie – zawsze znamy cel, do którego idziemy, czyli odpowiedź do zadania.

Zadania zostały podzielone na kilka działów tematycznych, a pod każdym zadaniem jest zapisany dowód. Niektóre zadania mają więcej propozycji rozwiązań, bo chociaż dowód to konsekwentne przedstawienie sposobu rozumowania, to drogi do celu mogą być różne.

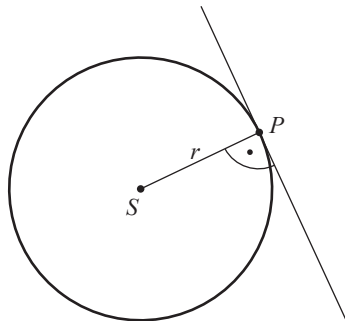
Niemal połowę tego zbioru stanowią zadania ze „100 dowodów matematycznych w dwóch krokach”. Niektóre zadania wykraczają ponad poziom podstawowy, a są to zadania: 27, 79, 80, 81, 82, 83, 99, 100, 102, 103, 159, 160, 161, 147, 198, 199 i 200.

Mam nadzieję, że ten zbiór pomoże Ci w zrozumieniu przedstawionych zagadnień, a zapis dowodów będzie przyjazny.

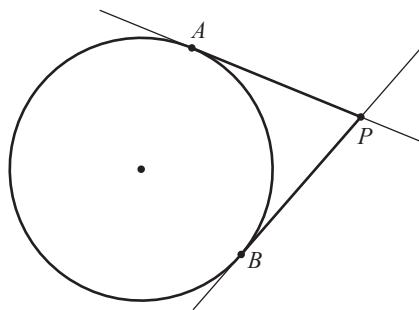
Autorka

13. Trójkąty i okręgi, czworokąty i okręgi

Fakt 13.1. Promień okręgu jest prostopadły do stycznej w punkcie styczności.



Fakt 13.2. Twierdzenie o odcinkach stycznych: z punktu P leżącego poza okręgiem można poprowadzić dwie styczne do danego okręgu. Jeśli A i B są różnymi punktami styczności, to $|AP| = |BP|$.



Fakt 13.3. Środek okręgu wpisanego w trójkąt leży na przecięciu dwusiecznych kątów wewnętrznych trójkąta.

Fakt 13.4. Kąt wpisany w okrąg oparty na średnicy jest prosty. Przeciwprostokątna trójkąta wpisanego w okrąg jest średnicą okręgu.

Fakt 13.5. W trójkącie prostokątnym wysokość poprowadzona z wierzchołka kąta prostego jest średnią geometryczną odcinków, na jakie podzieliła przeciwprostokątną.

Fakt 13.6. Na czworokącie można opisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy sumy miar jego przeciwległych kątów wewnętrznych są równe 180° .

Fakt 13.7. W czworokąt wypukły można wpisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy sumy długości jego przeciwległych boków są równe.

Stąd

$$|\angle APB| = 180^\circ = |\angle APT| + |\angle APT| + |\angle BPS| + |\angle BPS| = \\ = 2|\angle APT| + 2|\angle BPS|, \text{ zatem } |\angle TPR| + |\angle RPS| = 90^\circ, \text{ czyli } |\angle TPS| = 90^\circ.$$

Koniec dowodu.

Dowód 2:

► Krok 1. Oznaczamy

$$|\angle ATP| = \alpha \text{ i } |\angle BSP| = \beta, \text{ zatem}$$

$$|\angle APB| = \alpha \text{ i } |\angle PTS| = 90^\circ - \alpha,$$

$$|\angle SPB| = \beta \text{ i } |\angle PST| = 90^\circ - \beta.$$

► Krok 2. Z twierdzenia o sumie kątów w trójkącie PTS wynika, że $|\angle TPS| = \alpha + \beta$.

Ponadto

$$|\angle APB| = \alpha + (\alpha + \beta) + \beta = 2\alpha + 2\beta$$

$$\text{ i } |\angle APB| = 180^\circ.$$

Wynika z tego, że $|\angle TPS| = 0,5 \cdot |\angle APB|$, czyli $|\angle TPS| = 90^\circ$.

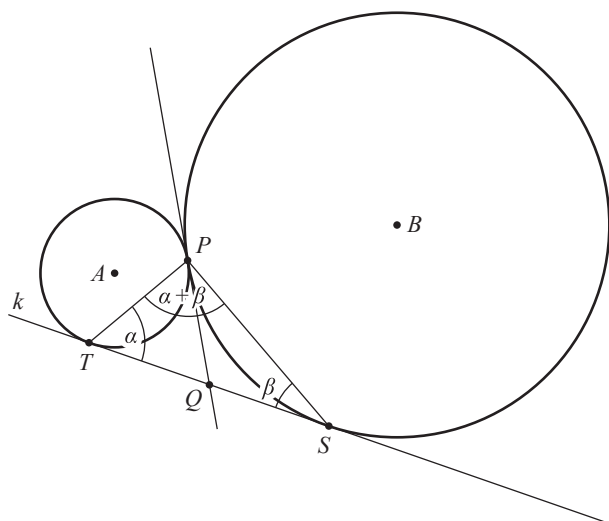
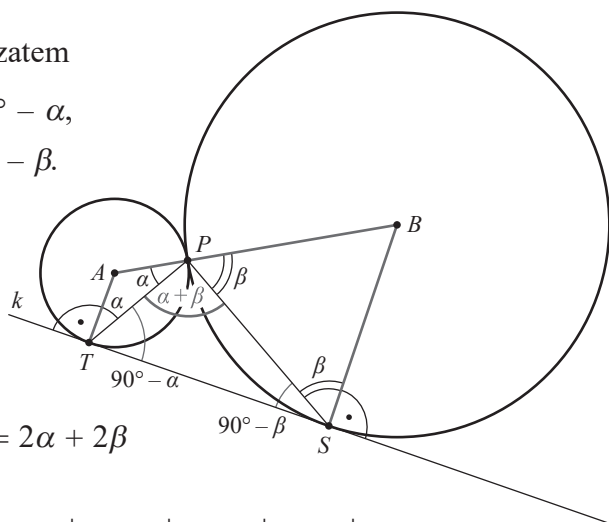
Koniec dowodu.

Dowód 3:

► Krok 1. Prowadzimy styczną wewnętrzną do danych okręgów w punkcie P . Ta styczna przecina odcinek TS w punkcie Q . Powstają dwa trójkąty równoramienne PTQ oraz PQS (Fakt 13.2).

► Krok 2. Z twierdzenia o sumie kątów w trójkącie PTS mamy $2\alpha + 2\beta = 180^\circ$, stąd $\alpha + \beta = 90^\circ$, czyli $|\angle TPS| = 90^\circ$.

Koniec dowodu.



Stąd

$$|\angle APB| = 180^\circ = |\angle APT| + |\angle APT| + |\angle BPS| + |\angle BPS| = 2|\angle APT| + 2|\angle BPS|, \text{ zatem } |\angle TPR| + |\angle RPS| = 90^\circ, \text{ czyli } |\angle TPS| = 90^\circ.$$

Koniec dowodu.

Dowód 2:

Krok 1. Oznaczamy

$$|\angle ATP| = \alpha \text{ i } |\angle BSP| = \beta, \text{ zatem}$$

$$|\angle APB| = \alpha \text{ i } |\angle PTS| = 90^\circ - \alpha,$$

$$|\angle SPB| = \beta \text{ i } |\angle PST| = 90^\circ - \beta.$$

Krok 2. Z twierdzenia

o sumie kątów w trójkącie PTS wynika, że

$$|\angle TPS| = \alpha + \beta.$$

Ponadto

$$|\angle APB| = \alpha + (\alpha + \beta) + \beta = 2\alpha + 2\beta$$

$$\text{ i } |\angle APB| = 180^\circ.$$

Wynika z tego, że $|\angle TPS| = 0,5 \cdot |\angle APB|$, czyli $|\angle TPS| = 90^\circ$.

Koniec dowodu.

Dowód 3:

Krok 1. Prowadzimy

styczną wewnętrzną do danych okręgów w punkcie P . Ta styczna przecina odcinek TS w punkcie Q . Powstają dwa trójkąty równoramienne PTQ oraz PQS (Fakt 13.2).

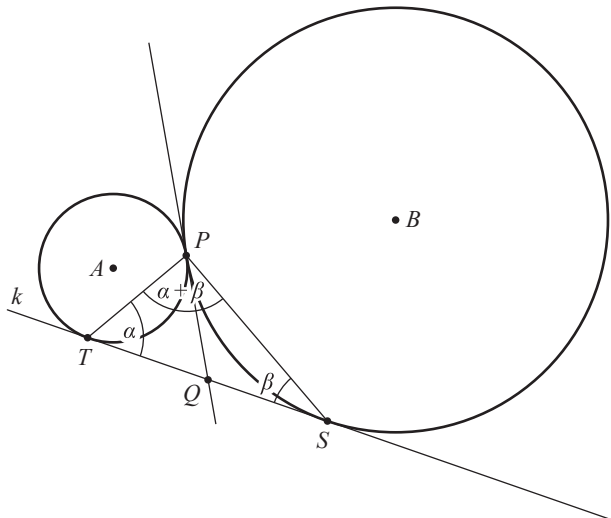
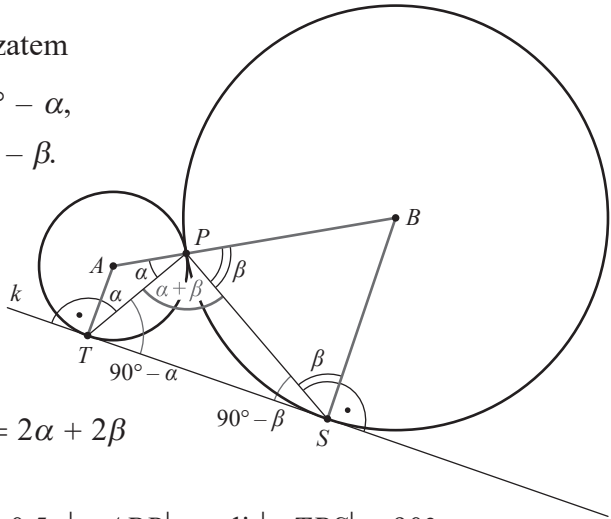
Krok 2. Z twierdzenia

o sumie kątów w trójkącie PTS mamy

$$2\alpha + 2\beta = 180^\circ, \text{ stąd}$$

$$\alpha + \beta = 90^\circ, \text{ czyli } |\angle TPS| = 90^\circ.$$

Koniec dowodu.



MATEMATYCZNY SZLIF

Zestawy powtórzeniowe do matury

Poziom podstawowy

Matura
od 2025 r.

NOWOŚĆ



Mariola Dąbek-Nagacz, Agnieszka Adamska, Ewa Banaszek,
Elżbieta Gaj, Edyta Kapral, Beata Kowalska, Iwona Milcarz



format 205 x 292 mm
stron 120

Spis treści

Wstęp	5
-----------------	---

Część 1. Zestawy zadań powtórzeniowych

Zestaw 1A. Liczby rzeczywiste	7
Zestaw 1B. Liczby rzeczywiste	10
Zestaw 2A. Wyrażenia algebraiczne	12
Zestaw 2B. Wyrażenia algebraiczne	15
Zestaw 3A. Równania i nierówności	18
Zestaw 3B. Równania i nierówności	20
Zestaw 4A. Układy równań, funkcje cz. 1.	22
Zestaw 4B. Układy równań, funkcje cz. 1.	25
Zestaw 5A. Funkcje cz. 2.	28
Zestaw 5B. Funkcje cz. 2.	31
Zestaw 6A. Ciągi liczbowe	34
Zestaw 6B. Ciągi liczbowe	36
Zestaw 7A. Trygonometria	38
Zestaw 7B. Trygonometria	41
Zestaw 8A. Planimetria	44
Zestaw 8B. Planimetria	47
Zestaw 9A. Geometria analityczna	50
Zestaw 9B. Geometria analityczna	52
Zestaw 10A. Stereometria	54
Zestaw 10B. Stereometria	56
Zestaw 11A. Kombinatoryka, prawdopodobieństwo i statystyka	58
Zestaw 11B. Kombinatoryka, prawdopodobieństwo i statystyka	61

Zestawy zadań powtórzeniowych – odpowiedzi do zadań zamkniętych oraz przykładowe zasady oceniania rozwiązań zadań otwartych

Zestaw 1A. Liczby rzeczywiste	65
Zestaw 1B. Liczby rzeczywiste	66
Zestaw 2A. Wyrażenia algebraiczne	66
Zestaw 2B. Wyrażenia algebraiczne	67
Zestaw 3A. Równania i nierówności	68
Zestaw 3B. Równania i nierówności	69
Zestaw 4A. Układy równań, funkcje cz. 1.	70
Zestaw 4B. Układy równań, funkcje cz. 1.	71
Zestaw 5A. Funkcje cz. 2.	72
Zestaw 5B. Funkcje cz. 2.	73

Zestaw 6A. Ciągi liczbowe	73
Zestaw 6B. Ciągi liczbowe	74
Zestaw 7A. Trygonometria	75
Zestaw 7B. Trygonometria	76
Zestaw 8A. Planimetria	77
Zestaw 8B. Planimetria	78
Zestaw 9A. Geometria analityczna	79
Zestaw 9B. Geometria analityczna	80
Zestaw 10A. Stereometria	81
Zestaw 10B. Stereometria	82
Zestaw 11A. Kombinatoryka, prawdopodobieństwo i statystyka	83
Zestaw 11B. Kombinatoryka, prawdopodobieństwo i statystyka	84

Część 2. Zestawy zadań powtórzeniowych na rok przed maturą

Zestaw 1A.	85
Zestaw 1B.	89
Zestaw 2A.	93
Zestaw 2B.	96
Zestaw 3A.	99
Zestaw 3B.	102

Zestawy zadań powtórzeniowych na rok przed maturą – odpowiedzi do zadań zamkniętych oraz przykładowe zasady oceniań rozwiązań zadań otwartych

Zestaw 1A.	105
Zestaw 1B.	105
Zestaw 2A.	106
Zestaw 2B.	107
Zestaw 3A.	109
Zestaw 3B.	111

Część 3. Wymagania egzaminacyjne

Wymagania egzaminacyjne od roku 2025 – zakres podstawowy	113
--	-----

Wstęp

„Matematyczny szlif” powstał z potrzeby chwili – w 2021 r. Centralna Komisja Egzaminacyjna opublikowała informator maturalny z matematyki na poziomie podstawowym, w którym pojawiły się nowe typy zadań. Egzamin maturalny w nowej formule stanowił dla uczniów i nauczycieli wyzwanie, które wymagało pilnej reakcji.

Zainspirowane potrzebami naszych uczniów, stworzyliśmy autorskie zadania, odpowiadające nowym wymaganiom egzaminacyjnym. Bazowałyśmy na przykładach z informatora, aby efektywnie wspierać maturzystów w przygotowaniach. Dzięki wspólnemu wysiłkowi powstało **11 zestawów zadań powtórzeniowych** (część 1. książki), każdy w dwóch wersjach, które obecnie – po zaktualizowaniu – obejmują cały zakres wymagań do egzaminu maturalnego od roku 2025. Każdy zestaw zaplanowano na 1 godzinę lekcyjną. Pierwszą wersję uczniowie mogą rozwiązywać wspólnie z nauczycielem, a drugą – samodzielnie. Zestawy te mogą też być przeznaczone na sprawdziany powtórzeniowe, w ramach klasycznego systemu oceniania.

Część 2. książki stanowią **3 zestawy zadań sprawdzających**, także w dwóch wersjach. Każdy zestaw zaplanowano na 2 godziny lekcyjne. Zadania tu zawarte nie wyczerpują pełnego zakresu materiału wymaganego do matury – dotyczą zagadnień możliwych do omówienia na rok przed egzaminem maturalnym. Polecamy je zatem uczniom klas trzecich liceów i klas czwartych techników. Zestaw 3A i 3B został skonstruowany na wzór arkusza maturalnego – może być świetnym materiałem do organizacji próbnej matury.

Do zadań zamkniętych, zawartych w części 1. i 2., podajemy klucze odpowiedzi, a do zadań otwartych – przykładowe schematy oceniania.

Część 3. zawiera wymagania egzaminacyjne na poziomie podstawowym, które będą obowiązywać uczniów od maja 2025 r.

W podstawie programowej zbiory liczbowe są oznaczone następująco: **N, Z, Q, R**. W naszej książce stosujemy nieco inny zapis: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, wzorując się na arkuszach maturalnych CKE. Chcemy bowiem oswoić uczniów z oznaczeniami, z jakimi zetkną się na maturze.

Mamy nadzieję, że zaproponowane przez nas zadania staną się cennym wsparciem w przygotowaniu do egzaminu maturalnego z matematyki i przyczynią się do sukcesu każdego ucznia. Życzymy owocnej pracy oraz satysfakcji z nauki.

Autorki

Zestaw 8A. Planimetria

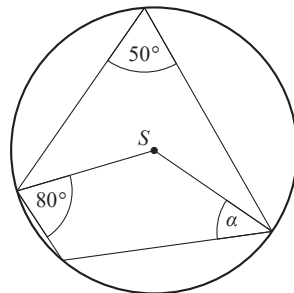
Zadanie 1. (0-1)

W okręgu o środku w punkcie S zaznaczono kąty (zobacz rysunek).

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Zaznaczony na rysunku kąt α ma miarę

- A. 60° B. 70°
C. 50° D. 40°



Zadanie 2. (0-1)

Czworokąt F_1 jest podobny do czworokąta F_2 . Pole czworokąta F_1 jest równe 90 cm^2 , a pole czworokąta F_2 jest równe 30 cm^2 .

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Skala podobieństwa czworokąta F_2 do czworokąta F_1 jest równa

- A. 3 B. 9 C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{1}{3}$

Zadanie 3. (0-2)

Boki prostokąta są równe a i b . Bok długości a zwiększono o 10%, a bok długości b zmniejszono o 20%.

Dokończ zdanie. Wybierz dwie odpowiedzi, tak aby dla każdej z nich dokończenie zdania było prawdziwe.

Pole otrzymanego prostokąta

- A. jest równe $1,1ab$. B. zmniejszy się o 12%. C. jest równe $0,9ab$.
D. zwiększy się o 8%. E. zwiększy się o 10%. F. jest równe $0,88ab$.

Zadanie 4. (0-1)

Trójkąt ABC o bokach długości 3, 8, 7 jest podobny do trójkąta DEF . Pole trójkąta DEF jest cztery razy większe od pola trójkąta ABC .

Uzupełnij zdanie. Wpisz odpowiednie wyrażenie w wy kropkowanym miejscu, tak aby zdanie było prawdziwe.

