Matematyka

Informator
Matura 2023

• sięgnij • zamów • poćwicz • zdaj

OFICYNA EDUKACYJNA
KRZYSZTOF PAZDRO

NASI PRZEDSTAWICIELE

Jeżeli chcielibyście Państwo dowiedzieć się więcej o naszych książkach, to przedstawiciele regionalni Oficyny Edukacyjnej * Krzysztof Pazdro:

- **przyjadą** do Państwa szkoły, aby przedstawić ofertę wydawnictwa
- **dokonają** wśród grona nauczycieli prezentacji podręczników z jednego lub z kilku przedmiotów
- **porozmawiają** indywidualnie z każdym nauczycielem i pomogą w wyborze podręczników
- **udzielą** szczegółowych informacji na temat konferencji i warsztatów organizowanych przez wydawnictwo
- **przedstawią** najkorzystniejsze warunki zakupu publikacji Oficyny.

REGIONY

1

Lubuski
Zachodniopomorski
Pomorski (zachód)
Powiaty: bytowski, chojnicki, człuchowski, kartuski, kościerski, lęborski, pucki, Słupsk, słupski, wejherowski, Gdańsk, Gdynia, Sopot
Wielkopolski (zachód)
Powiaty: czarnkowsko-trzcianecki, grodziski, międzychodzki, nowotomyski, szamotulski, wolsztyński

692-403-384
lubuskie@pazdro.com.pl

2

Dolnośląski
Opolski
Śląski

692-490-546
dolnoslaskie@pazdro.com.pl

3

Wielkopolski
Łódzki
Kujawsko-Pomorski

694-498-275
wielkopolskie@pazdro.com.pl

4

Mazowiecki (północ)
Powiaty: ciechanowski, gostyniński, makowski, mławski, ostrołęcki, Ostrołęka, ostrowski, Płock, płocki, płoński, przasnyski, sierpecki, żuromiński
Podlaski
Warmińsko-Mazurski
Pomorski (wschód)
Powiaty: gdański, kwidzyński, malborski, sztumski, nowodworski, starogardzki, tczewski

694-498-274
mazowieckie@pazdro.com.pl

5

Mazowiecki (centrum)
Powiaty: białobrzeski, garwoliński, grodziski, grójecki, legionowski, łosicki, miński, nowodworski, otwocki, piaseczyński, pruszkowski, pułtuski, Siedlce, siedlecki, sochaczewski, sokołowski, Warszawa, warszawski zachodni, węgrowski, wołomiński, wyszkowski, żyrardowski
Lubelski (północ)
Powiaty: bialski, Biała Podlaska, łukowski, parczewski, radzyński
Podlaski (południe)
Powiat: siemiatycki

666-376-451
warszawa@pazdro.com.pl

6

Lubelski
Podkarpacki
Świętokrzyski
Małopolski
Mazowiecki (południe)
Powiaty: kozienicki, lipski, przysuski, Radom, radomski, szydłowiecki, zwoleński

692-490-544
lubelskie@pazdro.com.pl

Szanowni Państwo,

oto informator o naszych pozycjach wydawniczych z matematyki, które są przeznaczone dla uczniów liceów i techników, przygotowujących się do **nowej matury w 2023 roku**, według zasad obowiązujących od roku szkolnego 2022/2023.

Wybrane fragmenty książek ilustrują zakres i sposób opracowania treści nauczania, ujętych w podstawie programowej obowiązującej w szkołach ponadpodstawowych od września 2019 roku. W poszczególnych pozycjach prezentujemy: okładkę, spis treści, wstęp do książki, przykładowy fragment opracowania treści i odpowiedni fragment odpowiedzi.

Na końcu informatora przedstawiamy kilka pozycji przeznaczonych dla uczniów, nauczycieli i dla tych, którzy szczególnie interesują się matematyką oraz współczesnymi narzędziami informatycznymi, przydatnymi w jej nauczaniu i zastosowaniu.

Gorąco zachęcamy do korzystania z naszej oferty. Jesteśmy przekonani, że pozycje te pomogą uczniom skutecznie przygotować się do matury i osiągnąć sukces podczas egzaminu.

Wydawca

OFICYNA EDUKACYJNA
KRZYSZTOF PAZDRO

ul. Kościańska 4, 01-695 Warszawa
tel. 22 560 81 00
e-mail: pazdro@pazdro.com.pl
www.pazdro.com.pl

SPIS TREŚCI

Uczniom liceów i techników polecamy także:


Matura
od 2023 r.
MATEMATYKA
ZBIÓR ZADAŃ MATURALNYCH
Lata 2010–2022
Poziom podstawowy
Dodatkowo 105 zadań nowego typu autorstwa Ryszarda Pagacza
959 zadań
Centralnej Komisji Egzaminacyjnej
z rozwiązaniami
Opracował Ryszard Pagacz

Spis treści

Wstęp

Od roku 2010 matematyka na poziomie podstawowym jest zdawana na maturze jako przedmiot obowiązkowy. Od tej pory upłynęło już 12 lat. Jest to wystarczający czas, by na podstawie przeglądu arkuszy maturalnych zorientować się, jakiego typu zadań i o jakiej skali trudności może spodziewać się na egzaminie przyszły maturzysta.

W tym zbiorze zebrałem zadania z lat 2010–2022, które występowały w arkuszach maturalnych CKE na poziomie podstawowym. Zadania zostały jednak podzielone i uporządkowane według rozdziałów, występujących w typowym programie nauczania matematyki w szkole. Obok numeru każdego zadania jest wskazówka, z arkusza której matury dane zadanie pochodzi (miesiąc, rok, nr zadania i liczba punktów). Do wszystkich zadań podałem szkice rozwiązań, również do zadań zamkniętych.

Ten zbiór zadań może być świetnym materiałem do samodzielnego przygotowania się do egzaminu. Może również być pomocny nauczycielowi w zaplanowaniu cyklu powtórzeń przygotowujących uczniów do matury.

Lata 2020–2021 przejdą do historii m.in. z powodu COVID-19 i zdalnego nauczania. Sesja maturalna 2020 też była wyjątkowa, ponieważ odbyła się z miesięcznym przesunięciem. Egzaminy maturalne w latach 2021–2022 zostały przeprowadzone na podstawie nieco zmodyfikowanych podstaw programowych. Do zbioru zadań załączono zadania pochodzące z arkuszy maturalnych w terminach dodatkowych (lipiec 2020 i czerwiec 2021 i 2022), z arkuszy matury poprawkowej (wrzesień 2020 i 2021) oraz z arkuszy diagnostycznych i pokazowych (2014 i 2021, 2022).

Przed nami matura 2023 i całkiem nowe, niespotykane dotąd, typy zadań maturalnych. Chcąc wyjść naprzeciw tej sytuacji do każdej części tematycznej dołączyłem po 5 zadań nowego typu, a do geometrii płaskiej aż 15.

Chcąc przybliżyć przyszłym zdającym nową typologię zadań załączyłem Aneks, w którym można zapoznać się z nowymi typami zadań na bazie arkusza matury dodatkowej 2022. Swego rodzaju „tłumaczenie" wykonał redaktor Tomasz Szwed.

Mam nadzieję, że ten bardzo bogaty materiał pozwoli uczniom skutecznie przygotować się do egzaminu. Niech przyszli zdający nie boją się nowej, na pewno innej i trudniejszej matury z matematyki. Starajcie się zrozumieć treści matematyczne. I po prostu ćwiczcie.

Autor

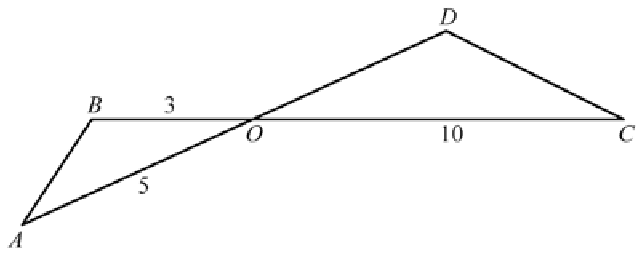
Zadanie 14.104. [arkusz pokazowy CKE, marzec 2022, zadanie 16. (1 pkt)]

Dany jest trójkąt ABC, w którym $|AB| = 6$, $|BC| = 5$, $|AC| = 10$.
Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. **Zaznacz P**, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe.

Cosinus kąta ABC jest równy $(-0{,}65)$.	**P**	**F**
Trójkąt ABC jest rozwartokątny.	**P**	**F**

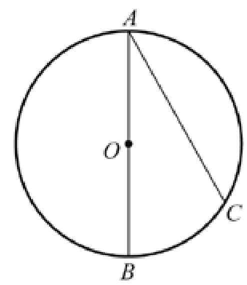
Zadanie 14.105. [arkusz pokazowy CKE, marzec 2022, zadanie 18. (1 pkt)]

Odcinki AD i BC przecinają się w punkcie O. W trójkątach ABO i ODC zachodzą związki: $|AO| = 5$, $|BO| = 3$, $|OC| = 10$, $|\sphericalangle OAB| = |\sphericalangle OCD|$ (zobacz rysunek).
Oblicz długość boku OD trójkąta ODC. **Zapisz** obliczenia.



Zadanie 14.106. [arkusz pokazowy CKE, marzec 2022, zadanie 21. (1 pkt)]

Odcinek AB jest średnicą okręgu o środku w punkcie O i promieniu $r = 8$ (zobacz rysunek). Cięciwa AC ma długość $8\sqrt{3}$.



Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Miara kąta BAC jest równa

A. 30° **B.** 45°
C. 15° **D.** 60°

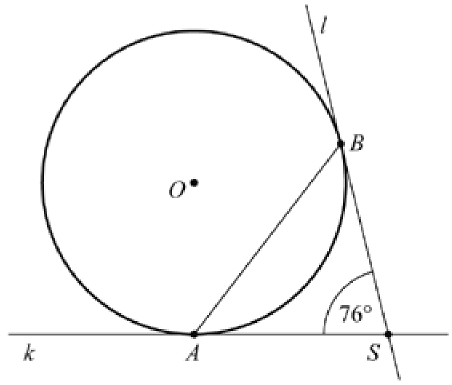
Zadanie 14.107. [arkusz pokazowy CKE, marzec 2022, zadanie 23. (1 pkt)]

Dane są dwa trójkąty podobne ABC i KLM o polach równych – odpowiednio – P oraz $2P$. Obwód trójkąta ABC jest równy x.
Dokończ zdanie tak, aby było prawdziwe. **Wybierz** odpowiedź **A** albo **B** oraz jej uzasadnienie **1.**, **2.** albo **3.**
Obwód trójkąta KLM jest równy

A.	$\sqrt{2}\cdot x$,	ponieważ stosunek obwodów trójkątów podobnych jest równy	**1.**	kwadratowi stosunku pól tych trójkątów.
			2.	pierwiastkowi kwadratowemu ze stosunku pól tych trójkątów.
B.	$2x$,		**3.**	stosunkowi pól tych trójkątów.

Zadanie 14.108. [arkusz pokazowy CKE, marzec 2022, zadanie 24. (1 pkt)]

Punkty A oraz B leżą na okręgu o środku O. Proste k i l są styczne do tego okręgu w punktach – odpowiednio – A i B. Te proste przecinają się w punkcie S i tworzą kąt o mierze 76° (zobacz rysunek).



Dokończ zdanie. **Wybierz** właściwą odpowiedź spośród podanych.

Miara kąta OBA jest równa

A. 52° **B.** 26°
C. 14° **D.** 38°

Zadania dodatkowe

Zadanie D14.1. (1 pkt)

Przyprostokątne w trójkącie prostokątnym mają długości 3 oraz $3\sqrt{3}$.

Oceń prawdziwość poniższych zdań. **Zaznacz P**, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe.

1.	Przeciwprostokątna ma długość $5\sqrt{3}$.	**P**	**F**
2.	Najmniejszy kąt w tym trójkącie ma miarę 30°.	**P**	**F**

Zadanie D14.2. (1 pkt)

Dany jest trójkąt ABC, w którym $|AC| = 2$, $|AC| = 3$ i $|\sphericalangle ACB| = 120°$.

Wybierz zdanie prawdziwe A, B albo C oraz zdanie 1., 2. albo 3. uzasadniające takie stwierdzenie.

A.	Długość boku AB jest równa 4.	**1.**	Twierdzenie cosinusów $\lvert AB\rvert^2 = \lvert AC\rvert^2 + \lvert BC\rvert^2 - 2\cdot\lvert AC\rvert\cdot\lvert BC\rvert\cdot\cos 120°$
B.	Długość boku AB jest równa $\sqrt{7}$.	**2.**	Twierdzenie cosinusów $\lvert AB\rvert^2 = \lvert AC\rvert^2 + \lvert BC\rvert^2 - \lvert AC\rvert\cdot\lvert BC\rvert\cdot\cos 120°$
C.	Długość boku AB jest równa $\sqrt{19}$.	**3.**	Twierdzenie cosinusów $\lvert AB\rvert^2 = \lvert AC\rvert^2 + \lvert BC\rvert^2 + 2\cdot\lvert AC\rvert\cdot\lvert BC\rvert\cdot\cos 120°$

ZADANIA

Zadanie D14.3. (2 pkt)

Dokończ zdanie. Zaznacz dwie odpowiedzi, tak aby dla każdej z nich dokończenie zdania było prawdziwe.
Liczby a, b, c mogą być długościami boków pewnego trójkąta, dla

A. $(a, b, c) = (1, 2, 3)$.

B. $(a, b, c) = (2^8, 2^9, 2^{10})$.

C. $(a, b, c) = (\sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7})$.

D. $(a, b, c) = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$.

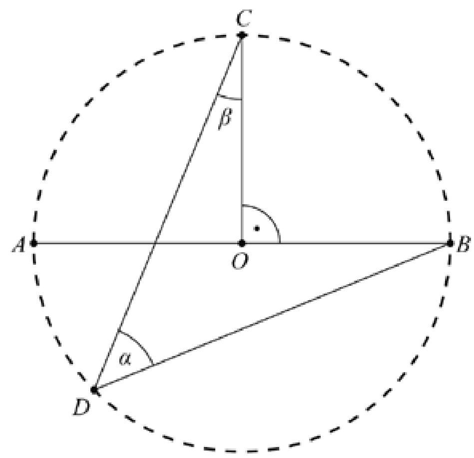
E. $(a, b, c) = \left(\frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}\right)$.

F. $(a, b, c) = (2^{-3}, 2^{-2}, 2^{-1})$.

G. $(a, b, c) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}-1}, \sqrt{2}+1, 2+2\sqrt{2}\right)$.

Zadanie D14.4. (1 pkt)

Punkty A, B, C i D leżą na okręgu o środku O (zobacz rysunek). Cięciwa AB jest średnicą tego okręgu oraz $|CD| = |BD|$ i $|\sphericalangle BOC| = 90°$.



Dokończ zdania. Zaznacz odpowiedź spośród A–C oraz odpowiedź spośród D–F.
Kąt CDB ma miarę

A. $\alpha = 45°$ **B.** $\alpha = 40°$

C. $\alpha = 42{,}5°$

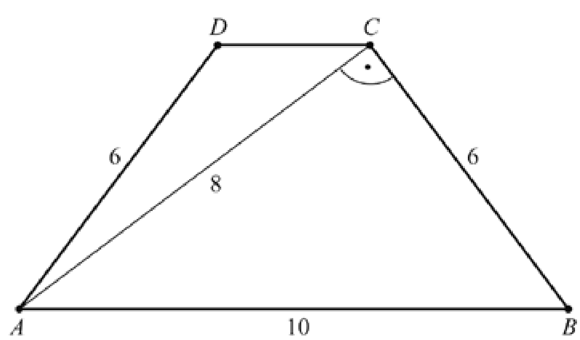
Kąt DCO ma miarę

D. $\beta = 21°$ **E.** $\beta = 22°$

F. $\beta = 22{,}5°$

Zadanie D14.5. (2 pkt)

Dany jest trapez równoramienny $ABCD$ taki jak na rysunku, w którym $|AB| = 10$, $|AC| = 8$, $|BC| = |AD| = 6$ i $|\sphericalangle ACB| = 90°$.