Obwód trójkąta DEF jest równy

Zadanie 5. (0-2)

Dany jest romb o boku długości 8 cm i kącie rozwartym o mierze 120° .

Dokończ zdania. Wybierz odpowiedź spośród A–C oraz odpowiedź spośród D–F.

1. Długość krótszej przekątnej tego rombu jest równa

- A. 4 cm B. $8\sqrt{2}$ cm C. 8 cm

2. Pole tego rombu jest równe

- D. 32 cm^2 E. $64\sqrt{3} \text{ cm}^2$ F. $32\sqrt{3} \text{ cm}^2$

Zadanie 6. (0-2)

Dane są trzy trójkąty (zobacz rysunek).

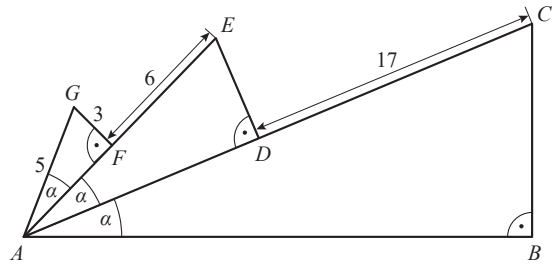
Dokończ zdania. Wybierz odpowiedź spośród A–D oraz odpowiedź spośród E–H.

1. Obwód trójkąta ADE jest równy

- A. 12 B. 24
C. 25 D. 60

2. Pole koła wpisanego w trójkąt o największym polu jest równe

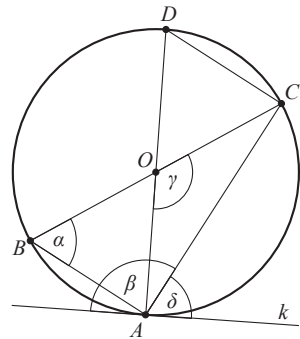
- E. 20π F. 2π G. 25π H. 4π

**Zadanie 7. (0-1)**

Punkty A, B, C, D leżą na okręgu o środku O . Punkty B, O, C są współliniowe. Prosta k jest styczna do okręgu w punkcie A . Na rysunku zaznaczono kąty: $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Miara kąta α jest równa 38° (zobacz rysunek).

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe albo F – jeśli zdanie jest fałszywe.

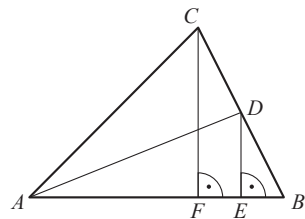
1.	Miara kąta γ jest równa 76° .	P	F
2.	Miara kąta β jest równa 142° .	P	F

**Zadanie 8. (0-1)**

W trójkącie ABC długości boków AB i BC są odpowiednio równe 8 cm i 12 cm. Odcinek AD jest środkową trójkąta ABC , punkty F, E należą do odcinka AB oraz $CF \perp AB$ i $DE \perp AB$ (zobacz rysunek). Pole trójkąta ABC jest równe 16 cm^2 .

Wybierz odpowiedź A albo B oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3.

Wysokość DE trójkąta ABD jest równa 2 cm.



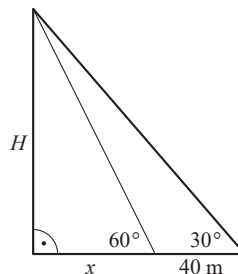
A.	Tak,	ponieważ	1.	$\frac{ DE }{ EB } = \frac{ CF }{ FB } = 2.$
			2.	$\frac{ BD }{ DE } = \frac{ BC }{ CF } = 2.$
B.	Nie,		3.	$\frac{ DE }{ CF } = \frac{ BD }{ BC } = \frac{1}{2}.$

2 punkty – zapisanie równań wynikających z treści zadania:

$$\frac{H}{x+40} = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ oraz } \frac{H}{x} = 1.$$

1 punkt – sporządzenie rysunku oraz zapisanie co najmniej jednego z równań wynikających z treści zadania:

$$\frac{H}{x+40} = \operatorname{tg} 30^\circ \text{ lub } \frac{H}{x} = \operatorname{tg} 45^\circ.$$



Zestaw 8A. Planimetria

Zadanie	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
Odpowiedź	C.	C.	B. F.	36	1.C. 2.F.	1.B. 2.G.	1.P 2.P	A.3.
Punkty	1	1	2	1	2	2	1	1

Zadanie 9. (0-2)

2 punkty – pełne rozwiązanie; obliczenie pola zacieniowanej figury:

$$P = P_w - P_{DEF} = (16\pi - 12\sqrt{3}) \text{ cm}^2.$$

1 punkt – obliczenie pola wycinka koła ODF : $P_w = 16\pi \text{ cm}^2$ lub pola trójkąta DEF :

$$P_{DEF} = 12\sqrt{3} \text{ cm}^2.$$

Zadanie 10. (0-3)

3 punkty – pełne rozwiązanie, zapisanie stosunku $\frac{r}{R}$:

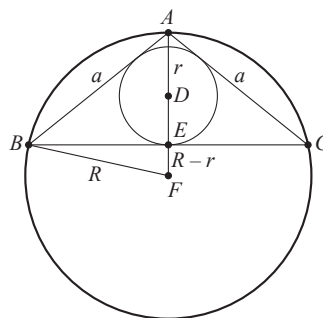
$$\frac{r}{R} = \frac{2\sqrt{3}-3}{2}.$$

2 punkty – zapisanie promienia R i r w zależności od

$$\text{wysokości } h: R = 2h \text{ i } r = \frac{\sqrt{3}h}{\sqrt{3}+2}.$$

1 punkt – zapisanie promienia R lub r w zależności od

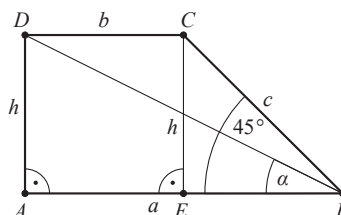
$$\text{wysokości } h: R = 2h \text{ lub } r = \frac{\sqrt{3}h}{\sqrt{3}+2}.$$



Zadanie 11. (0-4)

4 punkty – pełne rozwiązanie, obliczenie obwodu trapezu: $24 + 4\sqrt{2}$.

3 punkty – podstawienie $b = 2h$ do wzoru na pole trapezu i obliczenie h , c , b : $h = 4$, $c = 4\sqrt{2}$ oraz $b = 8$.



Matura
od 2025 r.

Zbiór zadań z matematyki

[illegible]

54

SPIS TREŚCI

Wstęp	4
1. Funkcja kwadratowa	5
2. Wielomiany	7
3. Funkcja wymierna, wykładnicza i logarytmiczna	9
4. Trygonometria	11
5. Wartość bezwzględna	13
6. Ciągi liczbowe	15
7. Granica ciągu, suma szeregu nieskończonego	17
8. Planimetria	20
9. Stereometria	23
10. Geometria analityczna	25
11. Kombinatoryka	27
12. Rachunek prawdopodobieństwa	29
13. Dowody algebraiczne	32
14. Dowody geometryczne	34
15. Granice. Pochodna	37
16. Optymalizacja	39
17. Liczby, logarytmy i inne	42

Odpowiedzi i rozwiązania

1. Funkcja kwadratowa	47
2. Wielomiany	54
3. Funkcja wymierna, wykładnicza i logarytmiczna	59
4. Trygonometria	67
5. Wartość bezwzględna	74
6. Ciągi liczbowe	86
7. Granica ciągu, suma szeregu nieskończonego	93
8. Planimetria	103
9. Stereometria	115
10. Geometria analityczna	126
11. Kombinatoryka	137
12. Rachunek prawdopodobieństwa	144
13. Dowody algebraiczne	152
14. Dowody geometryczne	157
15. Granice. Pochodna	166
16. Optymalizacja	176
17. Liczby, logarytmy i inne	190

Wstęp

Tryptyk to rodzaj dzieła sztuki, które składa się z trzech części: centralnego panelu oraz dwóch bocznych skrzydeł. Tryptyki są najczęściej spotykane w malarstwie, ale mogą również występować w innych formach sztuki, takich jak rzeźba czy fotografia.

I taki właśnie jest nasz zbiór: **PRZEDMATURALNY TRYPTYK ZADANIOWY**. Każda z trzech części jest ważna, ale ta środkowa wydaje się być najważniejsza. Tryptyk adresujemy do nauczycieli i ich uczniów, wspólnie pracujących nad przygotowaniem do egzaminu maturalnego z matematyki na poziomie rozszerzonym.

Materiał zadaniowy podzieliliśmy na 17 rozdziałów. Każdy z nich składa się z trzech części.

Część 1., czyli **zadania na rozgrzewkę**, to bardzo typowe zadania, będące swego rodzaju wizytówką poziomu rozszerzonego. Każdy uczeń, wyrażający gotowość zdawania matury na poziomie rozszerzonym, powinien sobie poradzić z takimi zadaniami.

Część 2., czyli **zadania właściwe**, to nasze typy maturalne. Według nas, trzech autorów, tego typu zadań możemy spodziewać się na egzaminie maturalnym z matematyki na poziomie rozszerzonym.

Część 3., czyli **zadania o podwyższonym stopniu trudności**, to już całkiem inna historia. Są to zadania przeznaczone dla uczniów o bardzo wysokich kompetencjach matematycznych, dla „olimpijczyków” oraz osób szczególnie zainteresowanych matematyką. Zdecydowanie wykraczają one poza podstawę programową.

Zadania z części 1. naszego TRYPTYKU posiadają odpowiedzi, czasami wskazówki do rozwiązań. Zadania z części 2. i 3. są dodatkowo wyposażone w pełne rozwiązania. Mogą one stanowić dla Czytelników cenne źródło wskazówek i inspiracji do samodzielnego odkrywania matematyki i sztuki rozwiązywania zadań.

Mamy nadzieję, że nasz zbiór pomoże każdemu z Was w osiągnięciu wymarzonego sukcesu na maturze – na miarę Waszych możliwości i wysiłku włożonego w przygotowania. Powodzenia!

Autorzy

2. Wielomiany

Zadania na rozgrzewkę

Zadanie 2.1.

Dla jakich wartości parametrów m i n wielomian W określony wzorem

$$W(x) = x^4 - 5x^3 + 9x^2 + mx + n$$

jest podzielny przez trójmian $x^2 - x - 2$?

Zadanie 2.2.

Wyznacz zbiór wszystkich liczb całkowitych nieujemnych spełniających nierówność

$$x^3 + 23x \leq 9x^2 + 15.$$

Zadanie 2.3.

Dane jest równanie $(x+1)(mx^2 - mx + 2) = 0$ o niewiadomej x .

Przeprowadź dyskusję rozwiązalności równania w zależności od wartości parametru m .

Zadania właściwe

Zadanie 2.4.

Wyznacz wszystkie wartości parametru a , $a \in \mathbb{R}$, dla których wielomian

$$W(x) = (x^2 - 4)(x^2 + (a - 2)x + 1)$$

ma cztery różne pierwiastki.

Zadanie 2.5.

Wyznacz wszystkie wartości parametrów a i b , gdzie $a, b \in \mathbb{R}$, dla których wielomian

$$W(x) = x^3 + ax^2 + b$$

ma trzy pierwiastki x_1, x_2, x_3 takie, że $x_1 = x_2 = x_3 + 1$.

Zadanie 2.6.

Wielomian $W(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, gdzie a, b, c , są pewnymi liczbami rzeczywistymi, ma trzy pierwiastki rzeczywiste, które są kolejnymi wyrazami pewnego ciągu geometrycznego. Udowodnij, że $b^3 = ca^3$.

Zadania o podwyższonym stopniu trudności**Zadanie 2.7.**

Wyznacz sumę współczynników wielomianu

$W(x) = (x^3 - x + p)^q + (px^2 - x + 1)^r$ wiedząc, że p, q i r są trzema liczbami pierwszymi, których iloczyn równy jest ich pięciokrotnej sumie oraz $p < q < r$.

Zadanie 2.8.

Wyznacz zbiór wartości parametru m , dla których równanie $mx^3 + 1 = (m + 1)x^2$ o niewiadomej rzeczywistej x , ma trzy różne rozwiązania.

Zadanie 2.9.

Wyznacz współczynniki wielomianu $W(x) = x^3 - px^2 + qx - r$ tak, aby jego pierwiastkami były liczby p, q, r .



2. Wielomiany

Odpowiedzi i rozwiązania

Zadanie 2.1.

Odpowiedź: $m = 1, n = -14$

Zadanie 2.2.

Odpowiedź: $\{0, 1, 3, 4, 5\}$

Zadanie 2.3.

Odpowiedź:

1 rozwiązanie, gdy $m \in [0, 8)$;

2 rozwiązania, gdy $m = -1$ i $m = 8$;

3 rozwiązania, gdy $m \in (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (8, +\infty)$.

Zadanie 2.4.

Odpowiedź: $a \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}, 0\right) \cup \left(4, \frac{9}{2}\right) \cup \left(\frac{9}{2}, +\infty\right)$.

Rozwiązanie

Dla każdej liczby rzeczywistej a liczby -2 i 2 są pierwiastkami wielomianu W .

Liczba pierwiastków wielomianu $P(x) = x^2 + (a - 2)x + 1$ zależy od wyróżni-

ka $\Delta = (a - 2)^2 - 4 = a^2 - 4a$

Gdy $\Delta > 0$, czyli dla $a \in (-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$ wielomian P ma dwa różne pierwiastki. Sprawdźmy dla jakich wartości parametru a pierwiastkami wielomianu P są liczby -2 oraz 2 .

$$P(-2) = 4 - 2a + 4 + 1 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{9}{2}$$

$$P(2) = 4 + 2a - 4 + 1 = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}$$

Wobec tego otrzymujemy rozwiązanie

$$a \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}, 0\right) \cup \left(4, \frac{9}{2}\right) \cup \left(\frac{9}{2}, +\infty\right).$$

Zadanie 2.5.

Odpowiedź: $a = 1$ i $b = 0$ lub $a = -1$ i $b = \frac{4}{27}$.

Rozwiązanie

Niech $x_1 = x_2 = p$.

Wtedy $x_3 = p - 1$ oraz wielomian można zapisać w postaci

$$W(x) = (x - p)^2(x - p + 1)$$

Po przekształceniu otrzymujemy

$$W(x) = x^3 + (-3p + 1)x^2 + (3p^2 - 2p)x + p^2(1 - p)$$

Zatem

$$\begin{cases} 3p^2 - 2p = 0 \\ a = -3p + 1 \\ b = p^2(1 - p) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = 0 \\ a = 1 \text{ lub} \\ b = 0 \end{cases} \begin{cases} p = \frac{2}{3} \\ a = -1 \\ b = \frac{4}{27} \end{cases}$$

Dla $a = 1$ i $b = 0$ wielomian $W(x) = x^3 + x^2 = x^2(x + 1)$ ma pierwiastki

$$x_1 = x_2 = 0, x_3 = -1.$$

Dla $a = -1$ i $b = \frac{4}{27}$ wielomian $W(x) = x^3 - x^2 + \frac{4}{27} = \left(x - \frac{2}{3}\right)^2 \left(x + \frac{1}{3}\right)$ ma

$$\text{pierwiastki } x_1 = x_2 = \frac{2}{3}, x_3 = -\frac{1}{3}.$$

Zadanie 2.6.**Rozwiązanie**

Niech liczby p, pq, pq^2 będą pierwiastkami wielomianu W .

$$\text{Wtedy } W(x) = (x - p)(x - pq)(x - pq^2)$$

Po przekształceniu otrzymujemy

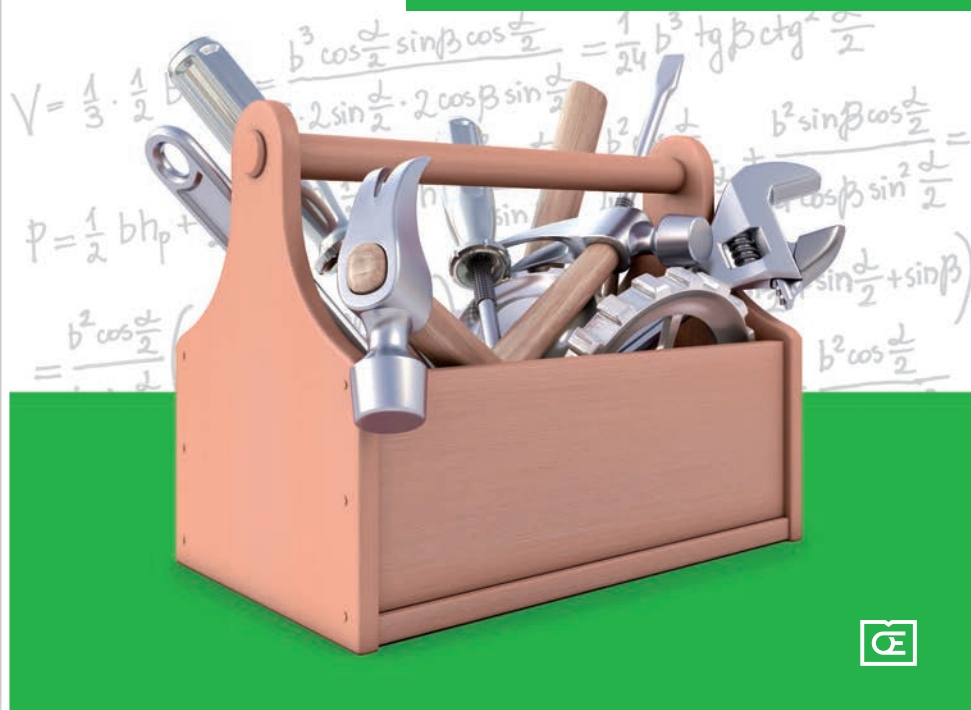
$$W(x) = x^3 - (p + pq + pq^2)x^2 + (p^2q + p^2q^2 + p^2q^3)x - p^3q^3$$

Dorota Nowak, Iwona Palarczyk, Tomasz Szwed



Typologia zadań maturalnych Z **MATEMATYKI**

POZIOM PODSTAWOWY



format 165 x 235 mm
stron 160

Spis treści

Wstęp	5
1. Liczby i działania na nich	7
2. Logarytmy i obliczenia procentowe	13
3. Wyrażenia algebraiczne	18
4. Wartość bezwzględna i własności funkcji	24
5. Funkcja liniowa	33
6. Równania, nierówności, układy liniowe	43
7. Własności funkcji kwadratowej	49
8. Nierówności kwadratowe	56
9. Wielomiany	62
10. Wyrażenia wymierne, równania wymierne	69
11. Ciągi liczbowe – pojęcia podstawowe	75
12. Ciąg arytmetyczny i ciąg geometryczny	82
13. Planimetria cz. 1. Pola i obwody figur	89
14. Planimetria cz. 2. Twierdzenie cosinusów, twierdzenie o dwusiecznej	95
15. Planimetria cz. 3. Kąty w kole i twierdzenia Talesa	102
16. Trygonometria	111
17. Geometria analityczna	117
18. Stereometria	123
19. Statystyka	129
20. Kombinatoryka	134
21. Rachunek prawdopodobieństwa	140
Odpowiedzi	146

Wstęp

Oddajemy do rąk Uczniów i Nauczycieli „Typologię zadań maturalnych”. Jakie są podstawy takiego podejścia do zadań i arkusza maturalnego od 2023 roku? Zaczniemy od początku.

W arkuszu egzaminacyjnym jest od 29 do 40 zadań. Znajdują się w nim zarówno zadania zamknięte, jak i otwarte. Arkusz egzaminacyjny nie jest podzielony – tak jak arkusz w formule 2015 – na dwie części: z zadaniami zamkniętymi i otwartymi. W arkuszu egzaminacyjnym występują wiązki zadań lub pojedyncze zadania. Może ich być **co najmniej 13 typów zadań!** (do 2022 roku były tylko 3). Oto wykaz typów zadań maturalnych na poziomie podstawowym.

1. Zdający wybiera jedną odpowiedź spośród A-D.
2. Zdający wybiera jedną odpowiedź spośród A-C oraz jedno uzasadnienie tej odpowiedzi spośród 1.-3. (ale tabelka może mieć różne rozmiary, np. 2×2 , 2×3).
3. Zdający wybiera dwie odpowiedzi spośród A-F.
4. Zdający wybiera dwie odpowiedzi spośród A-G.
5. Zdający wybiera jedną odpowiedź spośród A-C oraz jedną odpowiedź spośród D-F.
6. Zdający wybiera jedną odpowiedź spośród A-D oraz jedną odpowiedź spośród E-H.
7. Zdający ocenia prawdziwość zdań (lub dokończeń zdań).
8. Zdający dobiera/przyporządkowuje/zestawia odpowiedź (spośród podanych) do określonych sytuacji/obiektów/elementów.
9. Zadanie otwarte za 1 punkt – wykropkowane z miejscem do uzupełnienia lub krótkie zadanie.
10. Zadanie otwarte za 2 punkty.
11. Zadanie otwarte za 3 punkty.
12. Zadanie otwarte za 4 punkty.
13. **WIĄZKA** zadań to **zestaw od dwóch do czterech zadań** występujących we wspólnym kontekście tematycznym, przy czym każde z zadań można rozwiązać **niezależnie** od rozwiązania innych zadań w danej wiązce. Wiazka zadań **może** się składać zarówno z zadań zamkniętych, jak i z zadań otwartych.

Skąd zatem wzięło się wyrażenie co najmniej 13 typów zadań?

„Zaprezentowane w Informatorze zadania **nie wyczerpują wszystkich typów zadań**, które mogą wystąpić w arkuszu egzaminacyjnym.” – i to właśnie zdanie z Informatora Centralnej Komisji Egzaminacyjnej jest głównym powodem napisania „Typologii zadań maturalnych”.

Nasz zbiór zawiera materiał nauczania matematyki w liceum i w technikum w zakresie podstawowym. Materiał ten jest poukładany według treści z podstawy programowej. Każdy rozdział zawiera co najmniej 20 zadań, różnych pod względem typów. Staraliśmy się być twórczy. Ułożyliśmy również zadania innych typów. Przykładem może być zadanie typu Rozwiąż analogicznie, czy też zadanie z kodowaną odpowiedzią.

Bardzo nam zależy, aby „Typologia zadań maturalnych” stała się bazą do ćwiczeń i okazją do oswojenia się z tak dużą różnorodnością zadań. W naszym przekonaniu właśnie ta różnorodność sprawia, że matura z matematyki od 2023 jest egzaminem innym i dużo trudniejszym. Dlatego warto ćwiczyć, trenować i nabierać doświadczenia rachunkowego.

Zachęcamy Czytelników do uważnego czytania instrukcji i poleceń. Bądźcie czujni i nie dajcie się zaskoczyć. Niespodzianki znajdziecie już na początku naszego zbioru.

W czerwcu 2024 roku wprowadzono zmiany w podstawie programowej z matematyki. Kilka zagadnień już nie obowiązują. W związku z tym zadania zbudowane na tych treściach zaznaczyliśmy symbolem nożyczek ✂.

Rozwiązywać te zadania, czy nie rozwiązywać? Wybór zostawiamy Czytelnikom.

Powodzenia!
Zespół autorski

4. Wartość bezwzględna i własności funkcji

Zadanie 1. (0-1)

Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Równanie $|x + 4| = 0$

- A. nie ma rozwiązania.
- B. ma jedno rozwiązanie równe 0.
- C. ma jedno rozwiązanie będące liczbą ujemną.
- D. ma dwa rozwiązania.

Zadanie 2. (0-1)

Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Zaznacz równanie, które nie ma rozwiązania:

- A. $|2x + 13| = 0$ B. $|x + 5| = 5$ C. $|3x - 7| = 7$ D. $-2|x + 4| = 8$

Zadanie 3. (0-2)

Rozwiąż równanie $2|5 - 3x| = 14$.

Zadanie 4. (0-2)

Rozwiąż równanie $|x - 2\sqrt{5}| = 14$.



Zadanie 5. (0-1)

Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Zbiór rozwiązań nierówności $|2x + 6| \leq 10$, to:

- A. $(-8, 2)$
- B. $[-8, 2]$
- C. $(-\infty, -8) \cup (-2, +\infty)$
- D. $(-\infty, -8] \cup [-2, +\infty)$

**Zadanie 6. (0-1)**

Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wskaż nierówność, której zbiorem rozwiązań jest zbiór $(-\infty, 2) \cup (6, +\infty)$

A. $|x-4| > 2$

B. $|x-2| > 4$

C. $|x+4| > 2$

D. $|x+4| > 2$

Zadanie 7. (0-1)

Dopasuj nierówności do rysunków przedstawiających ich rozwiązania. Uzupełnij tabelkę.

A. $|x-3| < 2$

B. $|x+1| \geq 4$

C. $|x+1| \leq 4$

D. $|x+2| > 1$

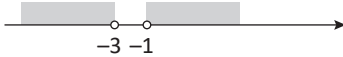
Rysunek 1



Rysunek 2



Rysunek 3



Rysunek 4



Rysunek 5



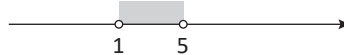
Rysunek 6



Rysunek 7



Rysunek 8



Nierówność	A	B	C	D
Rysunek				

Zadanie 8.

Oblicz wartość:

Zadanie 8.1. (0-1)

$$|3,14 - \pi| = \dots\dots\dots$$

Zadanie 8.2. (0-1)

$$|\sqrt{5} - 2| = \dots\dots\dots$$

Zadanie 8.3. (0-1)

$$|1 - 2\sqrt{3}| - |\sqrt{3} - 4| + |3\sqrt{3} + 5| = \dots\dots\dots$$

Rozdział 3. Wyrażenia algebraiczne

1. A 2. C 3. A 4. D 5. A 6. AE 7. AH 8. AE 9. PFF 10. PF 11. PF
 12. B3 13. $-5x^2$ 14. -7 15. AG 16. 1D, 2C, 3B, 4A 17. DE
 18. zadanie przez analogię 19. $(4x + 5y)(16x^2 - 20xy + 25y^2)$
 20. AC 21. CF 22. dowód 23. $(2x - 6y)(2x + 6y)$
 24. $8x^2 - 8x$ 25. $13 - 4\sqrt{3}$ 26. a) $16 + 8\sqrt{2}$ b) 216 27. $\frac{1 + \sqrt{3}}{2}$ 28. $2^{11} - 2^{18}$

Rozdział 4. Wartość bezwzględna i własności funkcji

1. C 2. D 3. $-\frac{2}{3}, 4$ 4. $8, -8 + 4\sqrt{5}$ 5. B 6. A

7.

nierówność	A	B	C	D
rysunek	8	2	6	3

- 8.1. $\pi - 3, 14$ 8.2. $\sqrt{5} - 2$ 8.3. $6\sqrt{3}$ 9. $|x - 7|$
 10. a. $x \geq -3$ b. $x \geq -4$ c. $x \leq 2$
 11. a) G, I b) D, F 12. rys. 1-C rys. 2-B rys 3.-I rys 4.-H
 13. B 14.1. $\langle -3, 7 \rangle$ 14.2. $\langle -10, 7 \rangle$ 15.1. $\langle -1, 6 \rangle$ 15.2. $\langle -4, 3 \rangle$ 16. FFP
 17.1. $x \in \{-3, 1\} \cup \langle 4, 6 \rangle$ 17.2. $x \in \langle -6, -4 \rangle \cup (-2, 0)$ 17.3. $x \in \langle 1, 6 \rangle \cup \{-3\}$
 18. D 19.1. B 19.2. PFPF
 20.1.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f(x)	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0

- 20.2. nieskończenie wiele 21. B, D
 22.1. $f(4) = 2, f(-1) = 5, f(0) = 5, f(1024) = 10$ 22.2. $x \in \{-2, 1, 16\}$
 23.1. $f(-1) = 1, f(1,5) = 1, f(5,9) = -1, f(100) = -1$ 23.2. $x \in (2, 6)$ 23.3. wykres
 24.1. $\langle -4, 2 \rangle, \langle 6, 9 \rangle$ 24.2. $\langle -6, -2 \rangle$

Rozdział 5. Funkcja liniowa

1. C 2. B 3. $x > 3$ 4. 7 5. AE 6. PPF 7. AH 8. FP 9. $[-8, 10]$
 10. dowód 11. FF 12. FPPP 13. A2 14. D 15. D
 16. a) $\sqrt{5}$ b) $-\sqrt{15}$ c) tak 17. BCE

MATEMATYKA

Matura
od 2023 r.

Porady i wskazówki których nie ma w tablicach maturalnych



215 przykładów
141 wskazówek
10 działów programowych

Tomasz Grębski



format 205 x 292 mm
stron 140

Spis treści

Wstęp	4
Symbolle używane w książce	5
I. Liczby rzeczywiste, zbiory, wyrażenia algebraiczne.....	6
II. Równania, nierówności i układy równań.....	24
III. Funkcje i ich własności	41
IV. Ciągi liczbowe i szeregi.....	66
V. Trygonometria.....	72
VI. Planimetria.....	81
VII. Stereometria.....	104
VIII. Geometria analityczna.....	118
IX. Rachunek różniczkowy	125
X. Rachunek prawdopodobieństwa.....	136

Wstęp

Podczas nauki matematyki uczniowie często korzystają z tzw. tablic maturalnych, czyli „Wybranych wzorów matematycznych” opracowanych przez Centralną Komisję Egzaminacyjną. Wiele uczniów, a w szczególności maturzystów, podczas wprowadzania różnych zagadnień matematycznych pyta mnie: „czy to jest w tablicach maturalnych?”.

Jeśli okazuje się, że jest, to widzę w ich oczach spokój, ale jeśli odpowiadam, że nie ma, to widzę pewne przerażenie, szczególnie kiedy podkreślam, że to bardzo ważne zagadnienie maturalne. Wtedy uczniowie znowu pytają: „czy mogę im podać te ważne rzeczy, których nie ma w tablicach maturalnych, a które są szczególnie ważne i często bywają na maturze?”.

Książka „Porady i wskazówki, których nie ma w tablicach maturalnych” jest właśnie odpowiedzią na takie pytania, kierowaną zwłaszcza do maturzystów, aby mogli lepiej przygotować się do egzaminu. Powstała ona na podstawie mojego wieloletniego doświadczenia w nauczaniu matematyki, jak również wieloletniego doświadczenia w sprawdzaniu prac maturalnych (jako egzaminatora i weryfikatora). Książka zawiera bardzo przydatne porady i wskazówki – i co ważne – wraz z przykładami ich zastosowania. Każdy maturzysta powinien je znać i umieć zastosować, jednak wiemy (myślę, że zgodzą się tu ze mną również inni nauczyciele), że spora część uczniów ich nie pamięta, a nawet niektórych nie zna. Wskazówki podzielone są tematycznie, aby łatwiej było znaleźć potrzebą poradę i przykład. W książce uwzględniono wymagania na maturę 2023!

A zatem zachęcam do poczytania „Porad i wskazówek...”, życzę przyjemnej i owocnej pracy, a przede wszystkim powodzenia na maturze!

dr Tomasz Grębski

VI. Planimetria

WSKAZÓWKA 82. LICZBA PRZEKĄTNYCH W WIELOKĄCIE

Wzór na liczbę przekątnych p w wielokącie wypukłym o n wierzchołkach (n bokach):

$$p = \frac{n(n-3)}{2}$$

Przykład 1.

Oblicz liczbę przekątnych w trzynastokącie wypukłym.

Rozwiązanie:

Wykorzystamy wzór dla $n = 13$

$$p = \frac{n(n-3)}{2} = \frac{13(13-3)}{2} = 65.$$

Przykład 2.

Czy istnieje wielokąt wypukły, który ma 50 przekątnych?

Rozwiązanie:

Wykorzystamy wzór $p = \frac{n(n-3)}{2}$ dla $p = 50$

$$50 = \frac{n(n-3)}{2} / \cdot 2$$

$$100 = n(n-3)$$

$$n^2 - 3n - 100 = 0$$

$\Delta = 409$, czyli $\sqrt{\Delta}$ jest liczbą niewymierną, więc powyższe równanie nie ma naturalnych rozwiązań. Zatem wielokąt o 50 przekątnych nie istnieje.

WSKAZÓWKA 83. SUMA KĄTÓW WEWNĘTRZNYCH WIELOKĄTA

Wzór na sumę kątów wewnętrznych S wielokąta wypukłego o n wierzchołkach (n bokach):

$$S = (n-2) \cdot 180^\circ$$

Przykład 1.

Oblicz sumę kątów wewnętrznych osiemnastokąta wypukłego.

Rozwiązanie:

$$n = 18 \text{ zatem}$$

$$S = (18-2) \cdot 180^\circ = 2880^\circ.$$

Przykład 2.

Suma kątów wewnętrznych pewnego wielokąta wypukłego wynosi 2340° . Ile boków ma ten wielokąt?

Rozwiązanie:

$$2340 = (n-2) \cdot 180^\circ / : 180^\circ$$

$$13 = n-2, \text{ czyli } n = 15.$$

WSKAZÓWKA 84. MIARA KĄTA WEWNĘTRZNEGO WIELOKĄTA FOREMNEGO

Wzór na miarę kąta wewnętrznego wielokąta foremnego o n wierzchołkach (n bokach):

$$\alpha = \frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n}$$

Przykład

Wyznacz miarę kąta wewnętrznego wielokąta foremnego, który ma 15 wierzchołków.

Rozwiązanie:

$$\alpha = \frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n} = \frac{(15-2) \cdot 180^\circ}{15} = \frac{2340^\circ}{15} = 156^\circ$$

WSKAZÓWKA 85. SUMA KĄTÓW ZEWNĘTRZNYCH WIELOKĄTA

Suma kątów zewnętrznych dowolnego wielokąta wypukłego wynosi zawsze 720° .

Przykład

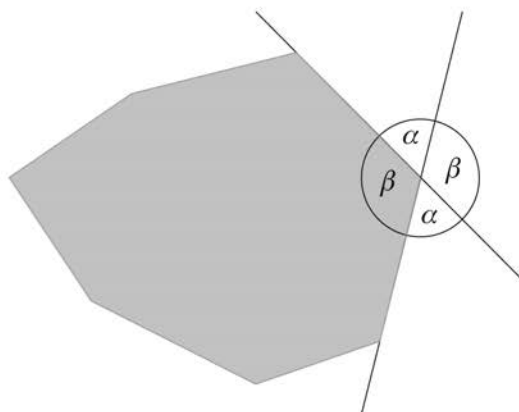
Udowodnij powyższe twierdzenie.

Rozwiązanie:

Załóżmy, że mamy n wierzchołków, czyli suma wszystkich kątów pełnych wynosi $n \cdot 360^\circ$.

Oznaczmy przez X sumę kątów zewnętrznych wielokąta.

(kąt zewnętrzny to kąt przyległy do kąta wewnętrznego – na rys. to kąt α)



$$n \cdot 360^\circ = X + 2 \cdot S, \text{ gdzie } S = (n-2) \cdot 180^\circ$$

Podstawiamy za S

$$n \cdot 360^\circ = X + 2 \cdot (n-2) \cdot 180^\circ$$

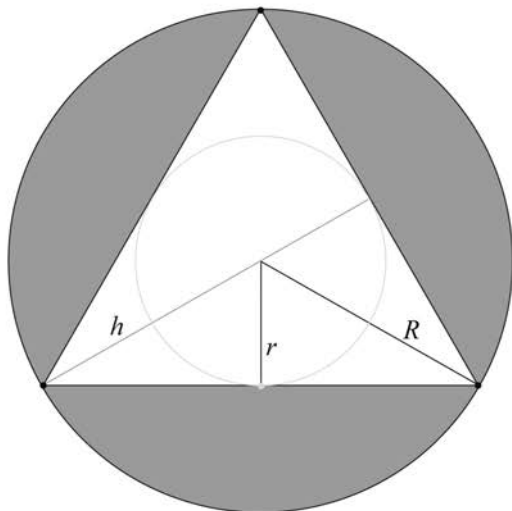
$$n \cdot 360^\circ = X + n \cdot 360^\circ - 720^\circ$$

Zatem

$$X = 720^\circ.$$

WSKAZÓWKA 86. TRÓJKĄT RÓWNOBOCZNY I OKRĄG

Trójkąt równoboczny oraz okrąg wpisany w niego i opisany na nim.



$$R = \frac{2}{3}h$$

$$r = \frac{1}{3}h$$

Przykład 1.

Oblicz pole trójkąta równobocznego jeżeli promień okręgu opisanego na tym trójkącie wynosi $6\sqrt{3}$.

Rozwiązanie:

$$P_{\Delta} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$R = 6\sqrt{3}$$

Wiemy, że

$$R = \frac{2}{3}h \text{ oraz } h = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \text{ zatem}$$

$$R = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{a\sqrt{3}}{3} = 6\sqrt{3}$$

Stąd

$$a = 18$$

Zatem

$$P_{\Delta} = \frac{18^2\sqrt{3}}{4} = 81\sqrt{3}.$$

Janusz Karkut

MATEMATYKA

w liceum i technikum

Zbiór zadań na



format 165 x 235 mm
stron 192

Spis treści

Lekcja 1	5
Lekcja 2	11
Lekcja 3	14
Lekcja 4	20
Lekcja 5	25
Drzewo ułamków	30
Lekcja 6	36
Lekcja 7	42
Lekcja 8	48
Lekcja 9	54
Lekcja 10	63
Twierdzenie Pick'a	68
Lekcja 11	77
Lekcja 12	84
Lekcja 13	91
Lekcja 14	99
Lekcja 15	104
$64 = 65?$	112
Lekcja 16	119
Lekcja 17	124
Lekcja 18	132
Lekcja 19	141
Lekcja 20	153
Wektory na płaszczyźnie	162

Żadna nauka nie wzmacnia tak wiary w potęgę umysłu ludzkiego jak matematyka.