Dokończ zdania. Zaznacz odpowiedź spośród **A–D** oraz odpowiedź spośród **E–H**.
Promień okręgu opisanego na trójkącie ABC wynosi

A. 6 **B.** 5 **C.** 4,5 **D.** 4

Promień okręgu opisanego na trójkącie ACD wynosi

E. 3 **F.** 4 **G.** 5 **H.** 6


Matura
od 2023 r.
MATEMATYKA
ZBIÓR ZADAŃ MATURALNYCH
Lata 2002–2022
Poziom rozszerzony
500 zadań
Centralnej Komisji Egzaminacyjnej
z rozwiązaniami
Opracował Ryszard Pagacz

Spis treści

Wstęp

W zbiorze zebrałem zadania z lat 2002–2022, które występowały w arkuszach maturalnych CKE na poziomie rozszerzonym. Są tu zadania pochodzące z egzaminów maturalnych w terminach głównych i dodatkowych, z egzaminów próbnych przygotowanych przez CKE, z diagnozy przedmaturalnej z lat 2020–2021, informatora o egzaminie maturalnym z matematyki z roku 2021 oraz z arkusza pokazowego z roku 2022. Zadania zostały jednak podzielone i uporządkowane według rozdziałów, występujących w typowym programie nauczania matematyki w szkole. Obok numeru każdego zadania jest wskazówka, z arkusza której matury dane zadanie pochodzi (miesiąc, rok, nr zadania i liczba punktów).

Do wszystkich zadań podałem szkice rozwiązań.

Ten zbiór zadań może być dobrym materiałem do samodzielnego przygotowania się do egzaminu. Może również być pomocny nauczycielowi w zaplanowaniu cyklu powtórzeń przygotowujących uczniów do matury.

Mam nadzieję, że ten bogaty materiał pozwoli uczniom skutecznie przygotować się do egzaminu.

Autor

Zadanie 2.23. [matura, maj 2019, zadanie 6. (5 pkt)]

Wielomian określony wzorem $W(x) = 2x^3 + (m^3 + 2)x^2 - 11x - 2(2m + 1)$ jest podzielny przez dwumian $(x - 2)$ oraz przy dzieleniu przez dwumian $(x + 1)$ daje resztę 6. Oblicz m oraz pierwiastki wielomianu $W(x)$ dla wyznaczonej wartości m.

Zadanie 2.24. [test diagnostyczny CKE, marzec 2021, zadanie 10. (4 pkt)]

Reszty z dzielenia wielomianu $W(x) = x^4 + bx^3 + cx^2$ przez dwumiany $(x - 2)$ i $(x - 3)$ są odpowiednio równe (-8) oraz (-18). Oblicz resztę z dzielenia wielomianu W przez dwumian $(x - 4)$.

Zadanie 2.25. [matura, czerwiec 2021, zadanie 12. (5 pkt)]

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie

$$(x - 3)(x^2 + (m - 1)x - 6m^2 + 2m) = 0$$

ma dokładnie dwa rozwiązania.

Zadanie 2.26. [arkusz pokazowy CKE, marzec 2022, zadanie 4. (5 pkt)]

Dane jest równanie

$$(x - 6)\left[(m - 2)x^2 - 4(m + 3)x + m + 1\right] = 0$$

z niewiadomą x i parametrem $m \in \boldsymbol{R}$.

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których to równanie ma trzy rozwiązania rzeczywiste tego samego znaku. Zapisz obliczenia.

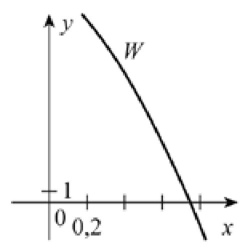
Zadanie 2.27. [informator maturalny CKE 2021, zadanie 3. (3 pkt)]

Na diagramie (rysunek obok) przedstawiono fragment wykresu wielomianu W określonego wzorem

$$W(x) = 4x^3 - 19x^2 - 12x + 18$$

dla każdego $x \in \boldsymbol{R}$.

Oblicz wszystkie pierwiastki wielomianu W.



Zadanie 2.28. [informator maturalny CKE 2021, zadanie 5. (3 pkt)]

Wielomian W jest określony wzorem

$$W(x) = (x-1)(x^2 - mx + m - 1) \text{ dla każdego } x \in \boldsymbol{R}.$$

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których wielomian W ma dokładnie jeden pierwiastek rzeczywisty.

Zadanie 2.29. [matura, czerwiec 2022, zadanie 13. (6 pkt)]

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie

$$(x - 4)\left[x^2 + (m - 3)x + m^2 - m - 6\right] = 0$$

ma trzy różne rozwiązania rzeczywiste x_1, x_3 oraz x_3, spełniające warunek

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 > x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 5m - 51$$

Zadanie 2.23.

Rozwiązanie jest w zadaniu 2.22.

Odp. $m = 1,\ x_1 = -3,\ x_2 = -\frac{1}{2},\ x_3 = 2.$

Zadanie 2.24.

Reszty z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez dwumiany $(x-2)$ i $(x-3)$ są odpowiednio równe (-8) oraz (-18) wtedy i tylko wtedy, gdy $\begin{cases} W(2) = -8 \\ W(3) = -18 \end{cases}$

$W(2) = 16 + 8b + 4c = 4(4 + 2b + c)$

$W(3) = 81 + 27b + 9c = 9(9 + 3b + c)$

$$\begin{cases} W(2) = -8 \\ W(3) = -18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 + 2b + c = -2 \\ 9 + 3b + c = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b + c = -6 \\ 3b + c = -11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -5 \\ c = 4 \end{cases}$$

$W(4) = 4^4 - 5 \cdot 4^3 + 4 \cdot 4^2 = 4^3(4 - 5 + 1) = 0$

Odp. Resztę z dzielenia wielomianu W przez dwumian $(x-4)$ jest równa zero.

Zadanie 2.25.

Równanie $(x-3)\left(x^2 + (m-1)x - 6m^2 + 2m\right) = 0$ ma dokładnie dwa rozwiązania wtedy i tylko wtedy, gdy:

1. Równanie $\overbrace{x^2 + (m-1)x - 6m^2 + 2m = 0}^{(*)}$ ma jedno rozwiązanie różne od 3.
2. Równanie $(*)$ ma dwa rozwiązania oraz jednym z rozwiązań jest 3.

$\Delta = (m-1)^2 - 4(-6m^2 + 2m) = 25m^2 - 10m + 1 = (5m-1)^2$

Dla $m = \frac{1}{5}$ równanie $(*)$ ma jedno rozwiązanie: $x = \frac{1-m}{2} = \frac{2}{5} \neq 3.$

Dla $m \neq \frac{1}{5}$ równanie $(*)$ ma dwa rozwiązania.

Sprawdzimy, dla jakiej wartości parametru m rozwiązaniem jest 3.

$9 + (m-1) \cdot 3 - 6m^2 + 2m = 0$

$-6m^2 + 5m + 6 = 0$

$\Delta = 25 + 144 = 169$

$m = \frac{-5-13}{-12} = \frac{3}{2}$ lub $m = \frac{-5+13}{-12} = -\frac{2}{3}$

Odp. $m \in \left\{-\frac{2}{3}, \frac{1}{5}, \frac{3}{2}\right\}.$

ROZWIĄZANIA

Zadanie 2.26.

Równanie $(x-6)\left[(m-2)x^2-4(m+3)x+m+1\right]=0$ jest równoważne alternatywie równań $\underbrace{x-6=0}_{(1)}$ lub $\underbrace{(m-2)x^2-4(m+3)x+m+1=0}_{(2)}$.

Dla dowolnej liczby rzeczywistej m rozwiązaniem równania (1) jest liczba 6.
Zatem równanie (2) powinno mieć dwa rozwiązania dodatnie różne o 6.
Rozwiązaniem równanie (2) jest liczba 6 wtedy, gdy $(m-2)36-4(m+3)6+m+1=0$, czyli dla $m=11$.

Równanie (2) ma dwa rozwiązania dodatnie wtedy, gdy $\begin{cases} m \neq 2 \\ \Delta > 0 \\ \dfrac{m+3}{m-2} > 0 \\ \dfrac{m+1}{m-2} > 0 \end{cases}$

$$\Delta = 16(m+3)^2-4(m-2)(m+1)=4(3m^2+25m+38)=4(3m+19)(m+2)$$

Zatem

$$\begin{cases} m \neq 2 \\ m \in \left(-\infty, -\dfrac{19}{3}\right) \cup (-2, +\infty) \\ m \in (-\infty, -3) \cup (2, +\infty) \\ m \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty) \end{cases}$$

Odp. $m \in \left(-\infty, -\dfrac{19}{3}\right) \cup (2, 11) \cup (11, +\infty)$.

Zadanie 2.27.

$W\left(\dfrac{3}{4}\right)=0$

$W(x)=(4x-3)(x^2-4x-6)$

$\Delta = 16+24=40$, $x_1=\dfrac{4-2\sqrt{10}}{2}=2-\sqrt{10}$, $x_2=2+\sqrt{10}$

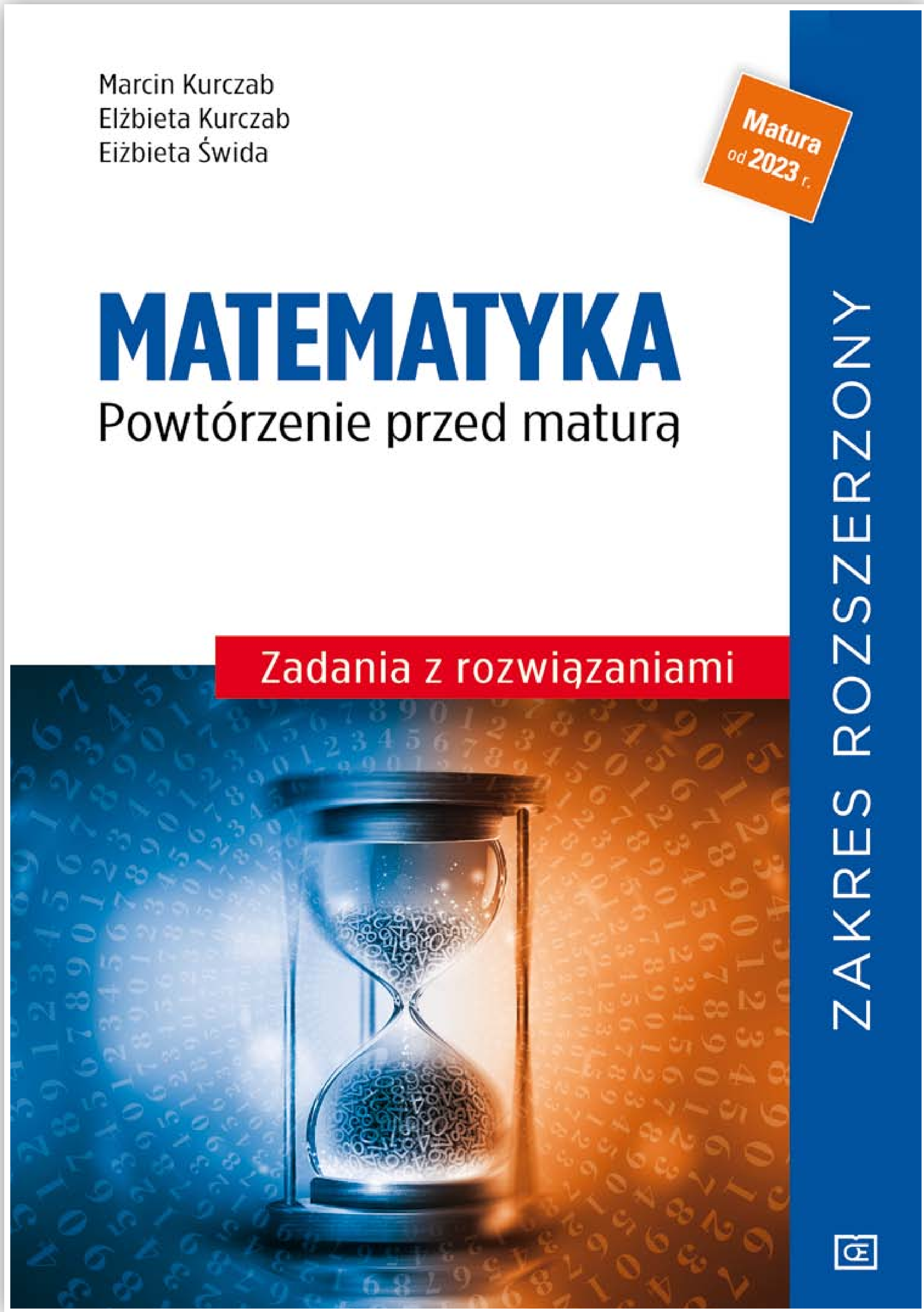
Odp. Pierwiastkami wielomianu są liczby: $2-\sqrt{10}$, $2+\sqrt{10}$, $\dfrac{3}{4}$.

Zadanie 2.28.

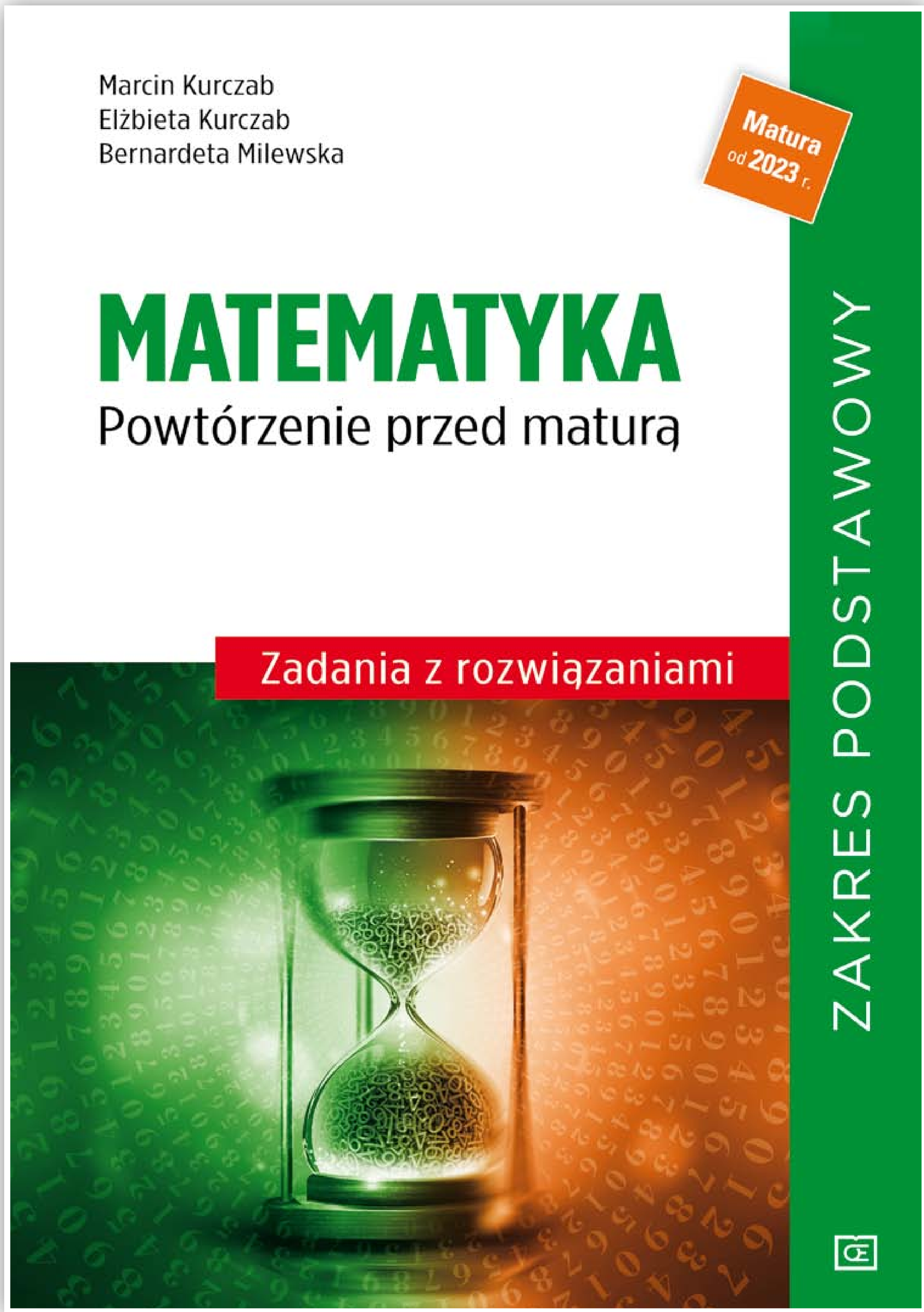
$$W(x)=\underbrace{(x-1)}_{P(x)}\underbrace{(x^2-mx+m-1)}_{Q(x)}$$

Zauważmy, że $P(1)=0$ i $Q(1)=0$.