Hugo Steinhaus

Biorąc do ręki ten wybór zadań, można zadać sobie pytanie: „Skąd ten tytuł? Dlaczego zadania na 6?”. Może dlatego, że 6 jest liczbą doskonałą, taką, która jest równa sumie wszystkich swoich dzielników, za wyjątkiem ostatniego (samej liczby). Następnymi liczbami doskonałymi są: 28, 496, 8128, 33550336, ... Obok liczb doskonałych jest jeszcze wiele innych liczb o ciekawych własnościach: liczby Fibonacciego, Catalana itd. Ta paralela (również podczas rozwiązywania zadań) może być podstawą do zaproponowania uczniom projektu jako metody nauczania. Taką możliwość eksponują wplecione w zbiór cztery artykuły.

Nauczyciele powinni dostarczać swoim najlepszym uczniom interesujących i trudnych zadań, które pomogą im wciąż dostrzegać magię w matematyce. Zadania zamieszczone w tym zbiorze są rozwiązywane, ale są to tylko przykłady prawidłowych rozwiązań. Matematyka, jak żaden inny przedmiot, ma wyjątkową cechę: umożliwia indywidualną sprawczość – większość zadań można bowiem rozwiązać na wiele sposobów. Dodatkowo, dzięki tej własności, jeśli tylko matematyce na to pozwolimy, uczyni z nas matematycznych odkrywców; nas – nauczyciela i ucznia.

Zachęcam Was, drodzy Czytelnicy, do podjęcia samodzielnej próby znalezienia własnych metod rozwiązania. Nie zniechęcajcie się, jeśli za pierwszym razem rozwiążecie samodzielnie niewiele zadań z tej książki. Zadania mają być trudne, a niektóre problemy będą wymagać od Was wielokrotnego, uważnego czytania i wielu prób ich rozwiązań, nawet w ciągu kilku miesięcy. Zalecam czytanie rozwiązań, nawet jeśli zadanie zostanie rozwiązane poprawnie. Czytanie tekstu rozwiązania też jest nauką. Śledząc metodę rozwikłania matematycznego problemu, możecie znaleźć inną strategię niż ta, której użyliście do rozwiązania danego zadania i która będzie przydatna w innym poleceniu. Zdarzy się też tak, że uzyskacie bardziej wysmakowane i błyskotliwe rozwiązania, niż te przedstawione przez autora.

W niektórych rozwiązaniach pojawiają się obliczenia wykonane z zastosowaniem CAS GeoGebry. Jest to zabieg celowy, pokazujący, że nie trzeba tracić czasu na żmudne rachunki. Wiele wykresów (jeśli nie były głównym celem zadania) wykonałem też w GeoGebra: są precyzyjne i estetyczne. W tym miejscu wspomnę jeszcze o możliwości zmieniania zadań choćby poprzez zmianę danych lub pewnych warunków. Zapewniam, że GeoGebra jest niezastąpiona w szybkim sprawdzaniu możliwości rozwiązania.

Chciałbym, aby – dzięki tej książce – nauczyciele umieli wykorzystać drzemiący w nich dydaktyczny entzjazm mentora, a ich uczniowie – by poczuli sprawczą moc swego intelektu. Pozwólcie zatem, że zabiorę Was w świat matematycznej magii...

Autor

- 1.** Wykaż, że w dowolnym trójkącie długość każdego boku jest większa niż różnica długości dwóch pozostałych boków.

Rozwiązanie

Założenie

$$a \geq b \geq c.$$

Teza

$$a > b - c$$

$$b > a - c$$

$$c > a - b$$

Dowód

- 1) Pierwsza nierówność tezy jest natychmiastowa; jeśli $a > b$ i $a > c$, to a jest większe od ich różnicy: $a > b - c$.
- 2) Aby wykazać pozostałe nierówności tezy, wykorzystamy fakt, że w każdym trójkącie długość dowolnego boku jest mniejsza niż suma długości dwóch pozostałych. Mamy zatem:

$$b + c > a.$$

Odejmując c od obu stron tej nierówności, otrzymujemy:

$$b + c - c > a - c \rightarrow b > a - c.$$

Podobnie, odejmując b , otrzymujemy:

$$b + c - b > a - b \rightarrow c > a - b.$$

- 2.** Wyznacz resztę z dzielenia $x^{100} - 4x^{98} + 5x + 6$ przez $x^3 - 2x^2 - x + 2$.

Rozwiązanie

Dzielnikiem jest wielomian stopnia trzeciego, zatem reszta może być co najwyżej trójmianem kwadratowym $ax^2 + bx + c$. Jeśli ilorazem jest $Q(x)$, to

$$x^{100} - 4x^{98} + 5x + 6 = (x^3 - 2x^2 - x + 2)Q(x) + ax^2 + bx + c.$$

Rozkładając wielomian $x^3 - 2x^2 - x + 2$ na czynniki, otrzymujemy:

$$(x^3 - 2x^2) - (x - 2) = x^2(x - 2) - (x - 2) = (x - 2)(x - 1)(x + 1).$$

Podstawiając kolejno $x = 2, 1, -1$, otrzymujemy równania:

$$2^{100} - 4 \cdot 2^{98} + 5 \cdot 2 + 6 = 16 = 4a + 2b + c,$$

$$1^{100} - 4 \cdot 1^{98} + 5 \cdot 1 + 6 = 8 = a + b + c,$$

$$(-1)^{100} - 4 \cdot (-1)^{98} + 5 \cdot (-1) + 6 = -2 = a - b + c.$$

Rozwiązanie zadania otrzymamy, rozwiązując układ równań:

$$\begin{cases} 4a + 2b + c = 16 \\ a + b + c = 8 \\ a - b + c = -2 \end{cases}$$

$$4a + 2b + c = 16$$

$$\rightarrow 4a + 2b + c = 16$$

$$a + b + c = 8$$

$$\rightarrow a + b + c = 8$$

$$a - b + c = -2$$

$$\rightarrow a - b + c = -2$$

$$\{\$1, \$2, \$3\}$$

$$\text{Rozwiąż } \{ \{a = 1, b = 5, c = 2\} \}$$

Odpowiedź

Resztą z dzielenia

$$x^{100} - 4x^{98} + 5x + 6 \text{ przez } x^3 - 2x^2 - x + 2 \text{ jest } x^2 + 5x + 2.$$

3. Zbadaj liczbę rozwiązań układu

$$\begin{cases} ax + 2y = a \\ 8x + ay = 2a \end{cases}$$

w zależności od parametru a .

Rozwiązanie

Obliczmy wyznaczniki W, W_x, W_y .

$$W = \begin{vmatrix} a & 2 \\ 8 & a \end{vmatrix} = a^2 - 16,$$

$$W_x = \begin{vmatrix} a & 2 \\ 2a & a \end{vmatrix} = a^2 - 4a,$$

$$W_y = \begin{vmatrix} a & a \\ 8 & 2a \end{vmatrix} = 2a^2 - 8a.$$

Rozpatrzmy teraz poszczególne przypadki.

1° Jedno rozwiązanie $\Leftrightarrow W \neq 0$, czyli $a^2 - 16 \neq 0$.

Po przekształceniu, otrzymujemy:

$$(a + 4)(a - 4) \neq 0 \Leftrightarrow a \neq -4 \text{ i } a \neq 4, \text{ czyli } a \in \mathbb{R} \setminus \{-4, 4\}.$$

Wyznamy to rozwiązanie.

$$x = \frac{W_x}{W} = \frac{a^2 - 4a}{a^2 - 16} = \frac{a(a - 4)}{(a + 4)(a - 4)} = \frac{a}{a + 4},$$

$$y = \frac{W_y}{W} = \frac{2a^2 - 8a}{a^2 - 16} = \frac{2a(a - 4)}{(a + 4)(a - 4)} = \frac{2a}{a + 4}.$$

2° Nieskończenie wiele rozwiązań $\Leftrightarrow W = 0$ i $W_x = 0$, i $W_y = 0$

$$a^2 - 16 = 0 \text{ i } a^2 - 4a = 0, \text{ i } 2a^2 - 8a = 0$$

$$a \in \{-4, 4\} \text{ i } a \in \{0, 4\}, \text{ i } a \in \{0, 4\}$$

Dla $a = 4$ układ ma nieskończenie wiele rozwiązań.

3° Brak rozwiązań $\Leftrightarrow W = 0$ i $(W_x \neq 0 \text{ lub } W_y \neq 0)$

$W = 0$ dla $a = -4$; dla tego a zerem nie jest W_x i zerem nie jest W_y .

Odpowiedź

Układ równań:

- ♦ ma jedno rozwiązanie $x = \frac{a}{a + 4}$ i $y = \frac{2a}{a + 4}$ dla $a \in \mathbb{R} \setminus \{-4, 4\}$;
- ♦ ma nieskończenie wiele rozwiązań dla $a = 4$;
- ♦ nie ma rozwiązań dla $a = -4$.

Ryszard Pagacz

Mała Olimpiada
MATEMATYCZNA

**Zadania konkursowe
z rozwiązaniami**

Tom 1.
ALGEBRA

Ryszard Pagacz

Mała Olimpiada
MATEMATYCZNA

**Zadania konkursowe
z rozwiązaniami**

Tom 2.
GEOMETRIA

format 165 x 235 mm
stron 312

WSTĘP

W roku szkolnym 2021/2022 na Opolszczyźnie odbyły się LIV zawody Małej Olimpiady Matematycznej. Jest to jeden z najdłużej istniejących regionalnych konkursów matematycznych dla młodzieży szkół ponadpodstawowych w Polsce. Pierwsze zawody odbyły się w roku szkolnym 1967/1968. Zawody te od samego początku mają formułę zawodów drużynowych oraz indywidualnych. Do roku szkolnego 1977/1978 w zawodach uczestniczyli uczniowie tylko drugich klas szkół ponadpodstawowych. W latach 1978/1979 i 1979/1980 w drużynie szkolnej był również jeden uczeń klasy pierwszej. Od roku szkolnego 1980/1981 drużyna szkolna składa się z czterech uczniów dowolnej klasy.

Organizatorem Małej Olimpiady Matematycznej jest Kuratorium Oświaty w Opolu. Zadania od I do XXXV (2001/2002) Małej Olimpiady Matematycznej opracowywał zmarły w tym roku Pan Stanisław Zieleń. To wielce zasłużona postać dla opolskiej oświaty – nauczyciel, metodyk i doradca, autor podręczników do nauczania matematyki w szkołach średnich oraz różnorodnych zbiorów zadań. Od XXXVI Małej Olimpiady Matematycznej za zadania jest odpowiedzialna Komisja Konkursowa powoływana przez Kuratorium Oświaty w Opolu.

Zamieszczone zadania, oprócz walorów historycznych, mogą być świetną pomocą w przygotowaniu się do udziału w różnorodnych konkursach matematycznych. Zadania te również mogą być pomocne dla maturzystów przygotowujących się do matury z matematyki na poziomie rozszerzonym. Do wszystkich zadań dołączone są rozwiązania.

Dziękuję wszystkim, którzy mnie zachęcali do opracowania tego bogatego materiału. Szczególnie dziękuję Panu Dyrektorowi Mariuszowi Mączyńskiemu z Oficyny Pazdro oraz redaktorowi tego wydawnictwa – Panu Doktorowi Tomaszowi Szwedowi. Dziękuję również mojej Żonie, że cierpliwie i ze zrozumieniem znosi moje zaangażowanie w zadania matematyczne.

Ryszard Pagacz

Spis treści tomu 1.

Wstęp	4
1. Liczby	5
2. Równania i nierówności	53
3. Dowody nierówności	133
4. Funkcje i wielomiany	159
5. Ciągi	211
6. Trygonometria	243
7. Kombinatoryka i rachunek prawdopodobieństwa.	293
8. Granica i ciągłość oraz pochodna	323
9. Zadania różne.	339

Spis treści tomu 2.

Wstęp	4
1. Planimetria	5
2. Stereometria	235
3. Geometria analityczna i wektory	281

4. Funkcje i wielomiany

M Zadanie 4.1. [1980/1981, zawody szkolne]

Funkcja f ma następującą własność: dla każdej liczby rzeczywistej x ,

$f\left(x + \frac{1}{3}\right) = f(x)$ oraz $f(0) = 1$, $f(0,5) = 2$. Wyznaczyć wartości tej funkcji dla $x = \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{6}, 1, 1\frac{2}{3}, 2$.

Rozwiązanie

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = f\left(0 + \frac{1}{3}\right) = f(0) = 1$$

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = f\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) = f\left(\frac{1}{3}\right) = 1$$

$$f\left(\frac{5}{6}\right) = f\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) = 2$$

$$f(1) = f\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right) = f\left(\frac{2}{3}\right) = 1$$

$$f\left(1\frac{1}{3}\right) = f\left(1 + \frac{1}{3}\right) = f(1) = 1$$

$$f\left(1\frac{2}{3}\right) = f\left(1\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) = f\left(1\frac{1}{3}\right) = 1$$

$$f(2) = f\left(1\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right) = f\left(1\frac{2}{3}\right) = 1.$$

M Zadanie 4.2. [1980/1981, zawody szkolne]

Naszkicować wykres funkcji f , która każdej liczbie rzeczywistej m przyporządkowuje liczbę pierwiastków równania $(m+1)^2 x^2 - 4x + 1 = 0$.

Rozwiązanie

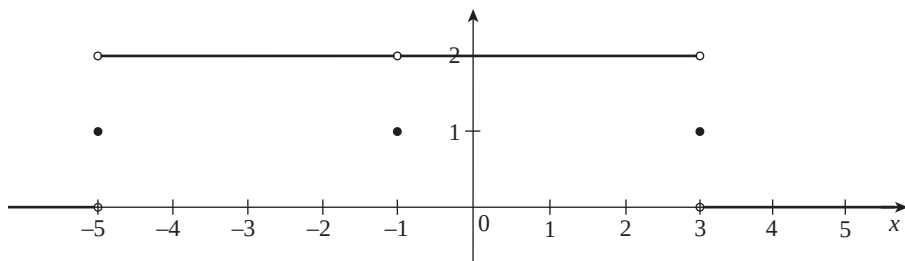
Dla $m = -1$ jedno rozwiązanie.

$$\Delta = 16 - 4(m+1)^2 = 4(4 - (m+1)^2) = 4(3-m)(5+m).$$

Dla $m \in \{-5, 3\}$ jedno rozwiązanie.

Dla $m \in (-5, -1) \cup (-1, 3)$ dwa rozwiązania.

Dla $m \in (-\infty, -5) \cup (3, +\infty)$ nie ma rozwiązania, czyli zero rozwiązań.



Zadanie 4.3. [1980/1981, klasa 2, zawody woj.]

Wykazać, że zbiór wartości wielomianu

$w(x, y) = (xy - 2)^2 + 2(xy - 1) + x^2 - 1$ składa się ze wszystkich liczb dodatnich.

Rozwiązanie

$$\begin{aligned} w(x, y) &= (xy)^2 - 4xy + 4 + 2xy - 2 + x^2 - 1 = \\ &= (xy)^2 - 2xy + 1 + x^2 = (xy - 1)^2 + x^2. \end{aligned}$$

Zatem $w(x, y) \geq 0$.

Czy może być $w(x, y) = 0$?

Tak byłoby, gdyby jednocześnie $xy = 1$ i $x = 0$, a to jest niemożliwe.

Zatem $w(x, y) > 0$.

Musimy jeszcze wykazać, że każda liczba dodatnia jest wartością wielomianu w .

Dla każdej liczby dodatniej t mamy: $w\left(\sqrt{t}, \frac{1}{\sqrt{t}}\right) = \left(\sqrt{t} \cdot \frac{1}{\sqrt{t}} - 1\right)^2 + \left(\sqrt{t}\right)^2 = t$.

Zatem udowodniliśmy, że zbiorem wartości wielomianu $w(x, y)$ jest przedział $(0, +\infty)$.

M Zadanie 4.4. [1981/1982, klasa 2, zawody szkolne]

Wiadomo, że wielomian $x^3 - 6x + a$ w ma pierwiastek podwójny.

Znaleźć pierwiastek i liczbę a .

Rozwiązanie

Niech b będzie pierwiastkiem dwukrotnym. Wtedy

$$x^3 - 6x + a = (x - b)^2(x - c)$$

Po przekształceniu otrzymujemy

$$x^3 - 6x + a = x^3 - (2b + c)x^2 + (2bc + b^2)x - cb^2$$

Wtedy

$$\begin{cases} 2b + c = 0 \\ b^2 + 2bc = -6 \\ -cb^2 = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -2b \\ b^2 = 2 \\ a = 2b^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4\sqrt{2} \\ b = \sqrt{2} \\ c = -2\sqrt{2} \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} a = -4\sqrt{2} \\ b = -\sqrt{2} \\ c = 2\sqrt{2} \end{cases}$$

Łatwo sprawdzić, że $\sqrt{2}$ jest dwukrotnym pierwiastkiem wielomianu $x^3 - 6x + 4\sqrt{2}$, natomiast $-\sqrt{2}$ jest dwukrotnym pierwiastkiem wielomianu $x^3 - 6x - 4\sqrt{2}$.

Odp. $a = 4\sqrt{2}$ i pierwiastkiem podwójnym jest $\sqrt{2}$.

$a = -4\sqrt{2}$ i pierwiastkiem podwójnym jest $-\sqrt{2}$.

II sposób

Niech $P(x) = x^3 - 6x + a$.

Wtedy $P'(x) = 3x^2 - 6$. Pierwiastkami dwukrotnymi mogą być liczby:

$$\sqrt{2} \text{ lub } -\sqrt{2}.$$

Wtedy, gdy $P(\sqrt{2}) = 0$, to $(\sqrt{2})^3 - 6\sqrt{2} + a = 0$, czyli $a = 4\sqrt{2}$.

Można zauważyć, że $\sqrt{2}$ nie jest pierwiastkiem trzykrotnym.

Liczba $-\sqrt{2}$ jest pierwiastkiem dwukrotnym dla $a = -4\sqrt{2}$.

M Zadanie 4.5. [1981/1982, klasa 2, zawody szkolne]

Naszkiecować wykresy funkcji:

$$y = \frac{1}{2}(x^2 - x) + \frac{1}{2}|x^2 - x| \text{ oraz } y = \frac{1}{2}(x^2 - x) - \frac{1}{2}|x^2 - x|.$$

Rozwiązanie

$$y_1 = \frac{1}{2}(x^2 - x) + \frac{1}{2}|x^2 - x| = \begin{cases} x^2 - x, & \text{dla } x^2 - x \geq 0 \\ 0, & \text{dla } x^2 - x < 0 \end{cases}$$

2. Stereometria

Zadanie 2.1. [1980/1981, klasa 3, zawody woj.]

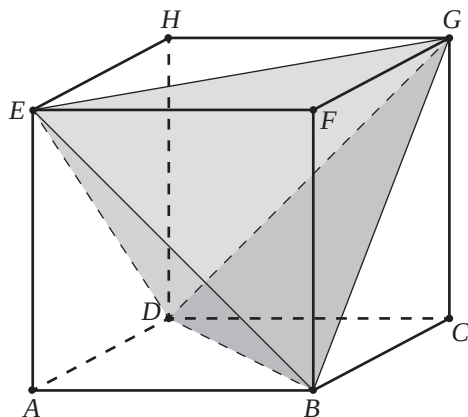
Rozstrzygnąć, czy czworościan foremny o krawędzi, której długość wynosi 2 może zwierać się w prostopadłościanie o wymiarach: $2, 2, \sqrt{2}$.

Rozwiązanie

Tak.

W sześcian $ABCDEFGH$ o boku długości $\sqrt{2}$ mieści się czworościan foremny o boku 2.

Sześcian o boku długości $\sqrt{2}$ mieści się w prostopadłościanie o bokach długości $2, 2, \sqrt{2}$.



M **Zadanie 2.2.** [1983/1984, klasa 3, zawody woj.]

Przez środek ciężkości ściany czworościanu foremnego poprowadzono płaszczyznę równoległą do dwóch skośnych krawędzi. Obliczyć pole przekroju tego czworościanu daną płaszczyzną, jeżeli długość krawędzi czworościanu jest równa 1.

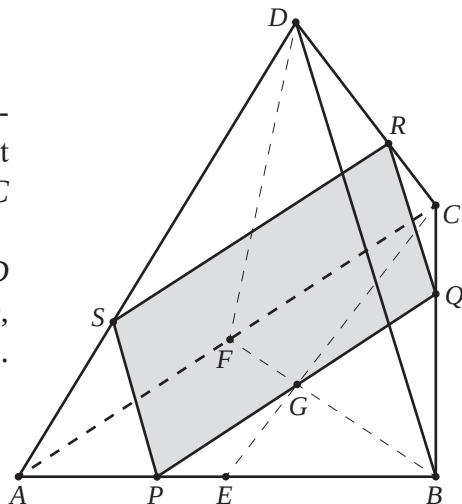
Rozwiązanie

Niech punkt G będzie punkt przecięcia środkowych BF i CE w trójkącie ABC . Punkt ten jest środkiem ciężkości ściany ABC czworościanu $ABCD$ (zobacz rysunek).

Płaszczyzna równoległa do krawędzi BD i AC przecina krawędzie AB , BC , CD , AD w punktach odpowiednio P , Q , R , S . Wtedy

$$PQ \parallel AC \text{ i } RS \parallel AC \Rightarrow PQ \parallel RS$$

$$PS \parallel BD \text{ i } QR \parallel BD \Rightarrow PS \parallel QR$$



Zatem czworokąt $PQRS$ jest równoległobokiem.

$$|PQ| = \frac{2}{3}|AC| = \frac{2}{3}$$

$$|PS| = \frac{1}{3}|BD| = \frac{1}{3}$$

$$PS \parallel BD \text{ i } PQ \parallel AC \text{ i } BD \perp AC \Rightarrow PS \perp PQ$$

Zatem $PQRS$ jest prostokątem.

Pole przekroju równa się $\frac{2}{9}$.

Zadanie 2.3. [1985/1986, klasa 3, zawody szkolne]

W jakim stosunku przecinają się wysokości w czworoscianie foremnym?

Rozwiązanie

Niech AA_1 , DD_1 będą wysokościami czworoscianu $ABCD$ o krawędzi długości a .

Wtedy

$$|AF| = |BG| = |CE| = |DF| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$|FD_1| = \frac{1}{3}|AF| = \frac{a\sqrt{3}}{6} = |FA_1|$$

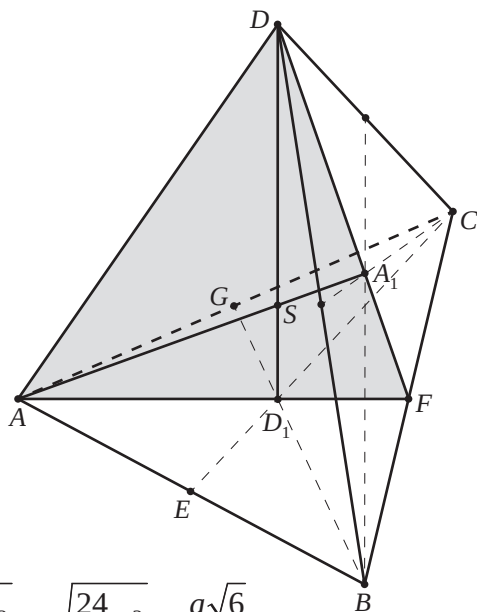
$$|AD_1| = \frac{2}{3}|AF| = \frac{a\sqrt{3}}{3} = |DA_1|$$

$$\begin{aligned} |DD_1| &= \sqrt{|DF|^2 - |D_1F|^2} = \\ &= \sqrt{\frac{3}{4}a^2 - \frac{3}{36}a^2} = \sqrt{\frac{3}{4}a^2 - \frac{3}{36}a^2} = \sqrt{\frac{24}{36}a^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3} \end{aligned}$$

Trójkąty DD_1F i DSA_1 są podobne. Zatem

$$\frac{|DS|}{|SA_1|} = \frac{|DF|}{|FD_1|}$$

Wykorzystując, że $|SA_1| = |SD_1|$ otrzymujemy



$$\frac{|DS|}{|SD_1|} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{6}} = 3 = \frac{3}{1}$$

Punkt przecięcia wysokości dzieli je w stosunku 3 : 1.

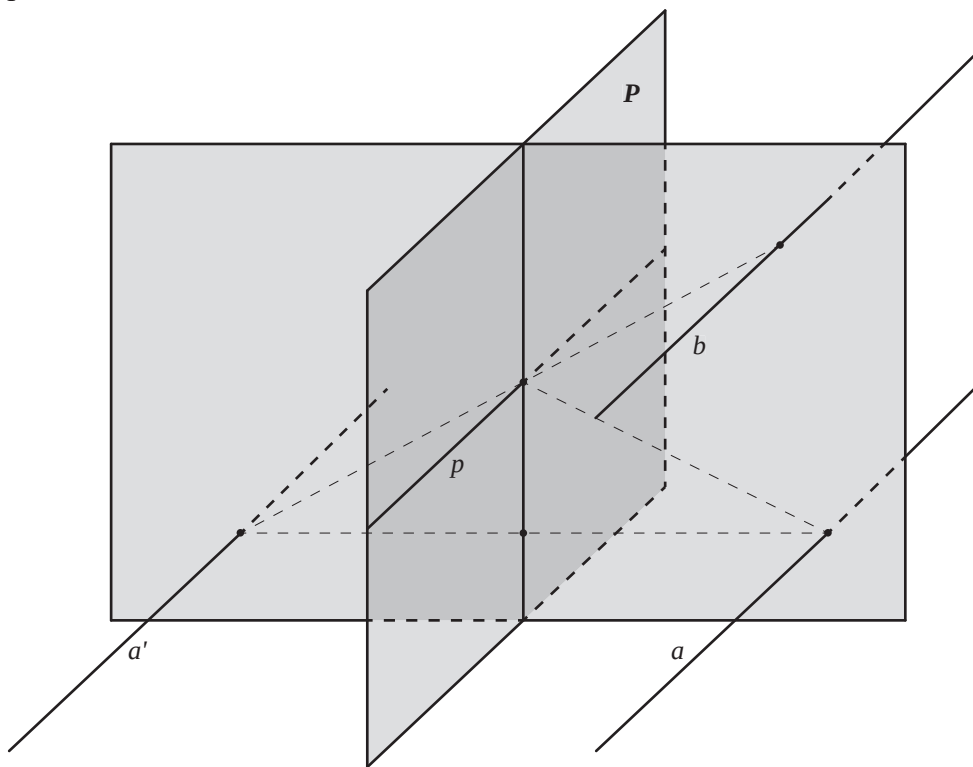
Zadanie 2.4. [1986/1987, klasa 4, zawody szkolne]

Proste równoległe a i b są zawarte w jednej półprzestrzeni otwartej wyznaczonej przez płaszczyznę P . Wyznaczyć na płaszczyźnie P taką prostą p , aby płaszczyzny: $\text{pł.}(a, p)$ i $\text{pł.}(b, p)$ tworzyły z płaszczyzną P kąty dwuścienne przystające.

Rozwiązanie

Niech a' będzie prostą symetryczną do prostej a względem płaszczyzny P .

Prosta p jest krawędzią przecięcia płaszczyzny P i płaszczyzny zawierającej proste a' i b ,



Matematyka

TWIERDZENIA I DOWODY

Zadania z rozwiązaniami
do liceów i techników

Ryszard Pagacz
Janusz Karkut
Tomasz Szwed

Matura
od 2023 r.

Sprawdź dostępność na:
www.pazdro.com.pl

Publikacja
zgodna z nową
podstawą
programową,
obowiązująca
od września
2019 r.



format 165 x 235 mm
stron 336

Spis treści

ROZDZIAŁ 1	7
1.1. Liczby pierwsze	7
1.2. Niewymierność liczb	12
1.3. Pierwiastki trójmianu kwadratowego	17
1.4. Podstawowe własności potęg i logarytmów	24
1.5. Dzielenie wielomianów	36
1.6. Ciąg arytmetyczny oraz ciąg geometryczny	43
1.7. Twierdzenia o kątach w okręgu	59
1.8. Twierdzenie o odcinkach w trójkącie prostokątnym	70
1.9. Twierdzenie o dwusiecznej	84
1.10. Wzory na pole trójkąta	92
1.11. Twierdzenie sinusów	99
1.12. Twierdzenie cosinusów i twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa	105
ROZDZIAŁ 2	120
2. Rozwiązania do rozdziału 1.	120
2.1. Liczby pierwsze	120
2.2. Niewymierność liczb	122
2.3. Pierwiastki trójmianu kwadratowego	124
2.4. Podstawowe własności potęg i logarytmów	126
2.5. Dzielenie wielomianów	130
2.6. Ciąg arytmetyczny oraz ciąg geometryczny	132
2.7. Twierdzenie o kątach w okręgu	141
2.8. Twierdzenie o odcinkach w trójkącie prostokątnym	144
2.9. Twierdzenie o dwusiecznej	151
2.10. Wzory na pole trójkąta	159
2.11. Twierdzenie sinusów	166
2.12. Twierdzenie cosinusów (Carnota) i twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa	173
ROZDZIAŁ 3	181
3.1. Kombinatoryka	181
3.2. Dwumian Newtona i inne wzory skróconego mnożenia	186
3.3. Wzory Viete'a	195
3.4. Wzory trygonometryczne	204
3.5. Punkty szczególne trójkąta	216
3.6. Czworokąt wpisany w okrąg	236
3.7. Czworokąt opisany na okręgu	249
3.8. Twierdzenie o prostej prostopadłej do płaszczyzny	253
3.9. Twierdzenie o trzech prostych prostopadłych	259
ROZDZIAŁ 4	263
4. Rozwiązania do rozdziału 3	263
4.1. Kombinatoryka	263
4.2. Dwumian Newtona i inne wzory skróconego mnożenia	269
4.3. Wzory Viete'a	274
4.4. Wzory trygonometryczne	277
4.5. Punkty szczególne trójkąta	281
4.6. Czworokąt wpisany w okrąg	292
4.7. Czworokąt opisany na okręgu	301
4.8. Twierdzenie o prostej prostopadłej do płaszczyzny	308
4.9. Twierdzenie o trzech prostych prostopadłych	310
ROZDZIAŁ 5. Uzupełnienie	314

Publikacja „**Matematyka. Twierdzenia i dowody. Zadania z rozwiązaniami do liceów i techników**” jest zgodna z podstawą programową MEN, która obowiązuje w tych szkołach od września 2019 roku (rozporządzenie MEN z dnia 30 stycznia 2018 roku w sprawie podstawy programowej kształcenia ogólnego dla liceum ogólnokształcącego, technikum oraz branżowej szkoły II stopnia, DzU 2018, poz. 467). Zamieściliśmy w niej dowody wszystkich twierdzeń matematycznych wymienionych w tym rozporządzeniu. Bardzo często dowody pokazujemy w kilku wariantach. Mamy nadzieję, że każdy uczeń odnajdzie sposób przeprowadzenia dowodu właściwy dla siebie i swoich umiejętności.

Zachęcamy do korzystania z tej książki zarówno uczniów, jak i nauczycieli, niekoniecznie związanych z nowym liceum i technikum. Polecamy ją wszystkim zainteresowanym matematyką. Dla nauczycieli matematyki czytanie i dogłębna analiza dowodów oraz rozwiązywanie załączonych zadań na dowodzenie będzie okazją do doskonalenia swojego warsztatu pracy oraz poszerzenia możliwości rozwiązywania trudnych zadań. Prezentowany materiał pozwoli uczniom lepiej zrozumieć matematykę i solidniej przygotować się do studiowania jej na wyższym etapie edukacyjnym.

Podsumowując, książka „**Twierdzenia i dowody...**” to:

- zestaw najważniejszych twierdzeń matematyki w liceum i technikum wraz z dowodami,
- możliwość prześledzenia różnych sposobów dowodzenia twierdzeń,
- inspiracja dla ucznia do samodzielnego dowodzenia twierdzeń,
- wsparcie metodyczne dla nauczyciela w trudnej sztuce nauczania dowodzenia,
- bogate źródło trudnych i oryginalnych zadań dla ucznia wraz z rozwiązaniami,
- znakomity materiał do kształtowania umiejętności rozumowania i myślenia matematycznego,
- wsparcie realizacji podstawy programowej z matematyki,
- skuteczne przygotowanie uczniów do egzaminu maturalnego, również od 2023 roku.

Życzymy naszym Czytelnikom dobrej i twórczej pracy.

Autorzy

1.9. TWIERDZENIE O DWUSIECZNEJ

Podstawa programowa

9. Twierdzenie o dwusiecznej:

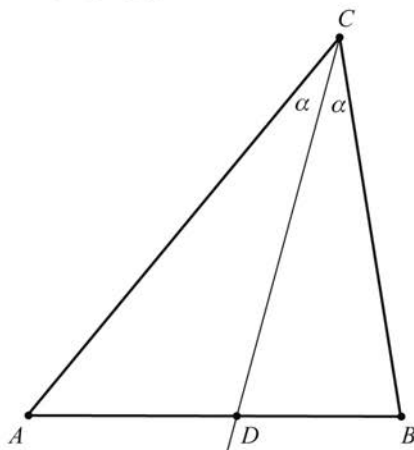
Jeśli prosta CD jest dwusieczną kąta ACB w trójkącie ABC i punkt D

leży na boku AB , to $\frac{|AD|}{|BD|} = \frac{|AC|}{|BC|}$.

Twierdzenie to możemy zapisać również w postaci:

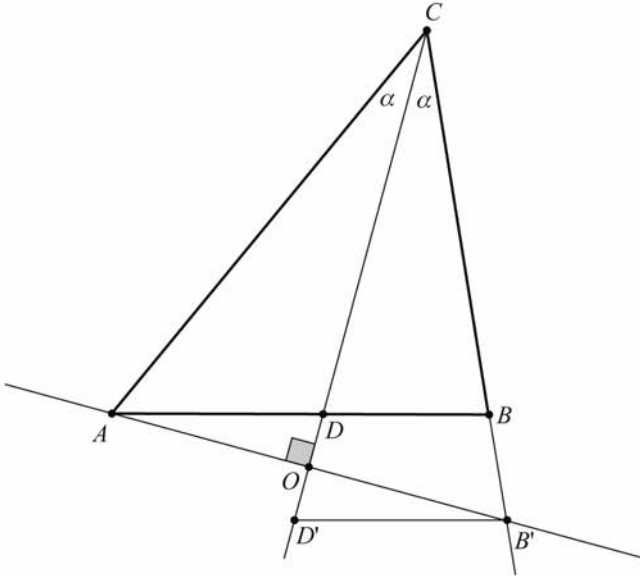
Twierdzenie P9.1.

Dwusieczna kąta wewnętrznego w trójkącie dzieli przeciwległy bok na odcinki proporcjonalnie do boków przyległych.



Przy przyjętych oznaczeniach treść twierdzenia wyraża proporcja:

$$\frac{|AD|}{|DB|} = \frac{|AC|}{|BC|}.$$

Dowód 1.

Zakładamy, że $|AC| \neq |BC|$. W przypadku, gdy $|AC| = |BC|$ trójkąt ABC jest równoramienny, wtedy $|AD| = |DB|$ i teza jest oczywista.

Z punktu A prowadzimy prostą prostopadłą do dwusiecznej CD . Prosta ta przecina dwusieczną w punkcie O , natomiast prostą BC w punkcie B' .

Ponieważ w trójkącie $AB'C$ dwusieczna jest prostopadła do podstawy AB' , więc trójkąt $AB'C$ jest trójkątem równoramiennym, zatem

$$|AO| = |OB'| \text{ i } |AC| = |B'C|.$$

Poprowadźmy jeszcze przez punkt B' prostą równoległą do boku AB . Przecina ona prostą CD w punkcie D' . Trójkąty ADO i $B'D'O$ są przystające (kbk), więc $|D'B'| = |AD|$.

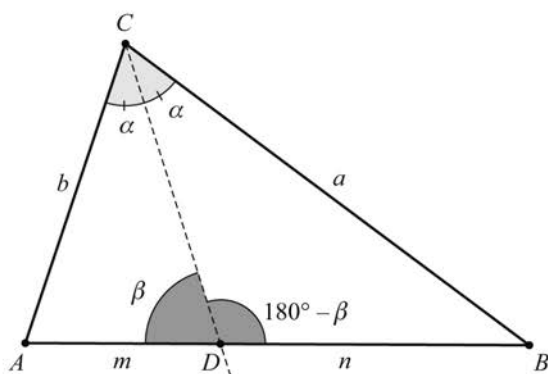
Z podobieństwa trójkątów DBC i $D'B'C$ wynika, że

$$\frac{|D'B'|}{|DB|} = \frac{|B'C|}{|BC|},$$

czyli

$$\frac{|AD|}{|DB|} = \frac{|AC|}{|BC|},$$

co należało wykazać.

Dowód 2.

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.

Z twierdzenia sinusów zastosowanego do trójkątów ADC i DBC wynika, że

$$\frac{m}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}$$

oraz

$$\frac{n}{\sin \alpha} = \frac{a}{\sin(180^\circ + \beta)} = \frac{a}{\sin \beta}.$$

Dzieląc stronami równości

$$\frac{m}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} \text{ i } \frac{n}{\sin \alpha} = \frac{a}{\sin \beta},$$

otrzymujemy tezę:

$$\frac{m}{n} = \frac{b}{a},$$

co kończy dowód.