ROZWIĄZANIA


Marcin Kurczab
Elżbieta Kurczab
Elżbieta Świda
Matura od 2023 r.
MATEMATYKA
Powtórzenie przed maturą
Zadania z rozwiązaniami
ZAKRES ROZSZERZONY

Spis treści


Marcin Kurczab
Elżbieta Kurczab
Bernardeta Milewska
Matura od 2023 r.
MATEMATYKA
Powtórzenie przed maturą
Zadania z rozwiązaniami
ZAKRES PODSTAWOWY


Dorota Nowak, Iwona Palarczyk, Tomasz Szwed
Matura od 2023 r.
Typologia zadań maturalnych
z MATEMATYKI
od 2023 r.
POZIOM PODSTAWOWY

Wstęp

Oddajemy do rąk Uczniów i Nauczycieli „Typologię zadań maturalnych". Jakie są podstawy takiego podejścia do zadań i arkusza maturalnego od 2023 roku? Zacznijmy od początku.

W arkuszu egzaminacyjnym będzie od 29 do 40 zadań. Znajdą się w nim się zarówno zadania zamknięte, jak i otwarte. Arkusz egzaminacyjny nie będzie podzielony – tak jak arkusz w formule 2015 – na dwie części: z zadaniami zamkniętymi i otwartymi. W arkuszu egzaminacyjnym będą występowały wiązki zadań lub pojedyncze zadania. Będzie **co najmniej 13 typów zadań!** (do 2022 roku były tylko 3).

Oto wykaz typów zadań maturalnych na poziomie podstawowym:

1. Zdający wybiera jedną odpowiedź spośród A–D
2. Zdający wybiera jedną odpowiedź spośród A–C oraz wybiera jedno uzasadnienie tej odpowiedzi spośród 1.–3. (Ale tabelka może mieć różne rozmiary, np. 2 x 2, 2 x 3).
3. Zdający wybiera dwie odpowiedzi spośród A–F.
4. Zdający wybiera dwie odpowiedzi spośród A–G.
5. Zdający wybiera jedną odpowiedź spośród A–C oraz wybiera jedną odpowiedź spośród D–F.
6. Zdający wybiera jedną odpowiedź spośród A–D oraz wybiera jedną odpowiedź spośród E–H.
7. Zdający ocenia prawdziwość zdań (lub dokończeń zdań).
8. Zdający dobiera /przyporządkowuje/zestawia odpowiedź (spośród podanych) do określonych sytuacji/obiektów/elementów.
9. Zadanie otwarte za 1 punkt … wykropkowane z miejscem do uzupełnienia lub krótkie zadanie.
10. Zadanie otwarte za 2 punkty.
11. Zadanie otwarte za 3 punkty.
12. Zadanie otwarte za 4 punkty.
13. WIĄZKA zadań to zestaw **od dwóch do czterech zadań** występujących we wspólnym kontekście tematycznym, przy czym każde z zadań wiązki można rozwiązać **niezależnie** od rozwiązania innych zadań w danej wiązce. Wiązka zadań **może** się składać zarówno z zadań zamkniętych, jak i z zadań otwartych.

Skąd zatem wzięło się słowo **co najmniej?**

„Zaprezentowane w Informatorze zadania ***nie wyczerpują wszystkich typów zadań****, które mogą wystąpić w arkuszu egzaminacyjnym".*

I to ostatnie zdanie jest głównym powodem napisania „Typologii zadań maturalnych". Nasz zbiór zawiera materiał nauczania matematyki w liceum i technikum w zakresie podstawowym. Materiał ten jest poukładany według treści z podstawy programowej. Każdy rozdział zawiera co najmniej 20 zadań, różnych pod względem typów. Staraliśmy się być twórczy. Ułożyliśmy również zadania innych typów. Przykładem może być zadanie typu Rozwiąż analogicznie czy też zadanie z kodowaną odpowiedzią.

Bardzo nam zależy, aby „Typologia zadań maturalnych" stała się bazą do ćwiczeń i okazją do oswojenia się z tak dużą różnorodnością zadań. W naszym przekonaniu właśnie taka różnorodność sprawia, że **matura z matematyki od 2023 będzie egzaminem innym i dużo trudniejszym**. Dlatego warto ćwiczyć, trenować i nabierać doświadczenia rachunkowego.

Autorzy

5. Funkcja liniowa

Zadanie 1. (0-1)

Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = ax + 10$ dla każdej liczby rzeczywistej x. Miejscem zerowym tej funkcji jest liczba (-2). Wtedy

A. $a = 8$ **B.** $a = 2$ **C.** $a = 5$ **D.** $a = -5$

Zadanie 2. (0-1)

Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Funkcja liniowa f określona wzorem $f(x) = 5x - 3$ przyjmuje dla argumentu (-2) wartość

A. 7 **B.** -13 **C.** -7 **D.** 13

Zadanie 3. (0-2)

Dane są dwie funkcje liniowe f i g takie, że $f(x) = 3x-1$ i $g(x) = -3x+1$.

Wyznacz zbiór argumentów, dla których funkcja *f* przyjmuje wartości większe niż wartości funkcji *g*.

Zadanie 4. (0-2)

Dana jest funkcja liniowa f określona wzorem $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$.

Znajdź wartość funkcji f dla argumentu 12.

Zadanie 5. (0-2)

Dana jest funkcja liniowa g opisana wzorem $g(x) = 14x + 17 - m$, gdzie m jest dowolną liczbą rzeczywistą.

Dokończ zdanie. Zaznacz dwie odpowiedzi, tak aby dla każdej z nich dokończenie zdania było prawdziwe.

Wykres funkcji g przecina oś OY w punkcie $(0, -1)$ dla m równego

A. 18 **B.** -18 **C.** 1 **D.** -1

E. $\left(3\sqrt{2}\right)^2$ **F.** $\left(2\sqrt{3}\right)^2$ **G.** $3\sqrt{2}$

Zadanie 6. (0–2)

Dla jakich wartości *m* funkcja liniowa $f(x) = (4 - m^2)x + m + 1$ jest malejąca?

Zadanie 7. (0–2)

Funkcja liniowa *h* jest określona wzorem $h(x) = 4x - 12$.

Dokończ zdanie. Zaznacz odpowiedź spośród A–D oraz odpowiedź spośród E–H.

Funkcja *h* ma miejsce zerowe równe

A. 3 **B.** –3 **C.** 4 **D.** –4

Wykres funkcji *h* przecina oś *OY* w punkcie o współrzędnych

E. $(0, 12)$ **F.** $(0, 4)$ **G.** $(0, 3)$ **H.** $(0, -12)$

Zadanie 8. (0–1)

Dana jest funkcja liniowa *h* określona wzorem: $h(x) = \frac{1}{7}x - 11$.

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

1.	Funkcja *h* jest funkcją malejącą	P	F
2.	Funkcja *h* dla argumentu 0 przyjmuje wartość (-11)	P	F

Zadanie 9. (0–3)

Wyznacz zbiór wartości funkcji liniowej $g(x) = 3x - 5$ określonej na przedziale domkniętym $[-1, 5]$.

Zadanie 10. (0–3)

Rozważmy dwie funkcje liniowe opisane za pomocą wzorów: $f(x) = 3x - 7$ oraz $g(x) = mx + 7$.

Udowodnij, że wykresy funkcji *f* i *g* są równoległe, gdy *m* = 3, a prostopadłe, gdy $m = -\frac{1}{3}$.

Zadanie 11. (0–1)

Sporządzono wykres funkcji $f(x) = -2x + 6$ a następnie przesunięto go o 3 jednostki w lewo wzdłuż osi *OX* oraz o 2 jednostki w dół wzdłuż osi *OY*.

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli fałszywe

Otrzymany wykres jest opisany wzorem $y = -2x + 7$	P	F
Do otrzymanego wykresu należy punkt $(3, 4)$	P	F

Zadanie 12. (0–2)

W klasie jest 28 uczniów, przy czym stosunek liczby dziewczyn do liczby chłopców jest równy 3 : 4.

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe lub F – jeśli fałszywe

W klasie jest 16 dziewczyn.	P	F
Liczba dziewcząt stanowi 75% liczby chłopców.	P	F
Zależność między liczbą chłopców a liczbą dziewcząt w klasie jest proporcjonalnością prostą.	P	F
Gdyby do klasy doszło 4 chłopców, stosunek liczby dziewczyn do liczby chłopców wynosiłby 3 : 5.	P	F

Zadanie 13. (0–1)

Funkcja liniowa f jest określona wzorem $f\left(x\right) = 13x + 31 - k$ dla każdej liczby rzeczywistej x i dla każdej liczby rzeczywistej k mniejszej niż 31.

Dokończ zdanie. Zaznacz odpowiedź A, B albo C oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3.

Wykres funkcji f

A.	przecina oś OY powyżej osi OX	ponieważ	1.	$k > 0$
B.	przecina oś OY poniżej osi OX		2.	$31 - k > 0$
C.	nie przecina oś OY		3.	$\frac{31}{13} \neq 0$

Zadanie 14. (0–1)

Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Funkcja liniowab f jest określona wzorem $f\left(x\right) = 3x - 7$. Wykres funkcji f przesunięto wzdłuż osi Ox o 3 jednostki w prawo (tzn. zgodnie ze zwrotem osi), w wyniku czego otrzymano wykres funkcji h. Funkcja h jest określona wzorem

A. $h\left(x\right) = -3x + 16$ **B.** $h\left(x\right) = 3x$ **C.** $h\left(x\right) = 3x + 16$ **D.** $h\left(x\right) = 3x - 16$

Zadanie 15. (0–1)

Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

O funkcji liniowej f wiadomo, że $f\left(1\right) = -2$ oraz $f\left(3\right) = 1$. Współczynnik kierunkowy wykresu funkcji liniowej f jest równy

A. $\left(-\frac{3}{2}\right)$ **B.** $\left(-\frac{2}{3}\right)$ **C.** $\frac{2}{3}$ **D.** $\frac{3}{2}$

Zadanie 16. (0–3)

Rozważmy funkcję liniową: $f(x)=\sqrt{3}x-\sqrt{15}$.

a) Oblicz miejsce zerowe funkcji f.

b) Wyznacz rzędną punktu przecięcia wykresu funkcji f z osią OY.

c) Sprawdź, czy jest prawdą, że $f\left(\sqrt{15}\right)=-\sqrt{15}\left(1-\sqrt{3}\right)$.

Zadanie 17. (0–2)

Dokończ zdanie. Zaznacz trzy odpowiedzi, tak aby dla każdej z nich dokończenie zdania było prawdziwe.

Wykres funkcji f jest równoległy do wykresu funkcji $g(x) = 4x + 11$ oraz przechodzi przez punkt $(0, -31)$. Wobec tego:

A. Funkcje f opisuje wzór $f(x)=-\frac{1}{4}x-31$.

B. Wykres funkcji f ma równanie $y = 4x - 31$.

C. Miejsce zerowe x_0 funkcji f spełnia warunek $x_0 < 8$.

D. $f(0) = 31$

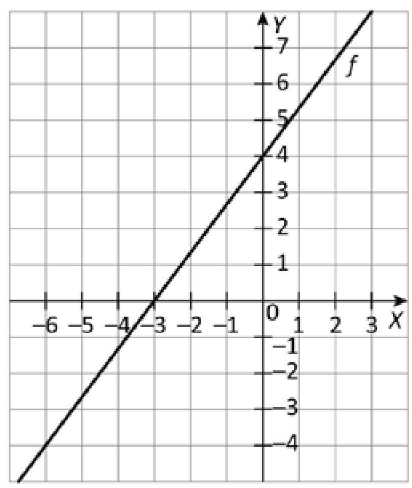
E. Do wykresu funkcji f należy punkt $M = (5, -11)$

F. Funkcja f jest malejąca.

Zadanie 18.

Dany jest fragment funkcji liniowej $y = f(x)$, której wykres przedstawiono w układzie współrzędnych na rysunku poniżej.

Ta funkcja jest określona dla każdej liczby rzeczywistej z przedziału $[-6, 4]$.



Zadanie 18.1. (0–1)

Zapisz w miejscu wykropkowanym poniżej zbiór rozwiązań nierówności: $f(x) > 4$.

. . . .

Zadanie 18.2. (0–1)

Zapisz w miejscu wykropkowanym poniżej przedział, w którym funkcja f przyjmuje wartości nieujemne.

. . . .

Zadanie 18.3. (0–1)

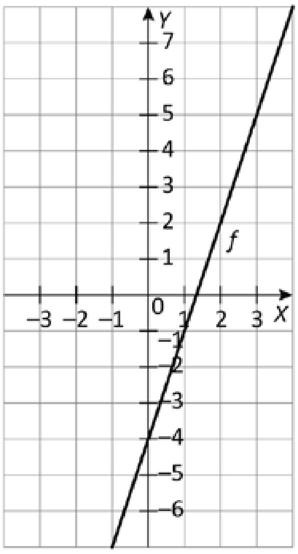
Uzupełnij zdanie. Wpisz odpowiednie liczby w wykropkowanych miejscach, aby zdanie było prawdziwe.

Wykres funkcji *f* przecina oś rzędnych w punkcie o współrzędnych ...., a miejscem zerowym funkcji *f* jest liczba ....

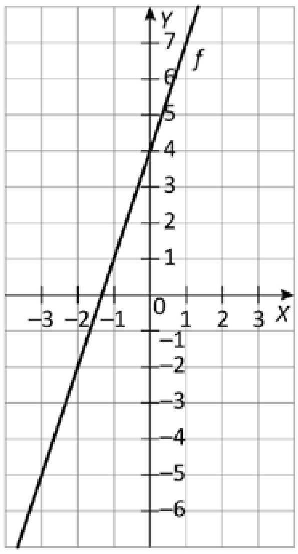
Zadanie 19. (0–4)

Rysunki 1., 2., 3. i 4. przedstawiają wykresy czterech różnych funkcji liniowych *f*, *g*, *h* i *w*.

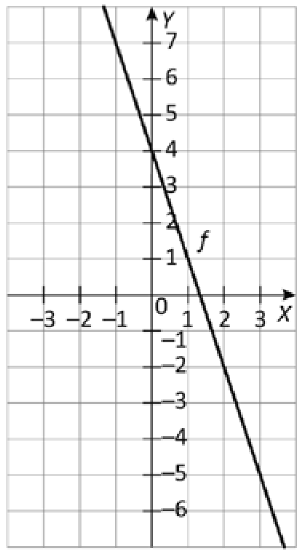
Rysunek 1.



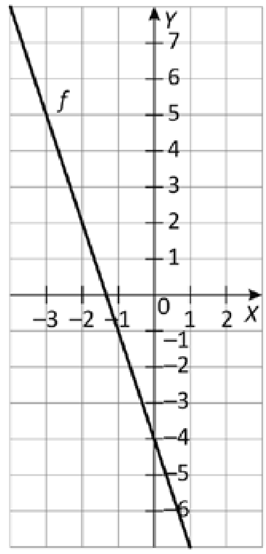
Rysunek 2.



Rysunek 3.



Rysunek 4.



Do rysunków powyżej dopasuj następujące wzory:

A. $y = 3x + 4$ **B.** $y = -3x + 4$ **C.** $y = 3x - 4$ **D.** $y = -3x - 4$

Zapisz swój wybór w tabelce poniżej.