Dowód 3.

Oznaczenia takie jak w dowodzie 2.

Ponieważ stosunek pól trójkątów o równej wysokości równy jest stosunkowi długości ich podstaw, więc

$$\frac{P_{ADC}}{P_{DBC}} = \frac{m}{n}.$$

Z drugiej strony, mamy:

$$\frac{P_{ADC}}{P_{DBC}} = \frac{\frac{1}{2}b|CD|\sin \alpha}{\frac{1}{2}a|CD|\sin \alpha} = \frac{b}{a},$$

Mateusz Wróbel
Tomasz Szwed

Sprawdź dostępność na:
www.pazdro.com.pl

Zadania i problemy MATEMATYCZNE

Zbiór 270 oryginalnych zadań
z rozwiązaniami i nie tylko



MATERIAŁ DLA UCZNIÓW
SZKÓŁ ŚREDNICH



format 165 x 235 mm
stron 208

*Zaczynj od zrobienia tego, co konieczne; potem zrób to, co możliwe.
Nagle odkryjesz, że dokonałeś niemożliwego.*

św. Franciszek z Asyżu

„Zadania i problemy matematyczne...” adresujemy przede wszystkim do uczniów przygotowujących się do egzaminu maturalnego z matematyki na poziomie rozszerzonym. Znajdą oni w tym zbiorze blisko 270 oryginalnych zadań i problemów matematycznych. Każde zadanie – problem posiada pełne rozwiązanie i stanowi wartościowy materiał do samokształcenia oraz poznania różnorodnych metod i narzędzi matematycznych, służących efektywnemu rozwiązywaniu zadań.

Książka ta z powodzeniem wzbogaci warsztat pracy każdego nauczyciela matematyki. Będzie również cennym materiałem dydaktycznym dla nauczycieli przygotowujących uczniów do egzaminu maturalnego z matematyki na poziomie rozszerzonym. Zadania zawarte w tym zbiorze będą dobrym materiałem ćwiczeniowym na kółka matematyczne i inne zajęcia dodatkowe, mające na celu pogłębienie kompetencji matematycznych uczniów.

Zbiór składa się z trzech części:

- ◆ **zadania – „startery”** (z odpowiedziami),
- ◆ **zadania – problemy** (z pełnymi rozwiązaniami),
- ◆ **zadania przeznaczone do samodzielnego rozwiązania.**

Aby pomóc uczniowi w zorganizowaniu pracy, zbiór podzielono na trzydzieści jednostek – każda z nich zawiera dwa startery i pięć problemów. Na rozwiązanie zadań zawartych w jednej jednostce trzeba przeznaczyć około godziny.

Naturalnymi towarzyszami procesu uczenia się są: praca, trud, zaangażowanie, zmęczenie, niemoc, zniecierpliwienie i popełnianie błędów. Droga do sukcesu w matematyce nie jest łatwa i wymaga ciągłego podtrzymywania motywacji. Dlatego też zdecydowaliśmy się na zamieszczenie trzydziestu inspirujących myśli, zachęcających do pokonywania wszelkiego rodzaju trudności.

Uczenie się matematyki nie jest procesem linearnym, dlatego zadania nie są poukładane według działów programowych. Niezwykle ważną umiejętnością maturzysty jest dobór narzędzi właściwych do postawionego problemu. Aby ułatwić orientację w zawartości merytorycznej zadań i przypisanie ich do konkretnych działów programowych, przygotowaliśmy poniższy wykaz:

Liczby. Dowody algebraiczne: 1.1, 1.2, 2.1, 2.2, 3.1, 3.6, 3.7, 5.2, 5.4, 6.2, 7.1, 7.2, 8.1, 8.2, 8.7, 9.1, 9.2, 10.4, 10.5, 10.6, 17.2, 17.5, 18.2a, 20.4, 22.4, 22.5, 22.6, 23.6, 27.1, 29.3.
Zadania do samodzielnego rozwiązania: 2, 13, 14, 26, 32, 40, 44, 45.

Funkcje. Funkcja kwadratowa: 2.6, 3.2, 3.4, 4.2, 5.1, 5.7, 6.1, 6.3, 6.5, 9.4, 14.6, 15.1,

16.3, 18.1, 18.2b, 18.3, 18.4, 19.2, 21.3, 21.6, 21.7, 25.5, 26.2, 28.1, 28.7, 29.1, 29.4, 30.2.
Zadania do samodzielnego rozwiązania: 12, 30.

Wielomiany i funkcja wymierna: 4.1, 5.3, 6.7, 10.1, 10.2, 10.7, 11.3, 12.7, 13.1, 13.2, 13.3, 13.4, 14.1, 14.2, 14.4, 14.5, 14.7, 15.2, 15.3, 16.1, 16.2, 17.7, 28.2.
Zadania do samodzielnego rozwiązania: 47, 49.

Planimetria. Dowody geometryczne: 1.7, 2.3, 2.4, 4.3, 4.4, 4.6, 6.6, 7.4, 9.3, 9.5, 9.6, 11.2, 11.5, 11.7, 12.1, 12.4, 12.5, 12.6, 13.6, 13.7, 14.3, 15.5, 16.7, 17.3, 17.4, 19.3, 19.5, 19.6, 20.5, 20.6, 20.7, 21.5, 22.3, 23.5, 23.7, 24.5, 25.4, 27.7, 28.3.
Zadania do samodzielnego rozwiązania: 1, 10, 17, 38, 42, 48.

Geometria analityczna: 1.3, 1.4, 4.7, 5.6, 7.5, 7.6, 11.4, 16.6, 19.7, 23.3, 23.4, 24.4, 25.2, 25.3, 28.5.
Zadania do samodzielnego rozwiązania: 15, 25, 31.

Ciągi liczbowe: 1.5, 2.7, 3.3, 3.5, 4.5, 9.7, 10.3, 11.6, 12.2, 16.4, 16.5, 19.1, 20.1, 25.6, 25.7, 26.3, 26.4, 26.5, 26.6, 26.7, 27.3, 27.4, 27.5, 29.5.
Zadania do samodzielnego rozwiązania: 11, 41.

Trygonometria: 5.5, 8.6, 11.1, 17.1, 17.6, 29.2, 30.1.
Zadania do samodzielnego rozwiązania: 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 22, 23, 24, 34, 39.

Stereometria: 7.7, 8.3, 8.4, 8.5, 13.5, 15.6, 18.5, 18.6, 18.7, 23.2, 24.1, 27.2, 28.4.
Zadania do samodzielnego rozwiązania: 16, 28, 43, 46.

Granice, pochodne, optymalizacja: 7.3, 15.7, 19.4, 20.2, 21.1, 21.2, 22.1, 22.2, 24.6, 24.7, 27.6, 29.6, 29.7, 30.3, 30.4, 30.5, 30.6, 30.7.
Zadania do samodzielnego rozwiązania: 18, 19, 21, 33.

Kombinatoryka i rachunek prawdopodobieństwa: 1.6, 2.5, 6.4, 12.3, 15.4, 20.3, 21.4, 22.7, 23.1, 24.2, 25.1, 26.1, 28.6.
Zadania do samodzielnego rozwiązania: 20, 27, 29, 35, 36, 37, 50.

Wszystkim Czytelnikom życzymy wyraźnych postępów w kształtowaniu kompetencji matematycznych oraz wyników maturalnych na miarę marzeń, potrzeb edukacyjnych oraz włożonej pracy.

Autorzy

Spis treści

Problemy i startery	6
Odpowiedzi i rozwiązania	66
Problemy do samodzielnego rozwiązania	197
Zadania	197
Odpowiedzi	205

1.1. Oblicz:

a) $\sqrt{10 - 2\sqrt{21}}$

b) $\left(\sqrt{3 - \sqrt{2}} - \sqrt{3 + \sqrt{2}}\right)^2$

c) $(\sqrt{3} - 1)^3 - (\sqrt{3} + 1)^2$

1.2. Pozbądź się niewymierności z mianownika ułamka:

a) $\frac{\sqrt{7} - \sqrt{3}}{\sqrt{7} + \sqrt{3}}$

b) $\frac{1}{\sqrt[3]{7} - \sqrt[3]{3}}$

c) $\frac{1}{\sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{4} + 1}$

*Prawo przyciągania: szczęście sprzyja tym,
którzy się starają.*

Barbara Oakley

- 1.3.** Okrąg o_2 ze środkiem leżącym na osi Ox , jest styczny zewnętrznie do okręgu o_1 o równaniu $(x-3)^2 + (y+5)^2 = 25$ i jednocześnie jest styczny do prostej $x + 2\sqrt{6}y - 3 = 0$.

Wyznacz równanie okręgu o_2 . Rozważ wszystkie przypadki.

- 1.4.** Punkt S leży na osi Ox i jest środkiem okręgu stycznego jednocześnie do obu prostych: $4x - 3y + 21 = 0$ oraz $3x + 4y - 28 = 0$. Oblicz promień tego okręgu oraz wyznacz współrzędne punktu S . Rozważ wszystkie przypadki.

- 1.5.** W trójwyrazowym ciągu geometrycznym (a, b, c) wszystkie wyrazy są dodatnie. Wyznacz wszystkie wartości ilorazu tego ciągu, dla których odcinki o długościach a, b, c tworzą trójkąt.

- 1.6.** Oblicz, ile jest liczb sześciocyfrowych parzystych, które zawierają co najmniej cztery dwójki.

- 1.7.** Długości boków trójkąta o obwodzie 30 tworzą ciąg arytmetyczny. Największy kąt tego trójkąta wynosi 120° . Oblicz pole tego trójkąta.

1. Oblicz promień okręgu opisanego na trapezie równoramiennym, w którym najdłuższy bok ma długość 22, a każdy z trzech pozostałych boków ma długość 10.
2. Uzasadnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y prawdziwa jest nierówność $4x(1+y) - 2(x^2 + 2y^2) < 5$.
3. Rozwiąż równanie $\frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} = 6 \operatorname{tg} x$ w przedziale $\langle 0; 2\pi \rangle$.
4. Rozwiąż równanie $\sin 2x - \cos x = \cos 2x + \sin x$ w przedziale $\langle 0; 2\pi \rangle$.
5. Rozwiąż równanie $\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos 2x = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ w przedziale $\langle 0; 2\pi \rangle$.
6. Rozwiąż równanie $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin 2x$ w przedziale $\langle -\pi; \pi \rangle$.
7. Rozwiąż równanie $5 \cos 2x + 4 \sin x \cdot \cos^2 x + 4 \sin x = -1$ w przedziale $\langle 0; 2\pi \rangle$.
8. Rozwiąż równanie $2 \sin^2 x - \cos^2 x = 1$ w przedziale $\langle -\pi; \pi \rangle$.
9. Rozwiąż równanie $\frac{1}{\sin x} + \sin 2x \cdot \operatorname{tg} x = 3 \sin x$ w przedziale $\langle -2\pi; 2\pi \rangle$.

1.1. a) $\sqrt{7} - \sqrt{3}$

b) $6 - 2\sqrt{7}$

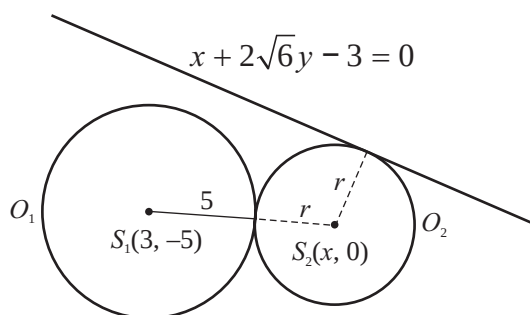
c) $4\sqrt{3} - 14$

1.2. a) $\frac{5 - \sqrt{21}}{2}$

b) $\frac{\sqrt[3]{49} + \sqrt[3]{21} + \sqrt[3]{9}}{4}$

c) $\frac{\sqrt[3]{4} + 1}{5}$

1.3. $\left(x - \frac{61}{12}\right)^2 + y^2 = \frac{25}{144}$ lub $\left(x - \frac{11}{12}\right)^2 + y^2 = \frac{25}{144}$

Rozwiązanie

Z równania okręgu o_1 mamy środek $(3, -5)$ i promień długości 5. Środek okręgu o_2 ma współrzędne $(x, 0)$, bo leży na osi Ox . Odległość punktu $S_2 = (x, 0)$ od prostej $x + 2\sqrt{6}y - 3 = 0$ jest równa r ,

$$\text{zatem } \frac{|1 \cdot x + 2\sqrt{6} \cdot 0 + (-3)|}{\sqrt{1^2 + (2\sqrt{6})^2}} = r \Leftrightarrow \frac{|x - 3|}{5} = r.$$

Z warunku na styczność zewnętrzną okręgów mamy:

$$|S_1S_2| = 5 + r \Leftrightarrow \sqrt{(x - 3)^2 + (0 + 5)^2} = 5 + r \Leftrightarrow \sqrt{(x - 3)^2 + 25} = 5 + r.$$

Podstawiamy $r = \frac{|x - 3|}{5}$ do równania $\sqrt{(x - 3)^2 + 25} = 5 + r$.

$$\sqrt{(x - 3)^2 + 25} = 5 + \frac{|x - 3|}{5} \quad | \cdot 5$$

$$5\sqrt{(x - 3)^2 + 25} = 25 + |x - 3|$$

Rozwiązujemy równanie w przedziałach:

dla $x \geq 3$

$$5\sqrt{(x-3)^2 + 25} = 25 + x - 3$$

$$5\sqrt{(x-3)^2 + 25} = 22 + x \quad | \cdot ()^2$$

$$25[(x-3)^2 + 25] = (22+x)^2$$

z powyższego równania mamy $x_1 = \frac{61}{12}$ oraz $x_2 = 3$.

Jednak dla $x = 3$ mamy $r = 0$, więc odrzucamy $x = 3$. Zatem $S_2 = \left(\frac{61}{12}; 0\right)$.

$$\text{Obliczamy } r = \frac{|x-3|}{5} = \frac{\left|\frac{61}{12}-3\right|}{5} = \frac{5}{12},$$

Mając środek $S_2 = \left(\frac{61}{12}; 0\right)$ oraz $r = \frac{5}{12}$, otrzymujemy równanie okręgu

$$\left(x - \frac{61}{12}\right)^2 + y^2 = \frac{25}{144}.$$

dla $x < 3$

$$5\sqrt{(x-3)^2 + 25} = 25 - x + 3$$

$$5\sqrt{(x-3)^2 + 25} = 28 - x \quad | \cdot ()^2$$

$$25[(x-3)^2 + 25] = (28-x)^2$$

z powyższego równania mamy $x_3 = \frac{11}{12}$ oraz $x_4 = 3$.

Jednak dla $x = 3$ mamy $r = 0$, więc odrzucamy $x = 3$. Zatem $S_2 = \left(\frac{11}{12}; 0\right)$.

$$\text{Obliczamy } r = \frac{|x-3|}{5} = \frac{\left|\frac{11}{12}-3\right|}{5} = \frac{5}{12}.$$

Mając środek $S_2 = \left(\frac{11}{12}; 0\right)$ oraz $r = \frac{5}{12}$, otrzymujemy równanie okręgu

$$\left(x - \frac{11}{12}\right)^2 + y^2 = \frac{25}{144}.$$

ANALIZA MATEMATYCZNA

dla licealistów i studentów

Sprawdź dostępność na:
www.pazdro.com.pl



Krzysztof Kłaczek
Marcin Kurczab
Elżbieta Świda

REPETYTORIUM



format 165 x 235 mm
stron 252

Spis treści

ROZDZIAŁ 1.

Granica i ciągłość funkcji	5
1.1. Granica funkcji w punkcie.....	5
Obliczanie granic funkcji w punkcie	20
1.2. Granica niewłaściwa, granica w nieskończoności, granice jednostronne	26
Granica niewłaściwa funkcji w punkcie	26
Granica funkcji w nieskończoności	29
Granice jednostronne funkcji w punkcie	37
1.3. Asymptoty wykresu funkcji.....	46
Asymptoty pionowe.....	46
Asymptoty poziome.....	50
Asymptoty ukośne	54
1.4. Ciągłość funkcji.....	59
Ciągłość funkcji w punkcie	59
Ciągłość funkcji w przedziale liczbowym.....	68

ROZDZIAŁ 2.

Pochodna funkcji	82
2.1. Pochodna funkcji w punkcie.....	82
Interpretacja geometryczna pochodnej funkcji w punkcie	92
Własności pochodnej funkcji w punkcie	94
2.2. Pochodna funkcji w zbiorze	97
2.3. Funkcja pochodna.....	98
Podstawowe własności pochodnej funkcji	102
Pochodna funkcji złożonej.....	113
Pochodna funkcji odwrotnej.....	122
2.4. Zastosowania pochodnej funkcji	124
Pochodna funkcji a monotoniczność funkcji.....	124
Ekstrema lokalne funkcji	131

Ekstrema globalne	142
Ekstrema globalne w przedziale domkniętym.....	142
Ekstrema globalne w przedziale otwartym.....	145
Zadania optymalizacyjne.....	148
2.5. Dalsze zastosowania pochodnej	163
Reguła de L'Hôpitala	163
Pochodne wyższych rzędów.....	172
Druga pochodna a wypukłość funkcji	173
Druga pochodna a ekstremum lokalne funkcji	181
Badanie przebiegu zmienności funkcji.....	185

ROZDZIAŁ 3.

Całka nieoznaczona	200
3.1. Funkcja pierwotna i całka nieoznaczona	200
3.2. Podstawowe twierdzenia dotyczące całki nieoznaczonej.....	203
3.3. Podstawowe metody całkowania.....	206
Metoda całkowania przez części	206
Metoda całkowania przez podstawienie	209

ROZDZIAŁ 4.

Całka oznaczona	216
4.1. Definicja i własności całki oznaczonej.....	216
4.2. Interpretacja geometryczna całki oznaczonej.....	222
4.3. Inne zastosowania całki oznaczonej.....	228

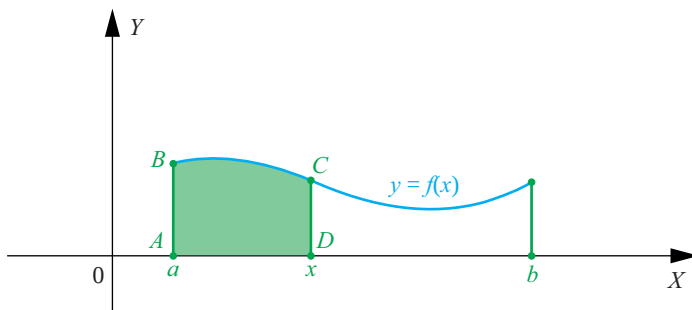
TESTY

Test 1. Granica i ciągłość funkcji	233
Test 2. Pochodna funkcji	238
Test 3. Całka nieoznaczona i całka oznaczona.....	244
Odpowiedzi do testu 1	250
Odpowiedzi do testu 2	250
Odpowiedzi do testu 3	251

4.2. Interpretacja geometryczna całki oznaczonej

Udowodnimy teraz pewne twierdzenie, które pozwoli nam na interpretację geometryczną całki oznaczonej.