Wykres na rysunku	Wzór funkcji (**A**, **B**, **C** albo **D**)
Rysunek 1.	
Rysunek 2.	
Rysunek 3.	
Rysunek 4.	

Zadanie 20.

Rozważmy funkcję liniową określoną wzorem $f(x) = 7x + 21$.

Zadanie 20.1. (0-1)

Naszkicuj wykres funkcji f.

Zadanie 20.2. (0-1)

Wyznacz miejsce zerowej funkcji f.

Zadanie 20.3. (0-1)

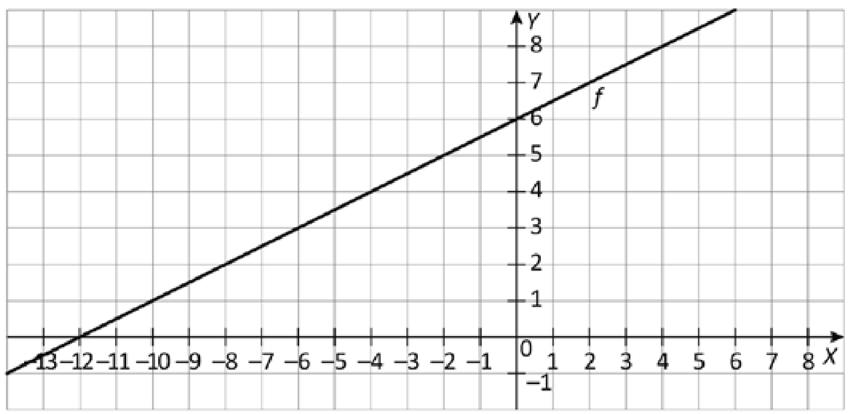
Dla jakich argumentów funkcja f przyjmuje wartości dodatnie?

Zadanie 20.4. (0-1)

Oblicz wartość wyrażenia: $f(-2) - f\left(\frac{6}{7}\right)$.

Zadanie 21.

Rozważmy funkcję liniową, której wykres przedstawiony jest na rysunku poniżej.



Zadanie 21.1. (0-1)

Napisz wzór funkcji, której wykres przedstawia rysunek powyżej.

Zadanie 21.2. (0-1)

Podaj przykład funkcji, której wykres jest równoległy do wykresu funkcji f.

Zadanie 21.3. (0-1)

Podaj przykład funkcji, której wykres jest prostopadły do wykresu funkcji f.

Zadanie 21.4. (0-1)

Narysuj wykres funkcji g, symetryczny do wykresu funkcji f względem osi OX.

Wstęp

Egzamin maturalny z matematyki na poziomie rozszerzonym nie będzie zbytnio odbiegał od egzaminu jaki znamy do tej pory. Nie będzie zadań testowych ani zadań z kodowaną odpowiedzią. Pojawią się wiązki zadań oraz zadania osadzone w kontekście realistycznym. Nie będzie takiej różnorodności typów zadań jak na poziomie podstawowym. Zdający w czasie 180 minut będzie miał do rozwiązania nieco ponad 10 zadań otwartych.

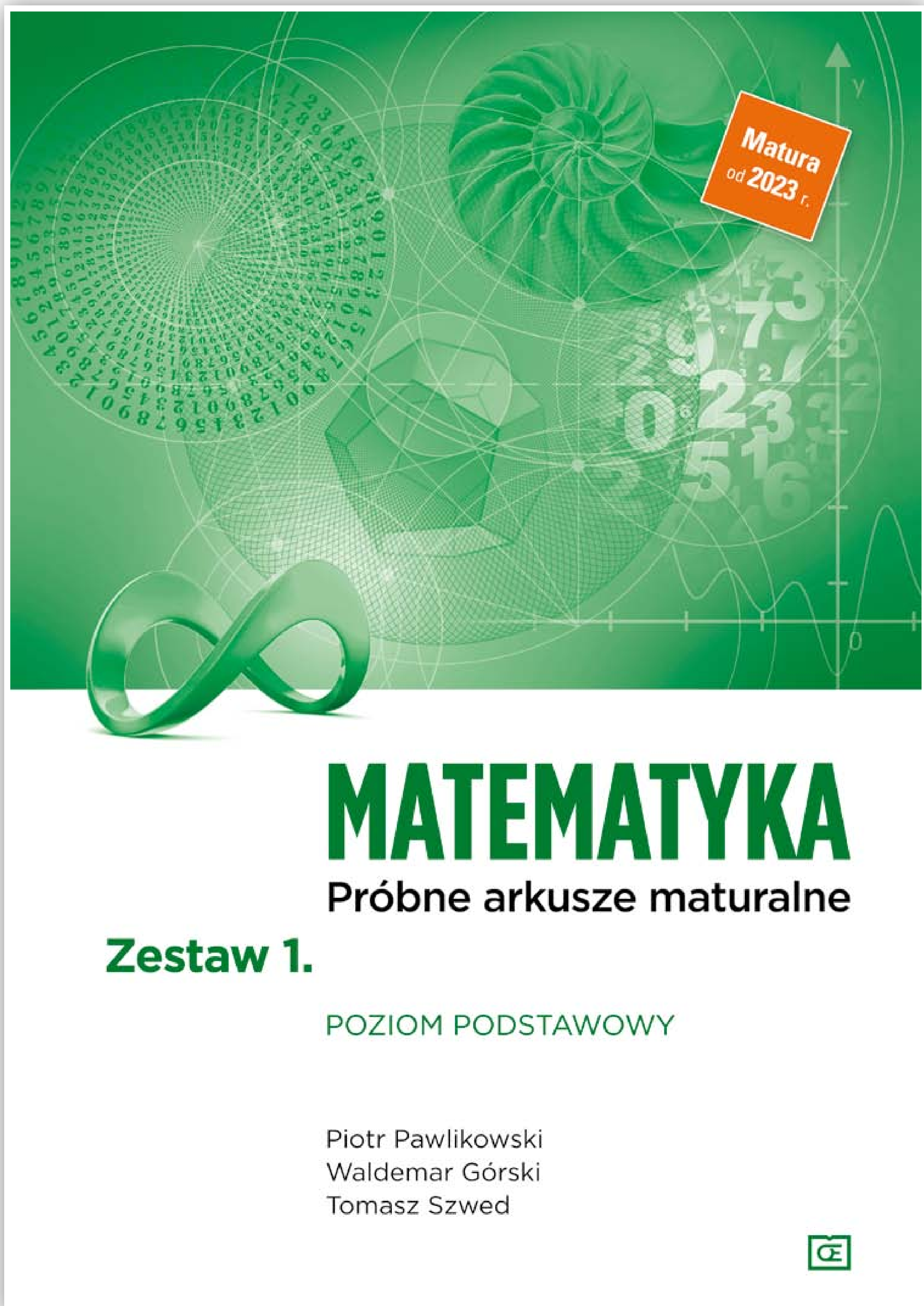
W przygotowaniu do matury z matematyki przede wszystkim należy postarać się dobrze zrozumieć treści matematyczne i dobrze wyćwiczyć podstawowe umiejętności. To wymaga czasu, zaangażowania, samodzielnej pracy, również pracy w zespole, i przede wszystkim decyzji: chcę i będę się uczyć. Od liczby samodzielnie rozwiązanych zadań i od ich jakości zależy ostateczny wynik maturalny.

Mając to na uwadze przygotowaliśmy zestaw sześciu przykładowych arkuszy typu maturalnego na poziomie rozszerzonym. Chcieliśmy zapewnić różnorodność w kwestii sformułowań i trudności zadań, dlatego arkusze ułożyliśmy w zespole trzech Autorów, doświadczonych, ale i różnie postrzegających rzeczywistość szkolną uczniów uczących się matematyki w zakresie rozszerzonym i deklarujących chęć zdawania matury na poziomie rozszerzonym.

Do każdego zadania dołączyliśmy jego pełne rozwiązanie oraz propozycję punktacji. Mamy nadzieję, że pomoże to Uczniom samodzielnie przygotowującym się do egzaminu.

Życzymy cierpliwości, determinacji, komfortu pracy i przede wszystkim powodzenia na egzaminie w maju 2023 roku.

Zespół Autorów


Matura od 2023 r.
MATEMATYKA
Próbne arkusze maturalne
Zestaw 1.
POZIOM PODSTAWOWY
Piotr Pawlikowski
Waldemar Górski
Tomasz Szwed

Wstęp

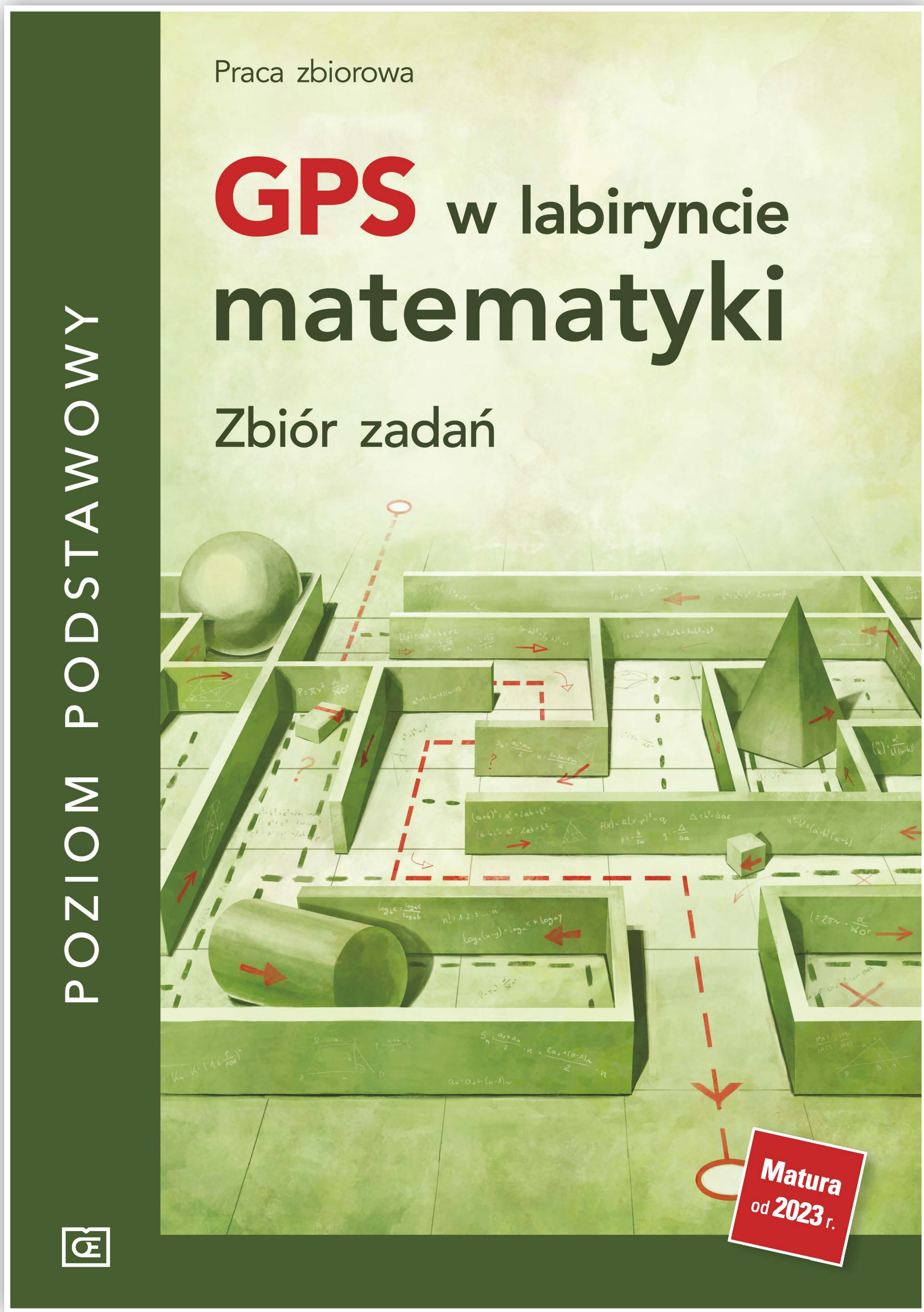
O egzaminie maturalnym z matematyki od 2023 roku na pewno można powiedzieć dwie rzeczy: będzie inny i będzie trudniejszy. Jego inność wynika z faktu, że pojawią się nowe typy zadań maturalnych. Do tej pory na poziomie podstawowym mieliśmy trzy typy zadań, od 2023 roku ma ich być co najmniej trzynaście. Trudność arkusza maturalnego może wynikać z faktu różnorodności typów zadań oraz ich pojawiania się w arkuszu. Od 2010 roku zadania były poukładane typami, od 2023 będą poukładane zgodnie z kolejnością występowania treści i wymagań w podstawie programowej. Jest to nowa sytuacja, do należy się dobrze przygotować. W przygotowaniu do matury z matematyki przede wszystkim należy zrozumieć treści matematyczne i dobrze wyćwiczyć podstawowe umiejętności. To wymaga czasu, zaangażowania, samodzielnej pracy, również pracy w zespole, i przede wszystkim decyzji: chcę i będę się uczyć.

Nasza propozycja to zestaw sześciu przykładowych arkuszy typu maturalnego na poziomie podstawowym. Każdy arkusz jest inny, każdy następny jest trudniejszy od poprzedniego. Ponieważ nie ma wielu wzorców prawdziwej matury 2023, dlatego nasze arkusze są tak naprawdę naszą wizją tej matury. Tak to sobie wyobrażamy. Mamy za sobą lekturę dokumentów CKE, ORE oraz wiele rozmów z nauczycielami zaangażowanymi w doradztwo metodyczne. Staraliśmy się uważnie słuchać i czytać. Nasz zestaw arkuszy zawiera ponad 180 zadań różnego typu i treści. Nie baliśmy się uruchomić naszej wyobraźni. Zrobiliśmy to jednak mając na uwadze komfort i bezpieczne przygotowanie uczniów do egzaminu maturalnego z matematyki od 2023 roku. Mamy nadzieję, że oryginalny arkusz opracowany przez Centralną Komisję Egzaminacyjną będzie mniej skomplikowany i dużo łatwiejszy niż nasze propozycje. Mamy nadzieję, ale jednocześnie chcemy się przygotować na mniej optymistyczny scenariusz. Dlatego zachęcamy naszych Czytelników, Uczniów i Nauczycieli, do rzetelnej pracy w oparciu o nasz materiał ćwiczeniowy.

Każde zadanie ma zamieszczoną w drugiej części książki odpowiedź, do każdego zadania otwartego dołączyliśmy również jego pełne rozwiązanie. Mamy nadzieję, że pomoże to Uczniom samodzielnie przygotowującym się do egzaminu.

Życzymy cierpliwości, determinacji, komfortu pracy i przede wszystkim powodzenia na egzaminie w maju 2023 roku.

Zespół Autorów



Sprawdź dostępność na:
www.pazdro.com.pl

Szanowni Państwo Nauczyciele!

Niniejszy zbiór zadań jest skierowany przede wszystkim do tych uczniów, którzy mają duże trudności z nauką matematyki.

Zbiór ten, z założenia, ma być wsparciem dla uczniów i nauczycieli w procesie nauczania matematyki w szkole ponadpodstawowej. Książka zawiera zestaw zadań bazowych, które są odzwierciedleniem wymagań szczegółowych zapisanych w podstawie programowej. Dodatkowo pod każdym zadaniem bazowym zamieszczono ćwiczenia, które przedstawiają w różnych aspektach zagadnienia odnoszące się do tego zadania. Taka konstrukcja zbioru umożliwia uczniom mającym trudności z nauką matematyki utrwalenie i doskonalenie elementarnych umiejętności matematycznych poprzez wielokrotne rozwiązywanie tych samych zadań z dokładnością do zmiany danych liczbowych. Ta forma pracy powinna dać uczniom dużą szansę na uzyskanie pozytywnego wyniku egzaminu maturalnego z matematyki na poziomie podstawowym.

Zadania zostały opracowane przez zespół nauczycieli szkół ponadpodstawowych województwa świętokrzyskiego w ramach Seminarium Jakości Kształcenia Matematycznego, działającego od roku 2003 na Politechnice Świętokrzyskiej.

Zbiór składa się z trzech części.

Część pierwsza powstała w odpowiedzi na zapotrzebowanie nauczycieli realizujących program zajęć przygotowujących do egzaminu maturalnego z matematyki na poziomie podstawowym w ramach projektu „Matematyka bez poprawki" Świętokrzyskiego Kuratora Oświaty w porozumieniu z Politechniką Świętokrzyską. Ta część zbioru zawiera zadania odpowiadające wymaganiom egzaminacyjnym egzaminu maturalnego w 2022 r. Ze względu na adresatów, zwrócono uwagę głównie na te umiejętności, które są niezbędne w rozwiązywaniu zadań zamkniętych i zadań krótkiej odpowiedzi, z wyjątkiem zadań na dowodzenie. Kształcone umiejętności powinny także stanowić dla każdego ucznia gwarancję uzyskania na maturze pojedynczych punktów za zadania otwarte rozszerzonej odpowiedzi.

Część druga utrzymana jest w tym samym stylu i jest uzupełnieniem części pierwszej o zadania odpowiadające wymaganiom egzaminacyjnym egzaminu maturalnego w latach 2023–2024. W tej części również nie uwzględniono zadań otwartych na dowodzenie. Ze względu na założone cele, położono akcent na zrozumienie podstawowych pojęć matematycznych i osiągnięcie wysokiej sprawności rachunkowej. Pominięto zadania otwarte rozszerzonej odpowiedzi (w tym zadania optymalizacyjne).

Część trzecia zawiera zadania, których dotychczas nie było na egzaminie maturalnym. Typy tych zadań wprowadza Informator o egzaminie maturalnym z matematyki od 2023 r. na poziomie podstawowym oraz arkusz pokazowy opublikowany przez CKE. Są to zadania: typu „prawda – fałsz", na dobieranie, wyboru wielokrotnego oraz „z luką". Zamieszczone zadania typu „q, ponieważ p" (opracowane na podstawie: J. Daniel, E. Rzepecka, E. Warzecha, A. Zawada, Egzamin Ósmoklasisty – Vademecum nauczyciela, ORE, Warszawa 2018) są dopełnieniem części pierwszej i drugiej w zakresie dowodzenia, gdyż można je traktować, jako krótkie dowody.

Do zadań bazowych i ćwiczeń zamieszczonych w każdej z części zbioru podano odpowiedzi, tak aby uczeń rozwiązujący samodzielnie zadania mógł zweryfikować wynik.

Autorzy


MATEMATYKA
Porady i wskazówki
których nie ma
w tablicach maturalnych
Matura
od 2023 r.
215 przykładów
141 wskazówek
10 działów programowych
Tomasz Grębski
ZBIÓR ZADAŃ MATURALNYCH
MATEMATYKA
Próbne arkusze maturalne

Podczas nauki matematyki uczniowie często korzystają z tzw. tablic maturalnych, czyli „Wybranych wzorów matematycznych” opracowanych przez Centralną Komisję Egzaminacyjną. Wielu uczniów, a w szczególności maturzystów, podczas wprowadzania różnych zagadnień matematycznych pyta mnie: „czy to jest w tablicach maturalnych?”. Jeśli okazuje się, że jest, to widzę w ich oczach spokój, ale jeśli odpowiadam, że nie ma, to widzę pewne przerażenie, szczególnie kiedy podkreślam, że to bardzo ważne zagadnienie maturalne. Wtedy uczniowie znowu pytają: „czy mogę im podać te ważne rzeczy, których nie ma w tablicach maturalnych, a które są szczególnie ważne i często bywają na maturze?”.

Książka „Porady i wskazówki, których nie ma w tablicach maturalnych” jest właśnie odpowiedzią na takie pytania, kierowaną zwłaszcza do maturzystów, aby mogli lepiej przygotować się do egzaminu. Powstała ona na podstawie mojego wieloletniego doświadczenia w nauczaniu matematyki, jak również wieloletniego doświadczenia w sprawdzaniu prac maturalnych (jako egzaminatora i weryfikatora). Książka zawiera bardzo przydatne porady i wskazówki – i co ważne – wraz z przykładami ich zastosowania. Każdy maturzysta powinien je znać i umieć zastosować, jednak wiemy (myślę, że zgodzą się tu ze mną również inni nauczyciele), że spora część uczniów ich nie pamięta, a nawet niektórych nie zna. Wskazówki podzielone są tematycznie, aby łatwiej było znaleźć potrzebą poradę i przykład.

W książce uwzględniono wymagania na maturę 2023!

A zatem zachęcam do poczytania „Porad i wskazówek...”, życzę przyjemnej i owocnej pracy, a przede wszystkim powodzenia na maturze!

dr Tomasz Grębski

VI. Planimetria

WSKAZÓWKA 82. Liczba przekątnych w wielokącie

Wzór na liczbę przekątnych p w wielokącie wypukłym o n wierzchołkach $(n$ bokach$)$:

$$p=\frac{n(n-3)}{2}$$

Przykład 1.
Oblicz liczbę przekątnych w trzynastokącie wypukłym.
Rozwiązanie:
Wykorzystamy wzór dla $n = 13$

$$p=\frac{n(n-3)}{2}=\frac{13(13-3)}{2}=65\,.$$

Przykład 2.
Czy istnieje wielokąt wypukły, który ma 50 przekątnych?
Rozwiązanie:
Wykorzystamy wzór $p=\frac{n(n-3)}{2}$ dla $p = 50$

$$50=\frac{n(n-3)}{2}\ /\cdot 2$$

$$100 = n(n-3)$$

$$n^2 - 3n - 100 = 0$$

$\Delta = 409$, czyli $\sqrt{\Delta}$ jest liczbą niewymierną, więc powyższe równanie nie ma naturalnych rozwiązań. Zatem wielokąt o 50 przekątnych nie istnieje.

WSKAZÓWKA 83. Suma kątów wewnętrznych wielokąta

Wzór na sumę kątów wewnętrznych S wielokąta wypukłego o n wierzchołkach $(n$ bokach$)$:

$$S=(n-2)\cdot 180^\circ$$

Przykład 1.
Oblicz sumę kątów wewnętrznych osiemnastokąta wypukłego.
Rozwiązanie:

$n = 18$ zatem

$$S=(18-2)\cdot 180^\circ = 2880^\circ.$$

Przykład 2.
Suma kątów wewnętrznych pewnego wielokąta wypukłego wynosi 2340°. Ile boków ma ten wielokąt?
Rozwiązanie:

$$2340=(n-2)\cdot 180^\circ\ \ /:180^\circ$$

$$13 = n-2,\ \text{czyli}\ n = 15.$$

WSKAZÓWKA 84. Miara kąta wewnętrznego wielokąta foremnego

Wzór na miarę kąta wewnętrznego wielokąta foremnego o n wierzchołkach (n bokach):

$$\alpha = \frac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n}$$

Przykład

Wyznacz miarę kąta wewnętrznego wielokąta foremnego, który ma 15 wierzchołków.

Rozwiązanie:

$$\alpha = \frac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n} = \frac{(15-2)\cdot 180^\circ}{15} = \frac{2340^\circ}{15} = 156^\circ$$

WSKAZÓWKA 85. Suma kątów zewnętrznych wielokąta

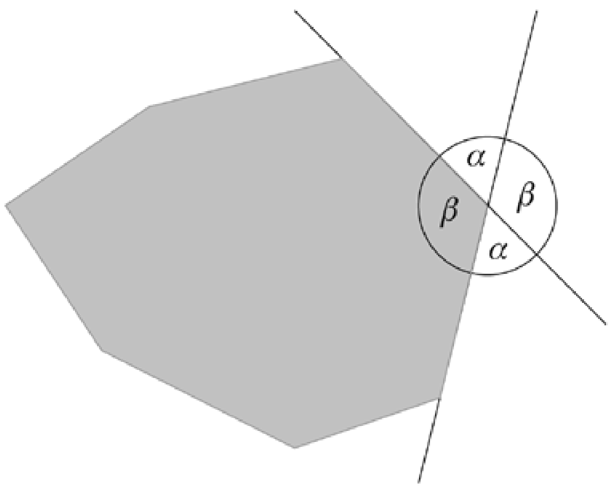
Suma kątów zewnętrznych dowolnego wielokąta wypukłego wynosi zawsze 720°.

Przykład

Udowodnij powyższe twierdzenie.

Rozwiązanie:

Załóżmy, że mamy n wierzchołków, czyli suma wszystkich kątów pełnych wynosi $n \cdot 360^\circ$.
Oznaczmy przez X sumę kątów zewnętrznych wielokąta.
(kąt zewnętrzny to kąt przyległy do kąta wewnętrznego – na rys. to kąt α)



$$n \cdot 360^\circ = X + 2 \cdot S, \text{ gdzie } S = (n-2)\cdot 180^\circ$$

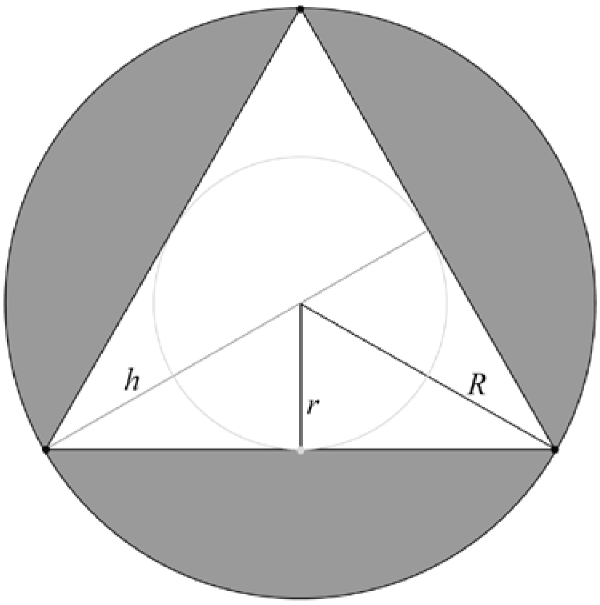
Podstawiamy za S

$$n \cdot 360^\circ = X + 2 \cdot (n-2)\cdot 180^\circ$$
$$n \cdot 360^\circ = X + n \cdot 360^\circ - 720^\circ$$

Zatem
$X = 720^\circ$.

WSKAZÓWKA 86. Trójkąt równoboczny i okrąg

Trójkąt równoboczny oraz okrąg wpisany w niego i opisany na nim.



$$R = \frac{2}{3}h$$

$$r = \frac{1}{3}h$$

Przykład 1.
Oblicz pole trójkąta równobocznego jeżeli promień okręgu opisanego na tym trójkącie wynosi $6\sqrt{3}$.

Rozwiązanie:

$$P_{\Delta} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$R = 6\sqrt{3}$$

Wiemy, że

$$R = \frac{2}{3}h \text{ oraz } h = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \text{ zatem}$$

$$R = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{a\sqrt{3}}{3} = 6\sqrt{3}$$

Stąd

$$a = 18$$

Zatem

$$P_{\Delta} = \frac{18^2\sqrt{3}}{4} = 81\sqrt{3}.$$

Przykład 2.

Oblicz pole koła wpisanego w trójkąt równoboczny o polu $12\sqrt{3}$.

Rozwiązanie:

Wiemy, że

$$P_\Delta = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \quad \text{i} \quad r = \frac{1}{3}h \quad \text{oraz} \quad h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Zatem

$$12\sqrt{3} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Stąd $a = 4\sqrt{3}$

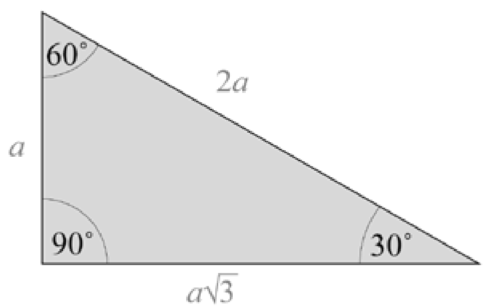
$$r = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{4\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{6} = 2$$

Stąd

$P_o = \pi r^2 = 4\pi.$

WSKAZÓWKA 87. Trójkąt szczególny

Zależności w trójkącie szczególnym, czyli o kątach $30°, 60°, 90°$.



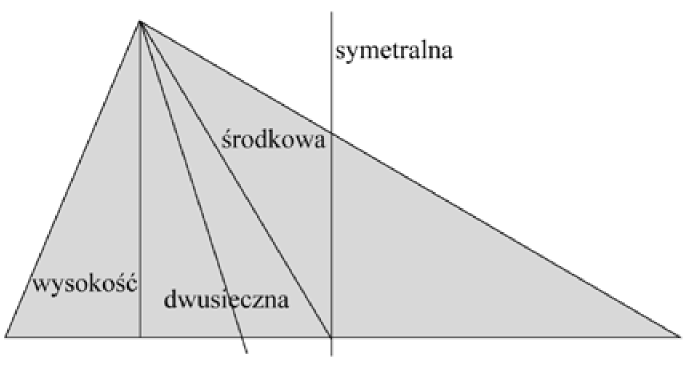
WSKAZÓWKA 88. Ważne odcinki i linie w trójkącie

Wysokość trójkąta – odcinek łączący wierzchołek trójkąta z jego rzutem prostokątnym na prostą zawierającą przeciwległy bok.

Środkowa trójkąta – odcinek łączący wierzchołek trójkąta ze środkiem przeciwległego boku.

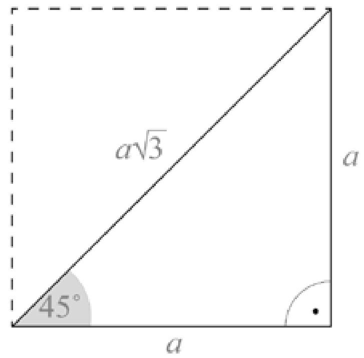
Symetralna boku trójkąta – prosta prostopadła do boku i przechodząca przez jego środek.

Dwusieczna kata wewnętrznego trójkąta – półprosta dzieląca kąt na połowy.



WSKAZÓWKA 89. Przekątna kwadratu

Kwadrat i jego przekątna:



$d = a\sqrt{2}$

WSKAZÓWKA 90. Pole kwadratu

Kwadrat i jego pole (a – długość boku, d – długość przekątnej)

$P = a^2 \qquad P = \frac{1}{2}d^2$

Przykład

Wyznacz pole kwadratu oraz pole koła wpisanego w kwadrat o przekątnej długości $5\sqrt{2}$.

Rozwiązanie:

Pole kwadratu $P = \frac{1}{2}d^2 = \frac{1}{2}\left(5\sqrt{2}\right)^2 = 25$

Wyznaczamy długość boku kwadratu

$a\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$

$a = 5$

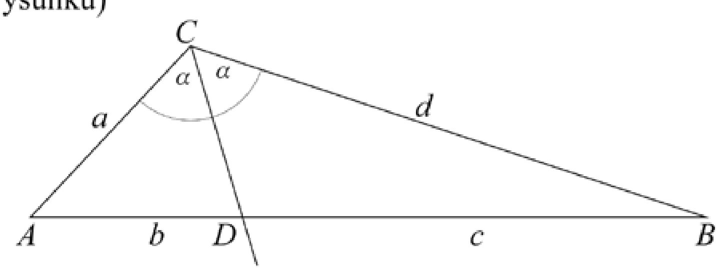
Zatem

$r = \frac{5}{2}$

Czyli pole koła wynosi $P_k = \pi r^2 = \frac{25}{4}\pi$.