Niech będzie dana funkcja f , określona w przedziale $\langle a, b \rangle$, ciągła i nieujemna w tym przedziale. Dla $x \in \langle a, b \rangle$ oznaczmy przez $P(x)$ pole figury $ADCB$ (nazywanej trapezem krzywoliniowym):



Zachodzi następujące

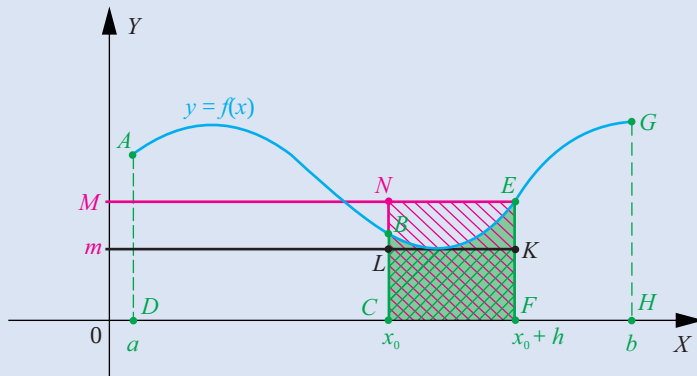


TWIERDZENIE 3 (Newtona - Leibniza)

Funkcja P jest funkcją pierwotną funkcji f w przedziale $\langle a, b \rangle$.

Dowód.

Weźmy najpierw dowolne $x_0 \in \langle a, b \rangle$, a następnie dowolną liczbę $h \neq 0$, dla której $x_0 + h \in \langle a, b \rangle$.



Zauważmy, że liczba $|P(x_0 + h) - P(x_0)|$ wyraża pole S_{BCFE} figury $BCFE$. Jeżeli bowiem $h > 0$, to pole figury $BCFE$ wyraża różnica $P(x_0 + h) - P(x_0)$, jeżeli zaś $h < 0$, to pole odpowiedniej figury wyraża różnica $P(x_0) - P(x_0 + h)$.



Tak więc liczby: h oraz $P(x_0 + h) - P(x_0)$ są albo obie dodatnie, albo obie ujemne, zatem ich iloraz jest zawsze dodatni. Otrzymujemy stąd, wykorzystując twierdzenie o wartości bezwzględnej ilorazu, że:

$$(1) \quad \frac{|P(x_0 + h) - P(x_0)|}{|h|} = \left| \frac{P(x_0 + h) - P(x_0)}{h} \right| = \frac{P(x_0 + h) - P(x_0)}{h}.$$

Oznaczmy teraz przez m i M odpowiednio: najmniejszą i największą wartość funkcji f w przedziale domkniętym, którego końcami są x_0 oraz $x_0 + h$ (na mocy twierdzenia Weierstrassa mamy pewność, że funkcja osiąga te wartości w tym przedziale, gdyż jest w nim ciągła).

Zauważmy, że zachodzi następująca nierówność dla pól S_{CFKL} , S_{BCFE} , S_{CFEN} odpowiednio figur $CFKL$, $BCFE$ i $CFEN$:

$$S_{CFKL} \leq S_{BCFE} \leq S_{CFEN}.$$

Ale $S_{CFKL} = m \cdot |h|$ i $S_{CFEN} = M \cdot |h|$, zatem mamy:

$$m \cdot |h| \leq |P(x_0 + h) - P(x_0)| \leq M \cdot |h|.$$

Dzieląc ostatnią nierówność stronami przez $|h|$, otrzymujemy:

$$m \leq \frac{|P(x_0 + h) - P(x_0)|}{|h|} \leq M.$$

Po uwzględnieniu równości (1) mamy:

$$m \leq \frac{P(x_0 + h) - P(x_0)}{h} \leq M.$$

Natomiast na podstawie wniosku ze str. 81. (przy $A = \frac{P(x_0 + h) - P(x_0)}{h}$) otrzymujemy, że istnieje w przedziale domkniętym o końcach x_0 oraz $x_0 + h$ taki punkt c , dla którego

$$(2) \quad f(c) = \frac{P(x_0 + h) - P(x_0)}{h}.$$

Zauważmy, że jeżeli $h \rightarrow 0$, to $c \rightarrow x_0$ (ponieważ przedział o końcach x_0 oraz $x_0 + h$ staje się coraz krótszy, a więc c leży coraz bliżej x_0). Stąd, na mocy ciągłości funkcji f , wynika, że $f(c) \rightarrow f(x_0)$. Otrzymujemy zatem

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(c) = f(x_0).$$

Natomiast jeżeli $h \rightarrow 0$, to iloraz różnicowy $\frac{P(x_0 + h) - P(x_0)}{h}$ dąży do $P'(x_0)$.

Wobec (2) otrzymujemy zatem, że

$$f(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} f(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P(x_0 + h) - P(x_0)}{h} = P'(x_0).$$

dla dowolnego $x_0 \in \langle a, b \rangle$, co oznacza, że funkcja P jest funkcją pierwotną funkcji f w przedziale $\langle a, b \rangle$.

Dowód twierdzenia został zakończony.

Wyciągnijmy jeszcze pewne wnioski z tego twierdzenia. Załóżmy, że F jest dowolną funkcją pierwotną funkcji f w tym przedziale. Wtedy, na mocy twierdzenia 1. ze str. 201. musi być

$$P(x) = F(x) + C,$$

gdzie P jest funkcją, o której mówi ostatnie twierdzenie. Zauważmy, że możemy wyznaczyć stałą C , ponieważ musi być

$$P(a) = 0. \text{ Tak więc}$$

$$0 = P(a) = F(a) + C, \text{ skąd } C = -F(a). \text{ Zatem}$$

$$P(x) = F(x) - F(a).$$

Zauważmy na koniec, że

$$P(b) = F(b) - F(a)$$

oraz że $P(b)$ wyraża pole trapezu krzywoliniowego $ADHG$ (rys. na str. 223.). Ale

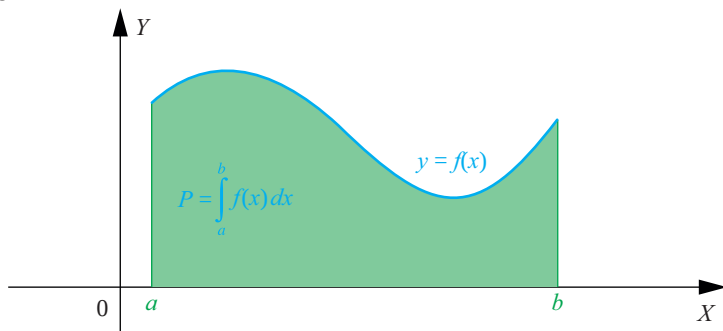
$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx.$$

Otrzymujemy więc następujący wniosek.



WNIOSEK (interpretacja geometryczna całki oznaczonej)

Jeżeli funkcja f jest ciągła w przedziale $\langle a, b \rangle$ i nieujemna w tym przedziale, to pole P obszaru ograniczonego osią OX , wykresem funkcji f oraz prostymi $x = a$ oraz $x = b$





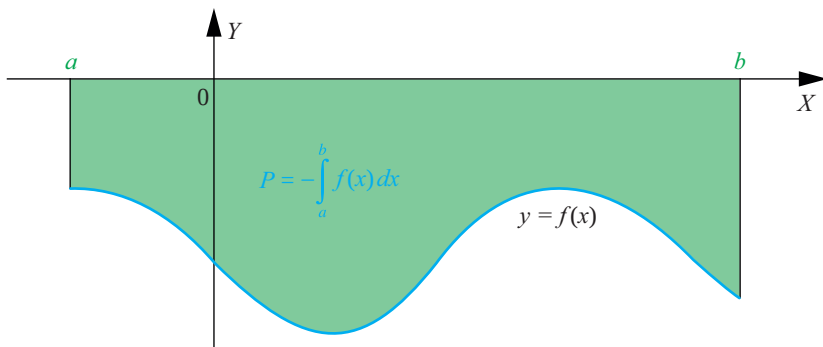
wyraża się wzorem:

$$(*) \quad P = \int_a^b f(x) dx.$$

Zauważmy, że obliczanie w ten sposób pól pewnych obszarów jest możliwe dla nas tylko w przypadku, gdy obszary te są ograniczone (choć w bardziej zaawansowanej matematyce nie musi tak być).

Pole to jest wyrażone w jednostkach, które przyjmiemy w danych obliczeniach. Czasami po obliczeniu pola za pomocą tego wzoru wyraźnie to zaznaczymy, pisząc że np. $P = 8$ (jednostek pola). Tak więc całka daje nam wartość liczbową, a sami musimy określić jednostkę pola, według której mierzymy.

Zauważmy teraz, że jeżeli funkcja f byłaby niedodatnia i ciągła w przedziale $\langle a, b \rangle$, to pole P obszaru ograniczonego osią OX , wykresem funkcji f oraz prostymi $x = a$ oraz $x = b$



wynosiłoby $P = \int_a^b [-f(x)] dx = -\int_a^b f(x) dx$,

$$(**) \quad P = -\int_a^b f(x) dx.$$

Tak więc aby obliczyć pole obszaru ograniczonego wykresem pewnej funkcji, ciągłej w przedziale $\langle a, b \rangle$, musimy wiedzieć, czy funkcja jest nieujemna, czy też niedodatnia w tym przedziale. Jeśli zaś funkcja przyjmuje w przedziale $\langle a, b \rangle$, zarówno wartości nieujemne, jak i niedodatnie, to należy podzielić ten przedział na takie części, aby na każdej z nich funkcja podcałkowa była już zawsze albo nieujemna, albo niedodatnia.

Podobnego podziału przedziału całkowania należy dokonać, jeśli krzywa ograniczająca obszar nie jest w całym przedziale wykresem tej samej funkcji. Często też zachodzi konieczność obliczania pól obszarów ograniczonych od góry wykresem funkcji f , a od dołu funkcji g oraz prostymi $x = a$ i $x = b$:

Tomasz Grębski

Podstawianie zmiennej pomocniczej w równaniach i nie tylko

Zadania z rozwiązaniami



format 165 x 235 mm
stron 128

Spis treści

Wstęp	5
Typowe podstawienia	6
Symbole używane w zbiorze	7
1. Podstawienie zmiennej pomocniczej w równaniach	8
1.1. Równania wielomianowe	8
1.2. Równania wielomianowe z wartością bezwzględną	17
1.3. Równania pierwiastkowe	18
1.4. Równania wymierne	29
1.5. Równania wykładnicze	32
1.6. Równania logarytmiczne	36
1.7. Równania logarytmiczno-wykładnicze	39
1.8. Równania trygonometryczne	41
1.9. Równania logarytmiczno-trygonometryczne	53
1.10. Równania trygonometryczno-wykładnicze	56
Zadania do samodzielnego rozwiązania	58
2. Podstawienie zmiennej pomocniczej w nierównościach	61
2.1. Nierówności wielomianowe	61
2.2. Nierówności wielomianowe z wartością bezwzględną	62
2.3. Nierówności wymierne z wartością bezwzględną	63
2.4. Nierówności pierwiastkowe	64
2.5. Nierówności wykładnicze	67
2.6. Nierówności logarytmiczne	67
2.7. Nierówności logarytmiczno-wykładnicze	69
2.8. Nierówności trygonometryczne	70
2.9. Nierówności trygonometryczno-wykładnicze	76
2.10. Nierówności trygonometryczno-logarytmiczne	78
Zadania do samodzielnego rozwiązania	80
3. Podstawienie zmiennej pomocniczej w układach równań	81
Zadania do samodzielnego rozwiązania	93
4. Podstawienie nowej zmiennej w równaniach z parametrem	94
Zadania do samodzielnego rozwiązania	109
5. Zadania różne	110
Zadania do samodzielnego rozwiązania	118
Odpowiedzi	119

Wstęp

W rozwiązywaniu równań, nierówności i układów równań potrzeba znajomości różnych metod, m.in. podstawienia zmiennej pomocniczej. Jest to zwykle wielkie ułatwienie w rozwiązywaniu zadania, czasem wręcz jedyna skuteczna metoda. Jednak użycie nowej zmiennej często wymaga też wprowadzenia odpowiednich założeń lub dodatkowych warunków, w szczególności w zadaniach z parametrem i wartością bezwzględną. Proponuję bliżej się przyjrzeć tej metodzie i zobaczyć, w jak wielu różnych sytuacjach bywa skuteczna, a także jak ją poprawnie stosować.

W każdym rozdziale umieszczone są zadania o różnym stopniu trudności. Poszczególne szczeble zostały tak oznaczone:

- I pierwszy stopień wtajemniczenia,
- II drugi stopień wtajemniczenia,
- III trzeci (najtrudniejszy) stopień wtajemniczenia.

Zbiór zawiera 105 zadań z pełnymi rozwiązaniami oraz 98 zadań do samodzielnego rozwiązania; te ostatnie umieszczone są na końcu poszczególnych rozdziałów. Aby móc się zmierzyć z zebranymi tu zadaniami, trzeba – naturalnie – mieć pewną elementarną wiedzę na temat równań, nierówności i układów równań.

Książka przyda się uczniom przygotowującym się do egzaminu maturalnego lub do startu w konkursach matematycznych.

Od wielu lat prowadzę dodatkowe zajęcia z matematyki i tego typu zadania często rozwiązuję z uczniami. Niniejszy zbiór napisałem na podstawie wieloletniego doświadczenia, jestem przekonany, że może się przydać nauczycielom w pracy na lekcjach czy kółkach.

Warto zauważyć, że metoda podstawiania jest jedną z ważniejszych metod przy obliczaniu całek i rozwiązywaniu równań różniczkowych. Opanowanie tej metody ułatwi więc także naukę na studiach wyższych.

Życzę udanej pracy z zadaniami
Tomasz Grębski

1 Podstawienie zmiennej pomocniczej w równaniach

Zajmiemy się podstawieniem zmiennej pomocniczej w równaniach różnego typu. Przedstawione przykłady pokażą, jak stosować podstawienie oraz jakie założenia pociąga za sobą wprowadzenie do równania nowej zmiennej. Ten rozdział jest w książce najbardziej rozbudowany, ponieważ to tutaj pojawia większość rodzajów podstawień, w innych rozdziałach już tylko je wykorzystujemy, czasem modyfikując.

1.1. Równania wielomianowe

I Zadanie 1.1.

Rozwiąż równanie: $x^4 - 18x^2 + 32 = 0$.

Rozwiązanie:

$$x^4 - 18x^2 + 32 = 0$$

$$(x^2)^2 - 18x^2 + 32 = 0$$

Wyodrębniamy element x^2 .

$$x^2 = t, \text{ gdzie } t \geq 0$$

Podstawiamy zmienną pomocniczą, dodając odpowiednie założenie.

$$t^2 - 18t + 32 = 0$$

$$\Delta = 196, \sqrt{\Delta} = 14$$

$$(t = 2 \vee t = 16) \wedge t \geq 0 \Rightarrow t = 2 \vee t = 16$$

A zatem

$$(t = 2 \vee t = 16) \wedge x^2 = t$$

$$x^2 = 2 \vee x^2 = 16$$

Wracamy do pierwotnej zmiennej.

$$x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2} \vee x = 4 \vee x = -4$$

Odpowiedź: $x \in \{-4, -\sqrt{2}, \sqrt{2}, 4\}$.

I Zadanie 1.2.

Rozwiąż równanie: $x^4 + 14x^2 - 32 = 0$.

Rozwiązanie typowe:

$$x^4 + 14x^2 - 32 = 0$$

$$(x^2)^2 + 14x^2 - 32 = 0$$

Wyodrębniamy element x^2 .

$$x^2 = t, \text{ gdzie } t \geq 0$$

Podstawiamy nową zmienną, dodając odpowiednie założenie.

$$t^2 + 14t - 32 = 0$$

$$\Delta = 324, \sqrt{\Delta} = 18$$

$$(t = -16 \vee t = 2) \wedge t \geq 0 \Rightarrow t = 2$$

A więc

$$t = 2 \wedge x^2 = t$$

$$x^2 = 2$$

Wracamy do zmiennej x .

$$x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2}$$

Odpowiedź: $x \in \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$.

Rozwiązanie alternatywne: Często się zdarza, że podczas podstawiania nowej zmiennej zapominamy o założeniach. Jednak w wielu przypadkach rozwiązanie można jeszcze „uratować”. Przeanalizujmy ponownie poprzednie zadanie.

$$x^4 + 14x^2 - 32 = 0$$

$$(x^2)^2 + 14x^2 - 32 = 0$$

Wyodrębniamy element x^2 .

$$x^2 = t$$

Podstawiamy nową zmienną, zapominając o założeniu.

$$t^2 + 14t - 32 = 0$$

$$\Delta = 324, \sqrt{\Delta} = 18$$

$$t = -16 \vee t = 2$$

A zatem

$$(t = -16 \vee t = 2) \wedge x^2 = t$$

$$x^2 = -16 \vee x^2 = 2$$

Wracamy do pierwotnej zmiennej.

Tu właśnie możemy „uratować” nasze rozwiązanie. Wystarczy zauważyć, że pierwsze z tych równań nie ma rozwiązań, ponieważ kwadrat dowolnej liczby nie może być ujemny. A więc

$$x \in \emptyset \vee x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2}$$

Odpowiedź: $x \in \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$.

I Zadanie 1.3.

Rozwiąż równanie: $x^4 + 5x^2 + 6 = 0$.

Rozwiązanie:

$$x^4 + 5x^2 + 6 = 0$$

$$(x^2)^2 + 5x^2 + 6 = 0$$

Wyodrębniamy element x^2 .

$$x^2 = t, \text{ gdzie } t \geq 0$$

Podstawiamy nową zmienną, dodając odpowiednie założenie.

$$t^2 + 5t + 6 = 0$$

$$\Delta = 1, \sqrt{\Delta} = 1$$

$$(t = -3 \vee t = -2) \wedge t \geq 0 \Rightarrow t \in \emptyset \Rightarrow x \in \emptyset$$

Wracamy do zmiennej x .

Odpowiedź: Równanie nie ma rozwiązań.