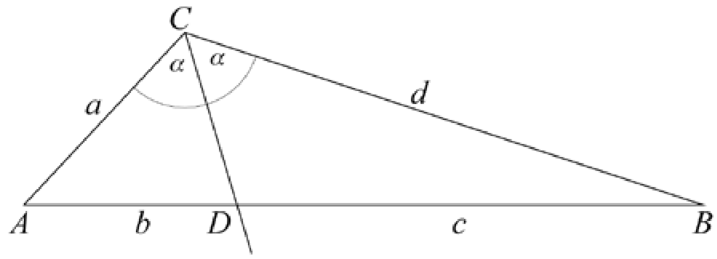
WSKAZÓWKA 91. Twierdzenie o dwusiecznej kąta wewnętrznego

Twierdzenie o dwusiecznej kąta wewnętrznego trójkąta ABC.(tw. jest w tablicach, ale bez rysunku)



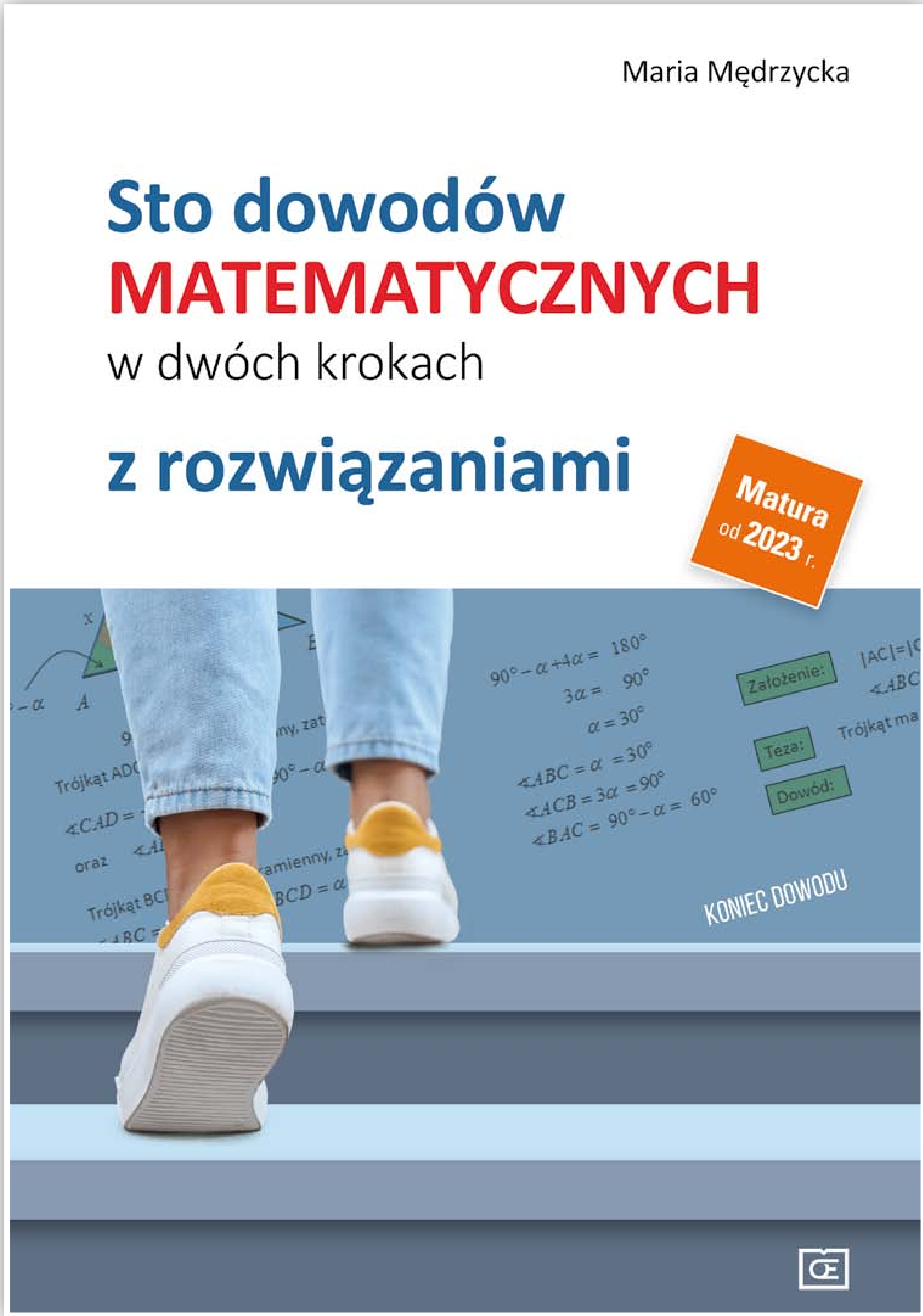
$\frac{a}{b} = \frac{d}{c}$

Przykład
Wykaż, że dwusieczna kąta wewnętrznego w trójkącie dzieli przeciwległy bok proporcjonalnie do długości pozostałych boków.
Rozwiązanie:



Tezę, którą mamy udowodnić możemy zapisać (zgodnie z oznaczeniami na rysunku)
$$\frac{b}{c}=\frac{a}{d}.$$
Dowód:
CD to dwusieczna kąta ACB, zatem kąt ACD = kąt BCD. Niech $\angle ADC=\beta$, zatem $\angle BDC=180^\circ-\beta$
Wykorzystamy teraz twierdzenie sinusów dla trójkąta ADC:
$$\frac{a}{\sin\beta}=\frac{b}{\sin\alpha}$$
Przekształćmy to wyrażenie na:
$$(*)\ \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{b}{a}$$
Wykorzystamy teraz twierdzenie sinusów dla trójkąta BCD:
$$\frac{d}{\sin\left(180^\circ-\beta\right)}=\frac{c}{\sin\alpha}$$
Wiemy, że $\sin(180^\circ-\beta)=\sin\beta$, zatem
$$\frac{d}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\alpha}$$
Przekształćmy to wyrażenie na:
$$(**)\ \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{c}{d}$$
Otrzymaliśmy takie same lewe strony w równaniach $(*)$ i $(**)$, zatem możemy porównać prawe strony tych równań:
$$\frac{b}{a}=\frac{c}{d}$$
Po przekształceniu otrzymujemy tezę:
$$\frac{b}{c}=\frac{a}{d}$$

Uwaga: przedstawiony sposób, w którym wprowadzamy kąt β, stanowi bardzo dobry „chwyt", również przy innych zadaniach z planimetrii.


Maria Mędrzycka
Sto dowodów
MATEMATYCZNYCH
w dwóch krokach
z rozwiązaniami
Matura
od 2023 r.
Założenie:
Teza:
Dowód:
KONIEC DOWODU

Spis treści

Wstęp

Szanowny Czytelniku

Wielu uczniów i nauczycieli nie lubi zadań dowodowych i uważa je za trudne. Jednak wystarczy zauważyć, że **twierdzenie** jest po prostu stwierdzeniem faktu a **dowód** jest wyjaśnieniem, dlaczego to twierdzenie jest prawdziwe. Rozwiązując dowolne zadanie rachunkowe wielokrotnie dowodzimy prawdziwość drobnych faktów, nawet tego nie zauważając. Dowód, to każde uzasadnienie „dlaczego" coś jest prawdziwe. W tym zbiorze zajmiemy się takimi twierdzeniami, których dowody wymagają tylko dwóch kroków. Zazwyczaj jeden z tych kroków wykorzystuje podane założenia, drugi to wykorzystanie posiadanej wiedzy matematycznej.

Wiele twierdzeń ma taką formę:

Twierdzenie 1. Jeśli zdanie A jest prawdziwe, to zdanie B też jest prawdziwe.

Dowód takiego twierdzenia (implikacji) to wyjaśnienie dlaczego zdanie B musi być prawdziwe, jeśli zdanie A jest prawdziwe.

Dowód wprost zaczyna się od założenia, że zdanie A jest prawdziwe (w końcu piszemy „jeśli A jest prawdziwe" i to jest nasze założenie). Zresztą, jeśli zdanie A jest fałszywe, to nie mamy się czym martwić. A raczej − w takiej sytuacji nie musimy nic robić, bo to nie ma znaczenia.

A więc − przypuszczamy, że zdanie A jest prawdziwe i zapisujemy to w dowodzie jako pierwszy krok. To jest informacja, której możemy użyć w dalszych działaniach. Dalej postępujemy logicznie krok po kroku aż dojdziemy do stwierdzenia, że zdanie B jest prawdziwe.

Ważne jest, aby takie działania zapisywać w języku polskim. Są wprawdzie znaki matematyczne, którymi można zapisać część rozumowania, ale dla czytelności takiego zapisu nie należy moim zdaniem zastąpić całkowicie języka polskiego w zapisie.

Koniec rozumowania zapisujemy słowami „koniec dowodu" lub innym oznaczeniem (**cbdu** − co było do udowodnienia, **cnd** − czego należało dowieść, **qed** − quod erat demonstrandum lub znak końca dowodu ■ nazywany jest czasem „halmosem").

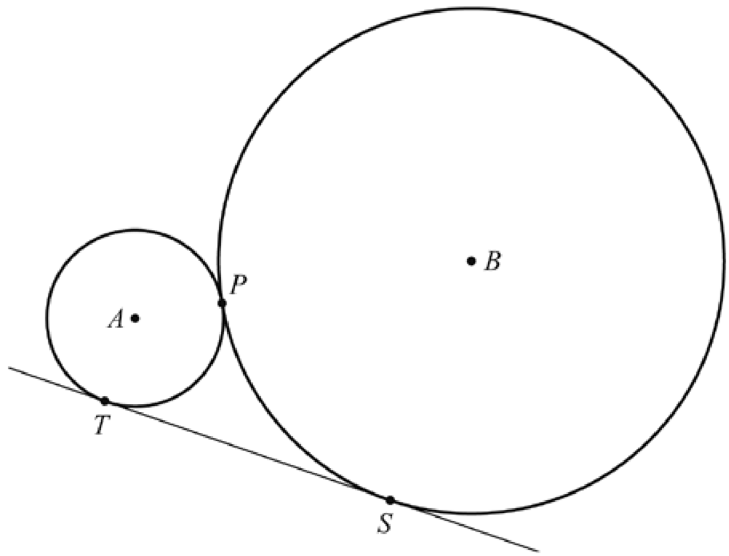
Autor

Trójkąty i okręgi

Zadanie 82.

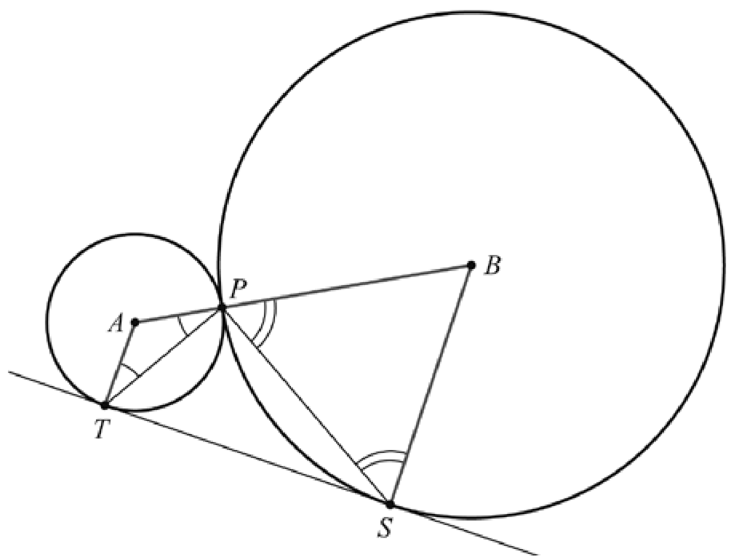
Dwa okręgi o promieniach a i b oraz środkach A i B są styczne zewnętrznie w punkcie P. Prosta zewnętrzna jest styczna do tych okręgów w punktach T i S. Wykaż, że kąt TPS jest prosty.

Założenie: Okręgi o promieniach a i b i środkach A i B są styczne zewnętrznie w punkcie P. Prosta zewnętrzna jest styczna do tych okręgów w punktach T i S.
Teza: Kąt TPS jest prosty.

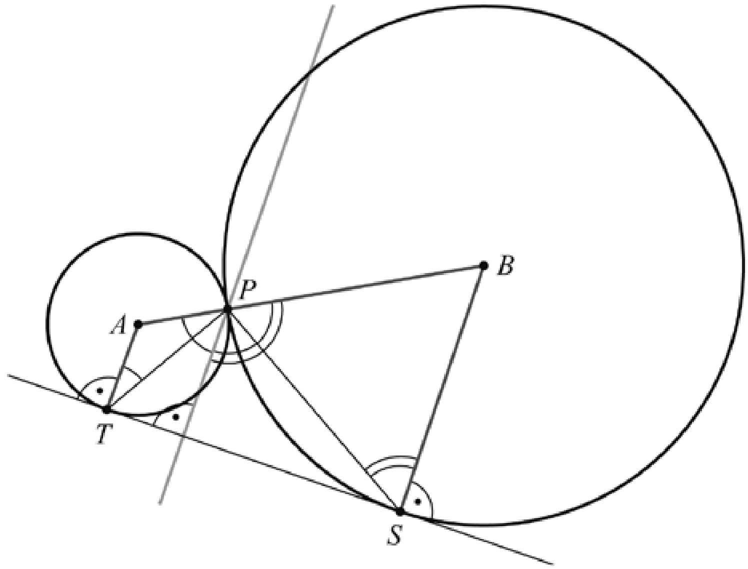


Rozwiązania:

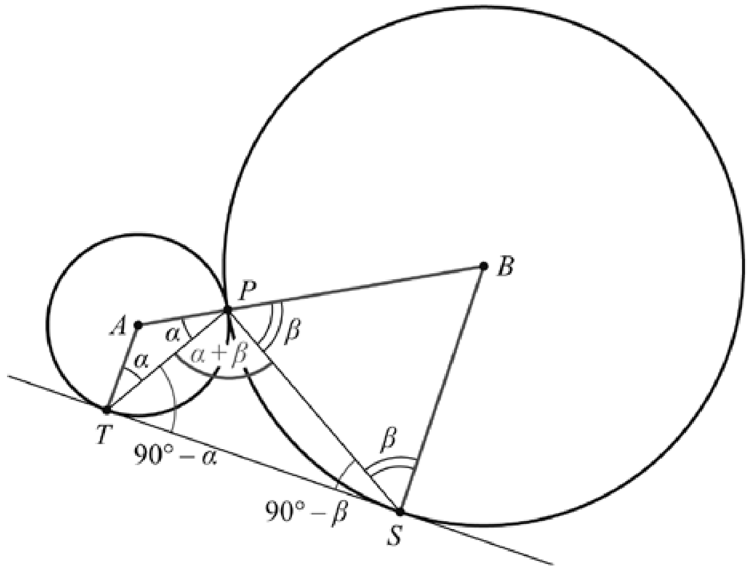
Sposób 1:
Krok 1: AT i BS są prostopadłe do prostej TS (promienie okręgów stycznych do prostej).



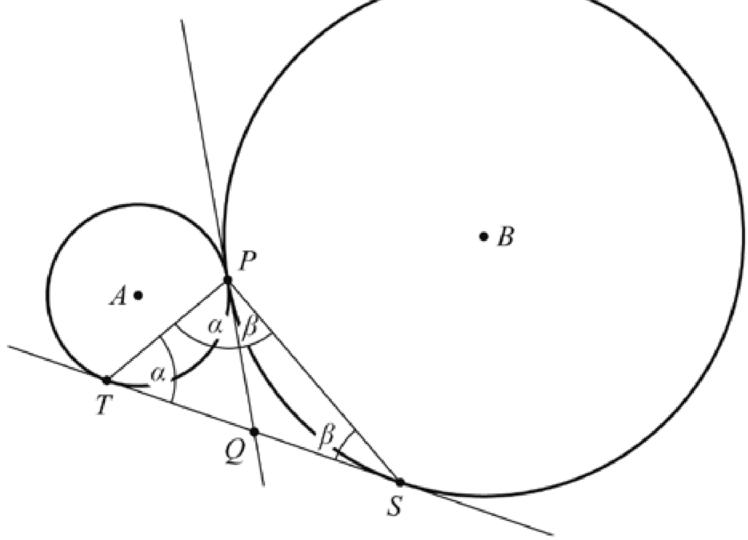
Krok 2: Narysujmy prostą prostopadłą do TS przechodzącą przez P i zauważmy kąty naprzemianległe:
$\sphericalangle APB = 180^\circ =$
$= 2\sphericalangle APT + 2\sphericalangle BPS$,
zatem
$\sphericalangle APT + \sphericalangle PBS = 90^\circ =$
$= \sphericalangle TPS$.
Koniec dowodu



Sposób 2:
Krok 1: Oznaczamy $\sphericalangle ATP = \alpha$ i $\sphericalangle BSP = \beta$, zatem $\sphericalangle PTS = 90^\circ - \alpha$, $\sphericalangle PST = 90^\circ - \beta$.
Krok 2: – sumy kątów w trójkącie PTS wynika, że
$\sphericalangle TPS = \alpha + \beta =$
$= \frac{1}{2}\sphericalangle APB = 90^\circ$.
Koniec dowodu.



Sposób 3:
Krok 1: rysujemy styczna to danych okręgów w punkcie P. Ta styczna przecina odcinek TS w punkcie Q. Powstają (z twierdzenia o stycznej) dwa trójkąty równoramienne:
Krok 2: – sumy kątów w trójkącie TPS mamy: $2\alpha + 2\beta = 180^\circ$, a stąd $\alpha + \beta = 90^\circ = \sphericalangle TPS$.
Koniec dowodu.

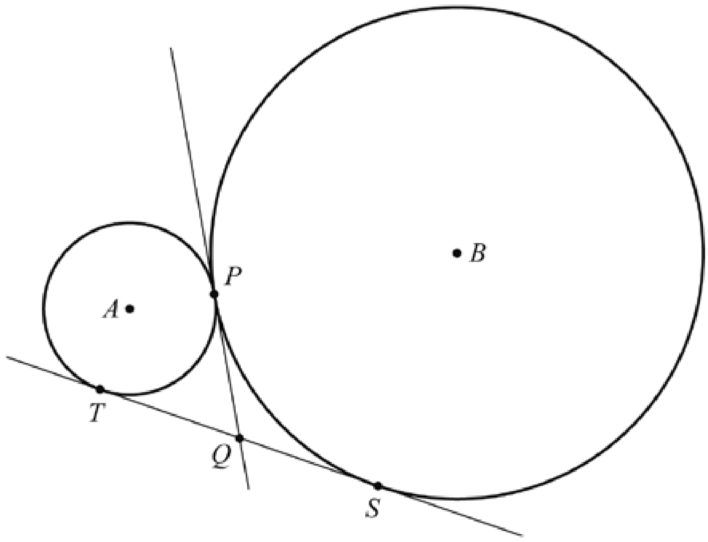


Zadanie 83.

Styczna do tych okręgów w punkcie P przecięła prostą ST w punkcie Q. Wykaż, że $PQ = \frac{1}{2}TS$.

Założenie: okręgi o środkach A i B są styczne zewnętrznie w punkcie P. Prosta zewnętrzna jest styczna do tych okręgów w punktach T i S.

Teza: $PQ = \frac{1}{2}TS$



Dowód:

Krok 1: – twierdzenia o stycznej dla okręgu o środku A mamy $TQ = PQ$, dla okręgu o środku B mamy $PQ = SQ$.

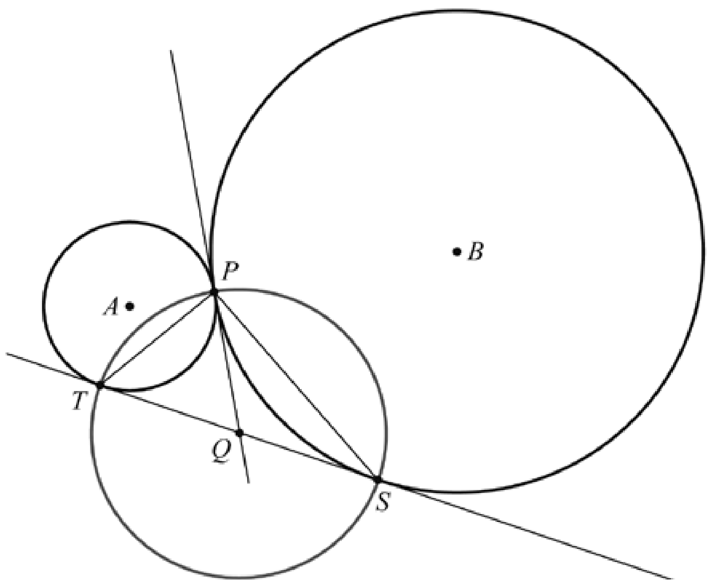
Krok 2: Niech $PQ = a$, zatem $TQ = a = SQ$, stąd $AS = 2a$, a zatem $PQ = \frac{1}{2}TS$.

Koniec dowodu.

Zadanie 84.

Okręgi o środkach A i B są styczne zewnętrznie w punkcie P. Prosta zewnętrzna jest styczna do tych okręgów w punktach T i S. Styczna do tych okręgów przechodząca przez P przecina odcinek TS w punkcie Q. Wykaż, że Q jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie QST.

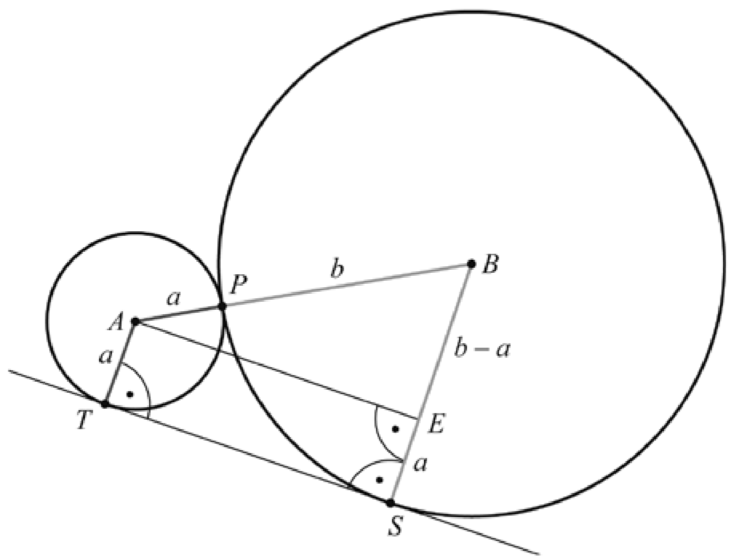
Założenie: Okręgi o środkach A i B są styczne zewnętrznie w punkcie P. Prosta zewnętrzna jest styczna do tych okręgów w punktach T i S. Styczna do tych okręgów przechodząca przez P przecina odcinek TS w punkcie Q.



Teza: Q jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie QST.
Dowód:
Krok 1: – zadania 82. wiemy, że $\sphericalangle TPS = 90°$, zatem trójkąt PST jest prostokątny, z zadania 83. wiemy, że $PQ = TQ = SQ$.
Krok 2: Z ostatniej równości wynika, że Q jest środkiem przeciwprostokątnej trójkąta PST, zatem jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym PST.
Koniec dowodu

Zadanie 85.

Okręgi o środku A i promieniu a oraz o środku B i promieniu b są styczne zewnętrznie w punkcie P. Prosta zewnętrzna jest styczna do tych okręgów w punktach T i S. Wykaż, że $|ST| = 2\sqrt{ab}$.



Założenie: Okręgi o środku A i promieniu a oraz o środku B i promieniu b są styczne zewnętrznie w punkcie P. Prosta zewnętrzna jest styczna do tych okręgów w punktach T i S.
Teza: $|ST| = 2\sqrt{ab}$
Dowód:
Krok 1: Zauważamy, że czworokąt $ABST$ jest trapezem prostokątnym. Prowadzimy wysokość AE na BS tworząc trójkąt prostokątny o bokach długości $a + b$, $b - a$ oraz $AE = TS$.
Krok 2: Z tw. Pitagorasa otrzymujemy

$$(a + b)^2 = (b - a)^2 + |TS|^2$$
$$a^2 + 2ab + b^2 = b^2 - 2ab + b^2 + |TS|^2$$
$$4ab = |TS|^2$$
$$|ST| = 2\sqrt{ab}$$

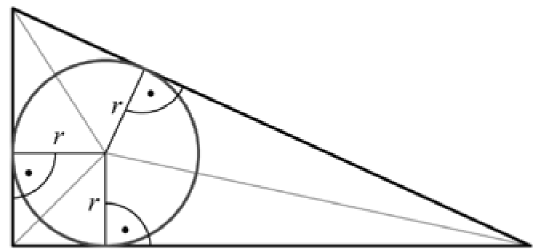
Koniec dowodu.

Zadanie 86.

Wykaż, że promień okręgu wpisanego w trójkąt 5, 12, 13 ma długość 2.

Założenie: Dany jest trójkąt o bokach 5, 12, 13.
Teza: promień okręgu wpisanego jest równy 2.

Sposób 1:



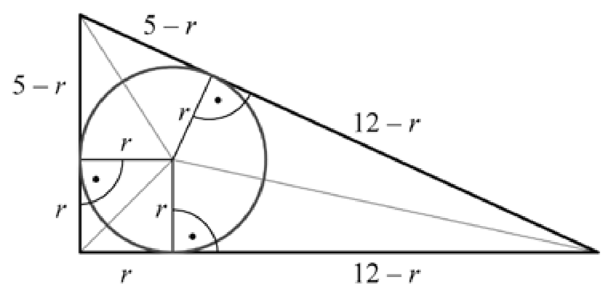
Krok 1: Pole trójkąta możemy policzyć na dwa sposoby:

$P = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 12 = 30$ lub zauważając, że dwusieczne kątów (zaznaczone odcinki) dzielą nasz trójkąt na trzy trójkąty, których wysokości to promienie okręgu wpisanego:

$$P = \frac{1}{2} \cdot r \cdot 5 + \frac{1}{2} \cdot r \cdot 12 + \frac{1}{2} \cdot r \cdot 13 = \frac{1}{2} \cdot r \cdot 30 = 15r$$

Krok 2:
Pole trójkąta jest takie samo niezależnie od metody liczenia, zatem $30 = 15r$, stąd $r = 2$.
Koniec dowodu.

Sposób 2:



Krok 1: Z twierdzenia o stycznej zachodzą równości jak na rysunku obok:
Krok 2:
Przeciwprostokątna tego trójkąta ma długość 13, zachodzi zatem równość:

$13 = 5 - r + 12 - r$
$13 = 17 - 2r$
$-4 = -2r$
$r = 2$

Koniec dowodu.


Janusz Karkut
MATEMATYKA
w liceum i technikum
Zbiór zadań na
120 zadań
z rozwiązaniami

Żadna nauka nie wzmacnia tak wiary w potęgę umysłu ludzkiego jak matematyka.
Hugo Steinhaus

Biorąc do ręki ten wybór zadań, można zadać sobie pytanie: „Skąd ten tytuł? Dlaczego zadania na 6?”. Może dlatego, że 6 jest liczbą doskonałą, taką, która jest równa sumie wszystkich swoich dzielników, za wyjątkiem ostatniego (samej liczby). Następnymi liczbami doskonałymi są: 28, 496, 8128, 33550336, … . Obok liczb doskonałych jest jeszcze wiele innych liczb o ciekawych własnościach: liczby Fibonacciego, Catalana itd. Ta paralela (również podczas rozwiązywania zadań) może być podstawą do zaproponowania uczniom projektu jako metody nauczania. Taką możliwość eksponują wplecione w zbiór cztery artykuły.

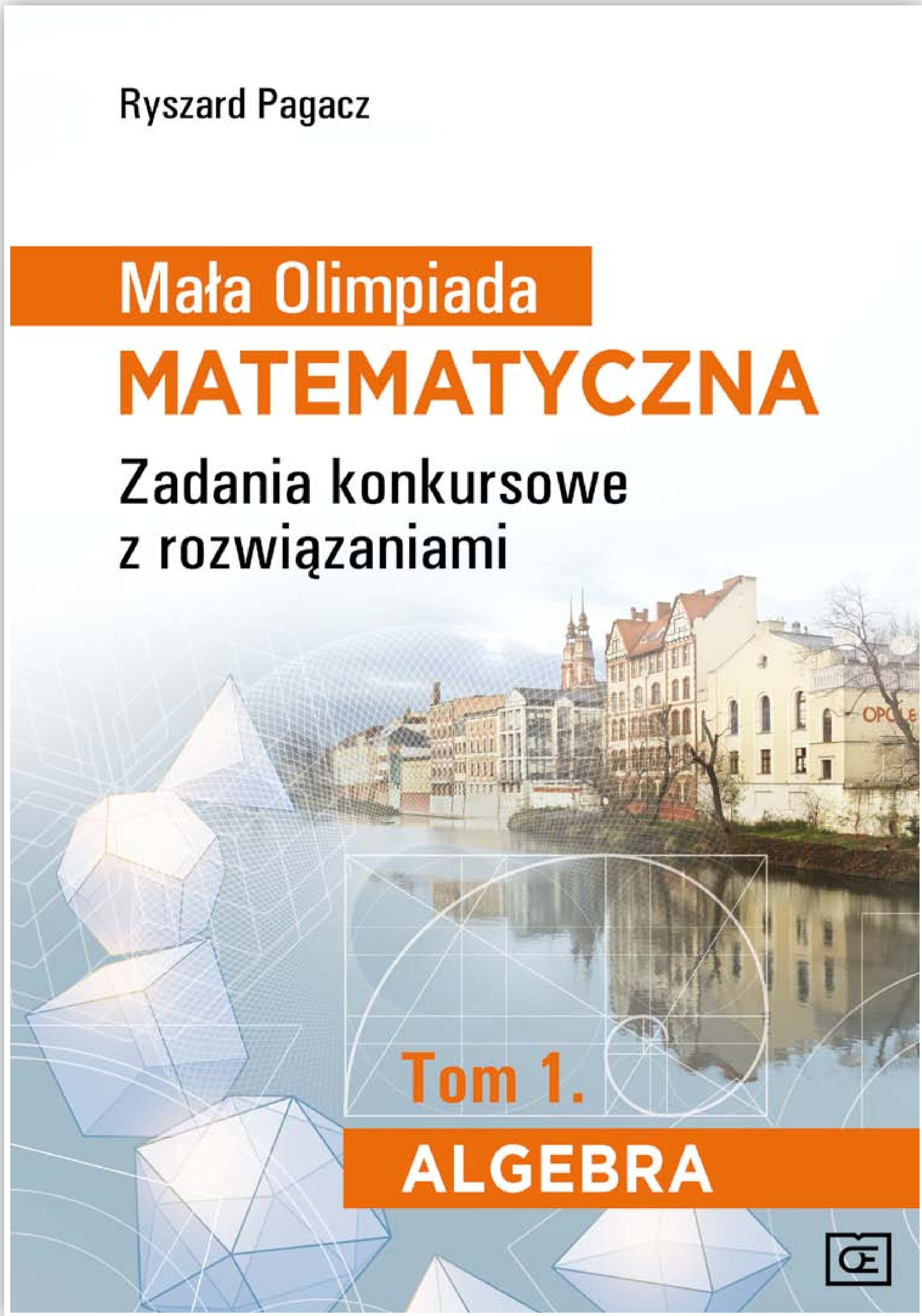
Nauczyciele powinni dostarczać swoim najlepszym uczniom interesujących i trudnych zadań, które pomogą im wciąż dostrzegać magię w matematyce. Zadania zamieszczone w tym zbiorze są rozwiązane, ale są to tylko przykłady prawidłowych rozwiązań. Matematyka, jak żaden inny przedmiot, ma wyjątkową cechę: umożliwia indywidualną sprawczość – większość zadań można bowiem rozwiązać na wiele sposobów. Dodatkowo, dzięki tej własności, jeśli tylko matematyce na to pozwolimy, uczyni z nas matematycznych odkrywców; nas – nauczyciela i ucznia.

Zachęcam Was, drodzy Czytelnicy, do podjęcia samodzielnej próby znalezienia własnych metod rozwiązania. Nie zniechęcajcie się, jeśli za pierwszym razem rozwiążecie samodzielnie niewiele zadań z tej książki. Zadania mają być trudne, a niektóre problemy będą wymagać od Was wielokrotnego, uważnego czytania i wielu prób ich rozwiązań, nawet w ciągu kilku miesięcy. Zalecam czytanie rozwiązań, nawet jeśli zadanie zostanie rozwiązane poprawnie. Czytanie tekstu rozwiązania też jest nauką. Śledząc metodę rozwikłania matematycznego problemu, możecie znaleźć inną strategię niż ta, której użyliście do rozwiązania danego zadania i która będzie przydatna w innym poleceniu. Zdarzy się też tak, że uzyskacie bardziej wysmakowane i błyskotliwe rozwiązania, niż te przedstawione przez autora.