Zadania do samodzielnego rozwiązania

- I 1.1. Rozwiąż równanie: $x^4 + x^2 - 2 = 0$.
- I 1.2. Rozwiąż równanie: $2x^4 - x^2 - 1 = 0$.
- I 1.3. Rozwiąż równanie: $25x^4 - 10x^2 + 1 = 0$.
- I 1.4. Rozwiąż równanie: $x^6 - 17x^3 + 16 = 0$.
- I 1.5. Rozwiąż równanie: $16x^8 - 15x^4 - 1 = 0$.
- II 1.6. Rozwiąż równanie: $x^9 - 3x^6 - 6x^3 + 8 = 0$.
- I 1.7. Rozwiąż równanie: $-3(-x^4 + 3x^2 - 3) = 6 + (3x^2 - x^4 - 1)^2$.
- II 1.8. Rozwiąż równanie: $(x^2 + 3x + 3)(2x^2 + 6x - 1) + 3 = 0$.
- II 1.9. Rozwiąż równanie: $x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 5x + 1 = 0$.
- III 1.10. Rozwiąż równanie: $x^6 - 10x^5 + 47x^4 - 100x^3 + 47x^2 - 10x + 1 = 0$.
- II 1.11. Rozwiąż równanie: $2(x - 3)^2 - 1 = -|x - 3|$.
- II 1.12. Rozwiąż równanie: $(x + 5)^2 = 2 - |x + 5|$.
- II 1.13. Rozwiąż równanie: $|x + 1|^5 = |x + 1|$.
- I 1.14. Rozwiąż równanie: $x + 7\sqrt{x} = 18$.
- II 1.15. Rozwiąż równanie: $x - 2 - 3\sqrt{x + 6} = 0$.
- II 1.16. Rozwiąż równanie: $\sqrt[3]{x^2} - 6 = 5\sqrt[3]{x}$.
- II 1.17. Rozwiąż równanie: $\sqrt[3]{x^2 + 9 + 6x} - 12 = \sqrt[3]{x + 3}$.
- III 1.18. Rozwiąż równanie: $5\sqrt[3]{4 - x^2} - \sqrt[3]{(2 + x)^2} = 4\sqrt[3]{(2 - x)^2}$.
- III 1.19. Rozwiąż równanie: $\sqrt[3]{x + 5} - \sqrt[6]{x^2 - 25} = \sqrt[3]{x - 5}$.
- II 1.20. Rozwiąż równanie: $3\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}} + 3\sqrt[4]{\frac{x+1}{x-1}} = 10$.
- II 1.21. Rozwiąż równanie: $\sqrt[5]{\frac{x^2-4}{x+1}} - 3\sqrt[5]{\frac{x+1}{x^2-4}} = -2$.
- II 1.22. Rozwiąż równanie: $5\sqrt[4]{x^2 - 4} = 6 - \sqrt{x^2 - 4}$.
- II 1.23. Rozwiąż równanie: $x^2 + 3x - \frac{3}{2}\sqrt{x^2 + 3x - 4} = 4$.
- II 1.24. Rozwiąż równanie: $x^2 + 3x - 4 = 5\sqrt{x^2 + 3x - 4}$.

Odowiedzi

1. Podstawienie zmiennej pomocniczej w równaniach

1.1. Podstawienie: $t = x^2$, gdzie $t \geq 0$.

Odpowiedź: $x \in \{-1, 1\}$.

1.2. Podstawienie: $t = x^2$, gdzie $t \geq 0$.

Odpowiedź: $x \in \{-1, 1\}$.

1.3. Podstawienie: $t = x^2$, gdzie $t \geq 0$.

Odpowiedź: $x \in \left\{-\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right\}$.

1.4. Podstawienie: $t = x^3$, gdzie $t \in \mathbf{R}$.

Odpowiedź: $x \in \{1, 2\sqrt[3]{2}\}$.

1.5. Podstawienie: $t = x^4$, gdzie $t \geq 0$.

Odpowiedź: $x \in \{-1, 1\}$.

1.6. Podstawienie: $t = x^3$, gdzie $t \in \mathbf{R}$.

Odpowiedź: $x \in \{1, -\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}\}$.

1.7. Podstawienie: $t = -x^4 + 3x^2 - 1$, gdzie $t \in \mathbf{R}$.

Odpowiedź:

$$x \in \left\{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}, -\sqrt{\frac{3+\sqrt{17}}{2}}, \sqrt{\frac{3+\sqrt{17}}{2}}\right\}.$$

1.8. Podstawienie: $t = x^2 + 3x$, gdzie $t \in \mathbf{R}$.

Odpowiedź: $x \in \{-3, 0\}$.

1.9. Podstawienie: $t = x + \frac{1}{x}$, gdzie $t \in \mathbf{R}$.

Odpowiedź: $x \in \left\{1, \frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

1.10. Podstawienie: $t = x + \frac{1}{x}$, gdzie $t \in \mathbf{R}$.

Odpowiedź: $x \in \{2 - \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3}\}$.

1.11. Podstawienie: $t = |x - 3|$, gdzie $t \geq 0$.

Odpowiedź: $x \in \left\{\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right\}$.

Michał Szurek

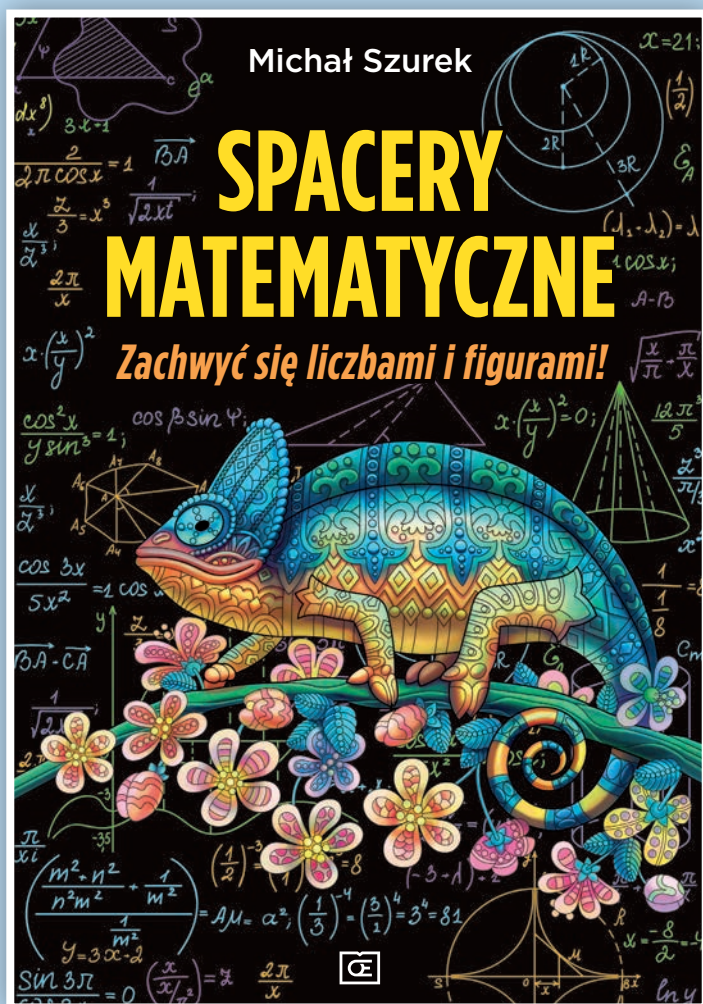
PODRÓŻE MATEMATYCZNE



format 165 x 235 mm
stron 296

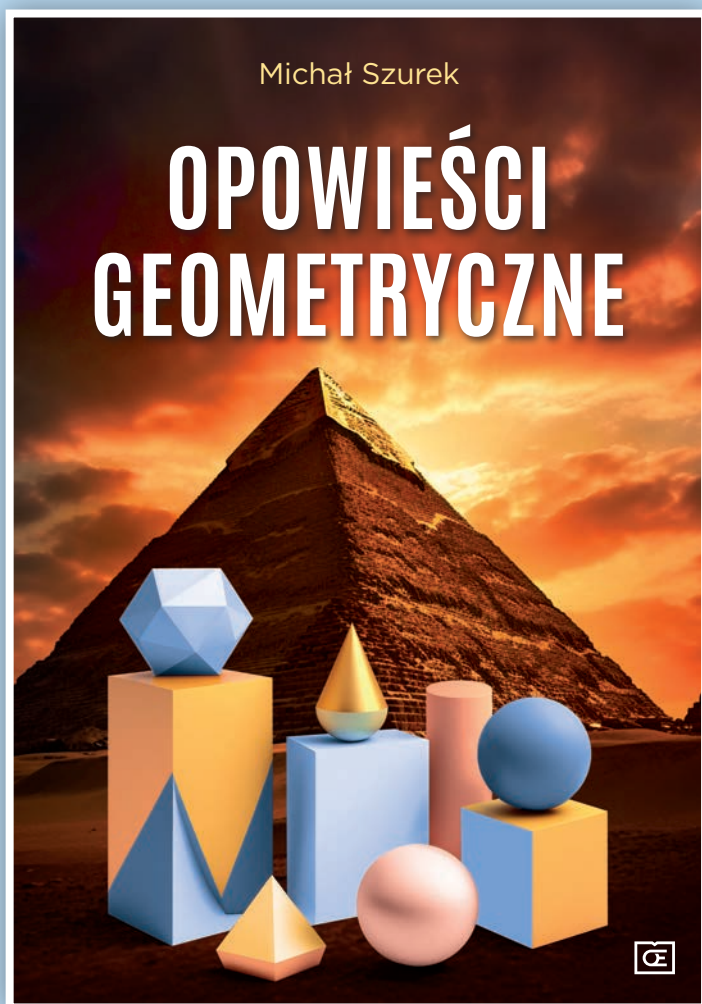
PODRÓŻE MATEMATYCZNE to książka nie tylko dla ucznia i nauczyciela, lecz dla wszystkich, którzy interesują się matematyką i reagują na jej wyzwania – i dla młodszych, i dla starszych.

Z nieprzebranego dorobku matematyki Autor wybrał kilkadziesiąt arcydzieł – zadań, twierdzeń, teorii – i w barwny sposób opowiada o nich z wielu punktów widzenia. A czyni to tak, by początkującego czytelnika zainteresować, a czytelnika dojrzałego – nie znudzić. Autor ukazuje matematykę przyjemną i intrygującą. Treść książki oscyluje wokół programu szkolnego, chociaż im wyższy numer rozdziału, tym „odległość” od szkoły większa, a w rozdziale 17 jest wręcz „kosmiczna”. Książka i jej rozdziały są napisane zgodnie z zasadą stopniowania trudności. Znajdziemy tu równania, tradycyjne zadania w nowym ujęciu, zadania logiczne, kolorową geometrię i wycieczkę w dziwne przestrzenie. Trudne miejsca nie powinny nikogo odstraszać.



format 165 x 235 mm
stron 288

SPACERY MATEMATYCZNE to barwny przewodnik po matematyce, ukazujący ją z innej niż na lekcjach strony. Profesor Michał Szurek – erudyta i pasjonat – podczas 12 spacerów snuje opowieści, z niesłychaną lekkością, wokół wybranych zagadnień matematycznych, wplata ciekawostki i anegdoty, nawiązuje do innych dziedzin nauki. Wszystkie treści oscylują wokół szkolnego programu nauczania, czasem oddalając się od niego, by za chwilę znowu się przybliżyć. A cel jest jeden: zainteresować czytelnika matematyką, pomóc ją zrozumieć i się z nią zaprzyjaźnić. Dzięki tej książce uczeń zachwyci się matematyką wokół siebie, a nauczyciel będzie miał niewyczerpane źródło pomysłów na atrakcyjne lekcje.



format 165 x 235 mm
stron 232

OPOWIEŚCI GEOMETRYCZNE to znakomita lektura dla uczniów i nauczycieli matematyki, dla studentów tego kierunku i wszystkich wielbicieli Królowej Nauk.

Książka jest opisem drobnego wycinka świata geometrii. Z ogromnej liczby geometrycznych perełek autor wybrał kilkanaście pojęć/twierdzeń matematycznych i o każdym z nich snuje odrębną opowieść. Poza historią omawianego problemu, Czytelnik znajdzie tu jego rozmaite powiązania, konteksty, zadania i towarzyszące anegdoty, a także mnóstwo rysunków.

„Spójrzmy na trójkąt. Trzy odcinki, trzy punkty. Ale to tylko przykrycie, obudowa, skorupka. Pod spodem, we wnętrzu, bardzo wiele się dzieje: punkty biegają po wysokościach, symetralnych i dwusiecznych, linie proste łączą się w pęki, kręcą się okręgi, muskają je proste styczne, a i parabole się trafiają. Widzimy wszystko plastycznie i ze szczegółami – jak góry, które schodziliśmy wzdłuż i w szerz.”

Michał Szurek

Między matematyką a humanistyką



format 165 x 235 mm
stron 320

Książka składa się z 44 rozdziałów, które można nazwać esejami humanistyczno-matematycznymi.

Jej autor – profesor Michał Szurek – to matematyk i prawdziwy humanista. Wykorzystuje swoją wielką erudycję i z niezwykłą lekkością opowiada o matematyce. Pokazuje, jak silne są jej związki z historią, filozofią, literaturą i sztuką. Cytaty z poezji i prozy, zaskakujące przykłady i komentarze oraz anegdoty po mistrzowsku przeplatają się z zagadnieniami i problemami nie tylko matematycznymi.

ABC GeoGebry

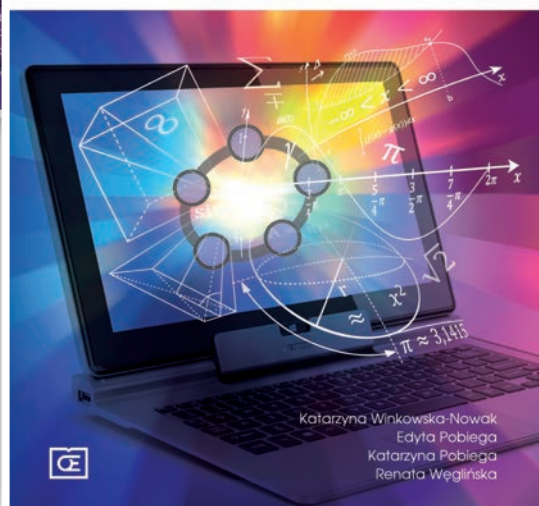
Poradnik dla początkujących



format 165 x 235 mm
stron 132

The ABC of GeoGebra

A Beginner's Guide



Ten poradnik jest przeznaczony dla początkujących adeptów i zainteresowanych GeoGebra, jej możliwościami i przydatnością w nauczaniu i uczeniu się matematyki na wszystkich poziomach edukacji. GeoGebra jest bezpłatnym oprogramowaniem matematycznym, dostępnym on-line i off-line w systemach operacyjnych Windows, Linux i Mac OSX, na komputerach i na urządzeniach przenośnych (tablety, smartfony). Poradnik ten dotyczy stosowania GeoGebry przy użyciu komputerów z systemem operacyjnym Windows.

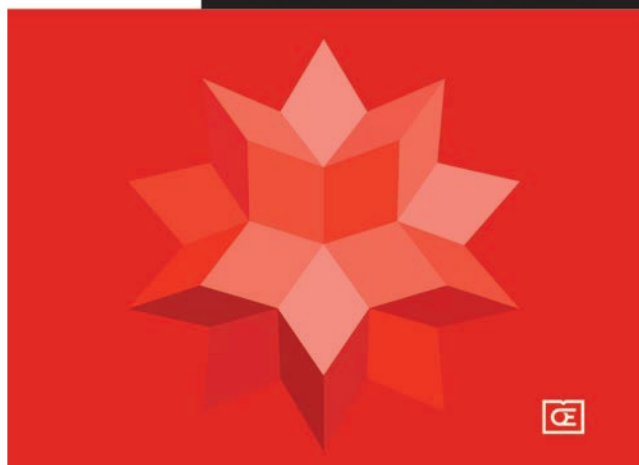
Poradnik dostępny również w języku angielskim.

Tomasz Grębski



Praktyczny przewodnik po programie
dla każdego

MATEMATYKA



format 165 x 235 mm
stron 216

Program ten swe korzenie ma w słynnym programie Mathematica, który doskonale łączy obliczenia numeryczne i symboliczne, interpretację graficzną wyników, język programowania, dokumentację i możliwość publikacji pracy. Dzięki bogactwu funkcji jest świetnym narzędziem pracy matematyków, fizyków, biologów, chemików i innych.

Program jest przeznaczony zarówno dla uczniów, studentów, jak i dla nauczycieli. Z własnego doświadczenia wiem, jak przyjemnie pracuje się z programem wspólnie z uczniami. Nauczyciel bez wątpienia staje się nowoczesny, a uczniów to zachęca do pracy. Krótko mówiąc – przyjemne z pożytecznym.

W tym Poradniku zajmujemy się stroną matematyczną programu. A zatem stawiamy sobie pytanie: w czym może pomóc nam Wolfram Alpha (jeśli chodzi o matematykę) oraz w jaki sposób z niego korzystać?

Wolfram Alpha m.in. rozwiązuje równania i nierówności, układy równań i nierówności, oblicza pochodne i całki, rysuje funkcje oraz wypisuje ich najważniejsze własności. To oczywiście przysłowiowa „kropla w morzu” jego możliwości.

MATEMATYKA

w liceum i technikum

ZBIORY ZADAŃ



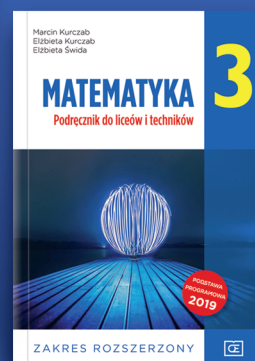
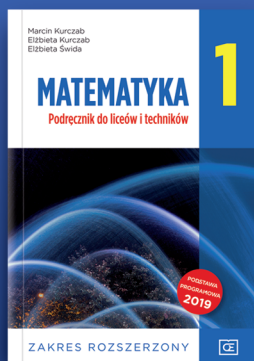
Solidnie
od
podstaw



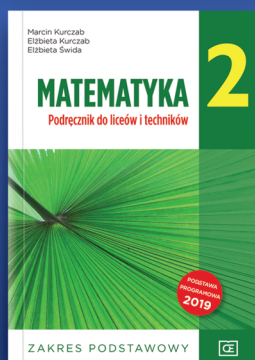
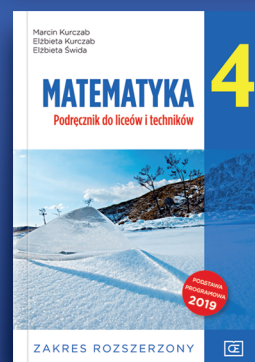
MATEMATYKA

w liceum i technikum

PODRECZNIKI



Solidnie
od
podstaw



Matura 2026 MATEMATYKA

Oferta dopasowana
do każdego maturzysty



Polecamy także



www.pazdro.com.pl



**OFICyna
EDUKACYJNA**
KRZYSZTOF PAZDRO