W niektórych rozwiązaniach pojawiają się obliczenia wykonane z zastosowaniem CAS GeoGebry. Jest to zabieg celowy, pokazujący, że nie trzeba tracić czasu na żmudne rachunki. Wiele wykresów (jeśli nie były głównym celem zadania) wykonałem też w GeoGebrze: są precyzyjne i estetyczne. W tym miejscu wspomnę jeszcze o możliwości zmieniania zadań choćby poprzez zmianę danych lub pewnych warunków. Zapewniam, że GeoGebra jest niezastąpiona w szybkim sprawdzaniu możliwości rozwiązania.

Chciałbym, aby – dzięki tej książce – nauczyciele umieli wykorzystać drzemiący w nich dydaktyczny entuzjazm mentora, a ich uczniowie – by poczuli sprawczą moc swego intelektu. Pozwólcie zatem, że zabiorę Was w świat matematycznej magii…

Autor


Ryszard Pagacz
Mała Olimpiada
MATEMATYCZNA
Zadania konkursowe
z rozwiązaniami
Tom 1.
ALGEBRA

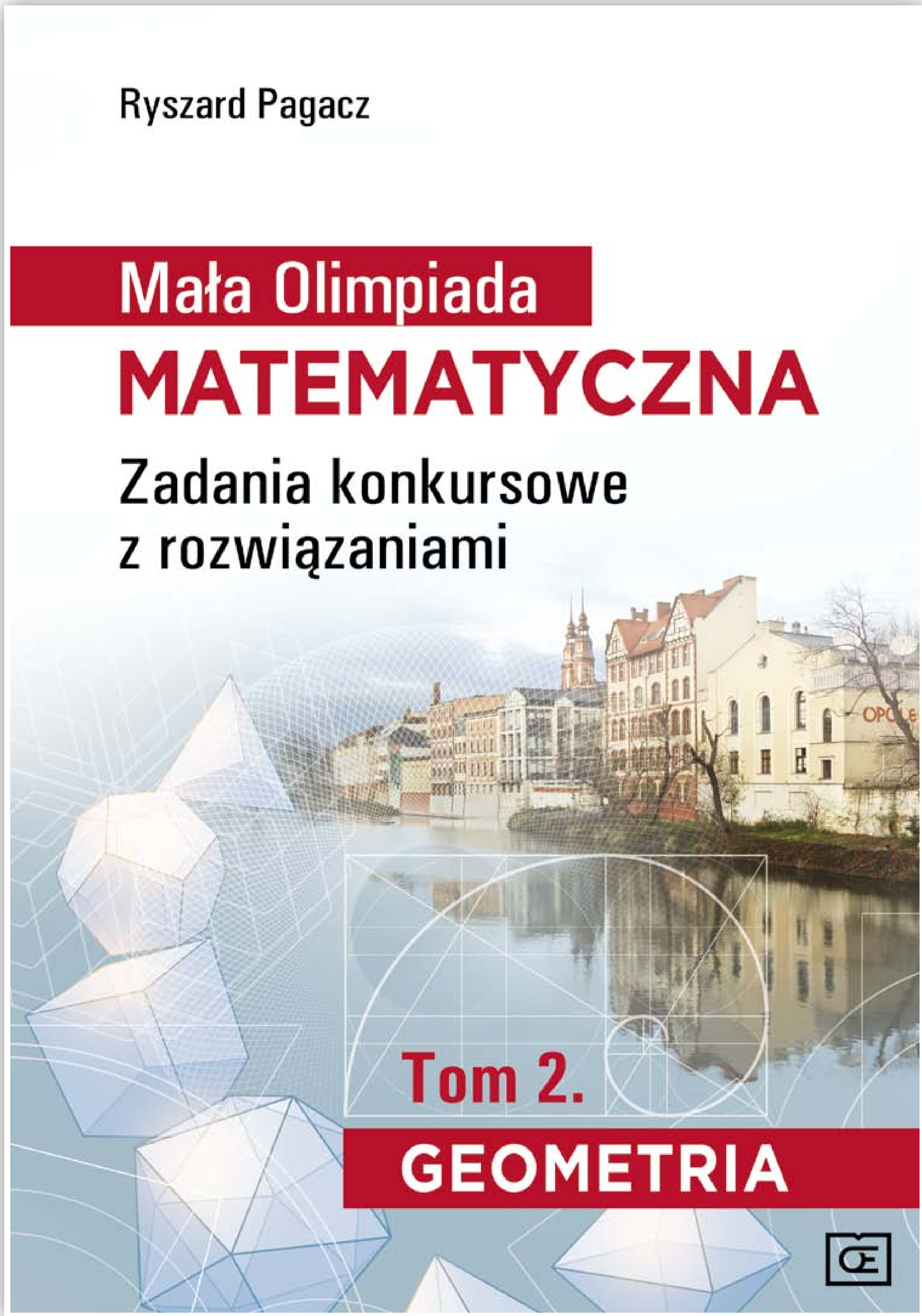
Od Autora

W roku szkolnym 2021/2022 na Opolszczyźnie odbyły się LIV zawody Małej Olimpiady Matematycznej. Jest to jeden z najdłużej istniejących regionalnych konkursów matematycznych dla młodzieży szkół ponadpodstawowych w Polsce. Pierwsze zawody odbyły się w roku szkolnym 1967/1968. Zawody te od samego początku mają formułę zawodów drużynowych oraz indywidualnych. Do roku szkolnego 1977/1978 w zawodach uczestniczyli uczniowie tylko drugich klas szkół ponadpodstawowych. W latach 1978/1979 i 1979/1980 w drużynie szkolnej był również jeden uczeń klasy pierwszej. Od roku szkolnego 1980/1981 drużyna szkolna składa się z czterech uczniów dowolnej klasy.

Organizatorem Małej Olimpiady Matematycznej jest Kuratorium Oświaty w Opolu. Zadania od I do XXXV (2001/2002) Małej Olimpiady Matematycznej opracowywał zmarły w tym roku Pan Stanisław Zieleń. To wielce zasłużona postać dla opolskiej oświaty – nauczyciel, metodyk i doradca, autor podręczników do nauczania matematyki w szkołach średnich oraz różnorodnych zbiorów zadań. Od XXXVI Małej Olimpiady Matematycznej za zadania jest odpowiedzialna Komisja Konkursowa powoływana przez Kuratorium Oświaty w Opolu.

Zamieszczone zadania, oprócz walorów historycznych, mogą być świetną pomocą w przygotowaniu się do udziału w różnorodnych konkursach matematycznych. Zadania te również mogą być pomocne dla maturzystów przygotowujących się do matury z matematyki na poziomie rozszerzonym. Do wszystkich zadań dołączone są rozwiązania.

Dziękuję wszystkim, którzy mnie zachęcali do opracowania tego bogatego materiału. Szczególnie dziękuję Panu Dyrektorowi Mariuszowi Mączyńskiemu z Oficyny Pazdro oraz redaktorowi tego wydawnictwa - Panu Doktorowi Tomaszowi Szwedowi. Dziękuję również mojej Żonie, że cierpliwie i ze zrozumieniem znosi moje zaangażowanie w zadania matematyczne.


Ryszard Pagacz
Mała Olimpiada
MATEMATYCZNA
Zadania konkursowe
z rozwiązaniami
Tom 2.
GEOMETRIA


Matematyka
TWIERDZENIA I DOWODY
Zadania z rozwiązaniami
do liceów i techników
Matura
od 2023 r.
Ryszard Pagacz
Janusz Karkut
Tomasz Szwed
Publikacja
zgodna z nową
podstawą
programową,
obowiązującą
od września
2019 r.

Spis treści

Publikacja **„Matematyka. Twierdzenia i dowody. Zadania z rozwiązaniami do liceów i techników"** jest zgodna z podstawą programową MEN, która obowiązuje w tych szkołach od września 2019 roku (rozporządzenie MEN z dnia 30 stycznia 2018 roku w sprawie podstawy programowej kształcenia ogólnego dla liceum ogólnokształcącego, technikum oraz branżowej szkoły II stopnia, DzU 2018, poz. 467). Zamieściliśmy w niej dowody wszystkich twierdzeń matematycznych wymienionych w tym rozporządzeniu. Bardzo często dowody pokazujemy w kilku wariantach. Mamy nadzieję, że każdy uczeń odnajdzie sposób przeprowadzenia dowodu właściwy dla siebie i swoich umiejętności.

Zachęcamy do korzystania z tej książki zarówno uczniów, jak i nauczycieli, niekoniecznie związanych z nowym liceum i technikum. Polecamy ją wszystkim zainteresowanym matematyką. Dla nauczycieli matematyki czytanie i dogłębna analiza dowodów oraz rozwiazywanie załączonych zadań na dowodzenie będzie okazją do doskonalenia swojego warsztatu pracy oraz poszerzenia możliwości rozwiazywania trudnych zadań. Prezentowany materiał pozwoli uczniom lepiej zrozumieć matematykę i solidniej przygotować się do studiowania jej na wyższym etapie edukacyjnym.

Podsumowując, książka **„Twierdzenia i dowody..."** to:

- zestaw najważniejszych twierdzeń matematyki w liceum i technikum wraz z dowodami,
- możliwość prześledzenia różnych sposobów dowodzenia twierdzeń,
- inspiracja dla ucznia do samodzielnego dowodzenia twierdzeń,
- wsparcie metodyczne dla nauczyciela w trudnej sztuce nauczania dowodzenia,
- bogate źródło trudnych i oryginalnych zadań dla ucznia wraz z rozwiązaniami,
- znakomity materiał do kształtowania umiejętności rozumowania i myślenia matematycznego,
- wsparcie realizacji podstawy programowej z matematyki,
- skuteczne przygotowanie uczniów do egzaminu maturalnego, również od 2023 roku.

Życzymy naszym Czytelnikom dobrej i twórczej pracy.

Autorzy

1.9. TWIERDZENIE O DWUSIECZNEJ

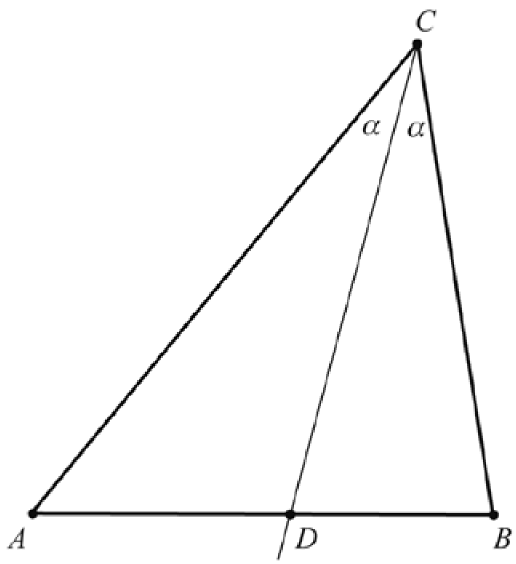
Podstawa programowa

9. Twierdzenie o dwusiecznej:
Jeśli prosta CD jest dwusieczną kąta ACB w trójkącie ABC i punkt D leży na boku AB, to $\frac{|AD|}{|BD|} = \frac{|AC|}{|BC|}$.

Twierdzenie to możemy zapisać również w postaci:

Twierdzenie P9.1.

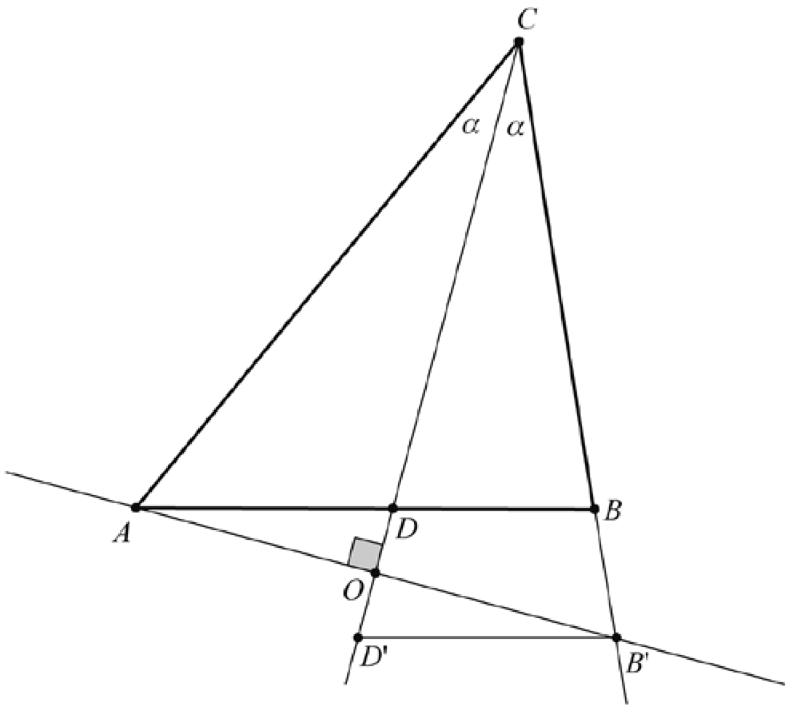
Dwusieczna kąta wewnętrznego w trójkącie dzieli przeciwległy bok na odcinki proporcjonalnie do boków przyległych.



Przy przyjętych oznaczeniach treść twierdzenia wyraża proporcja:

$$\frac{|AD|}{|DB|} = \frac{|AC|}{|BC|}.$$

Dowód 1.



Zakładamy, że $|AC| \neq |BC|$. W przypadku, gdy $|AC| = |BC|$ trójkąt ABC jest równoramienny, wtedy $|AD| = |DB|$ i teza jest oczywista.

Z punktu A prowadzimy prostą prostopadłą do dwusiecznej CD. Prosta ta przecina dwusieczną w punkcie O, natomiast prostą BC w punkcie B'.

Ponieważ w trójkącie AB'C dwusieczna jest prostopadła do podstawy AB', więc trójkąt AB'C jest trójkątem równoramiennym, zatem

$$|AO| = |OB'| \text{ i } |AC| = |B'C|.$$

Poprowadźmy jeszcze przez punkt B' prostą równoległą do boku AB. Przecina ona prostą CD w punkcie D'. Trójkąty ADO i B'D'O są przystające (kbk), więc $|D'B'| = |AD|$.

Z podobieństwa trójkątów DBC i D'B'C wynika, że

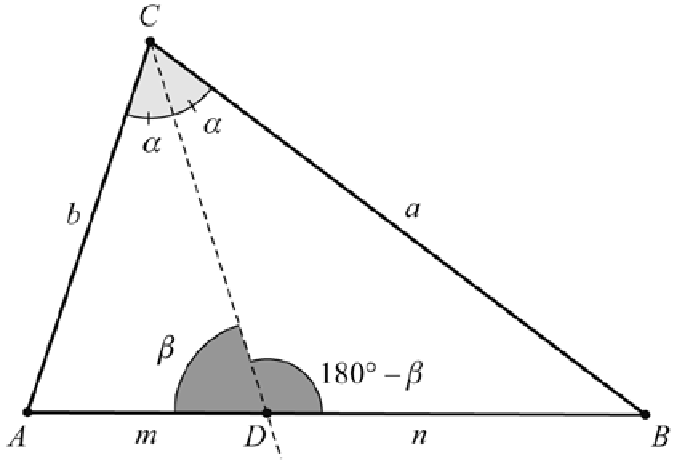
$$\frac{|D'B'|}{|DB|} = \frac{|B'C|}{|BC|},$$

czyli

$$\frac{|AD|}{|DB|} = \frac{|AC|}{|BC|},$$

co należało wykazać.

Dowód 2.



Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.

Z twierdzenia sinusów zastosowanego do trójkątów *ADC* i *DBC* wynika, że

$$\frac{m}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$$

oraz

$$\frac{n}{\sin\alpha} = \frac{a}{\sin(180^\circ + \beta)} = \frac{a}{\sin\beta}.$$

Dzieląc stronami równości

$$\frac{m}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} \text{ i } \frac{n}{\sin\alpha} = \frac{a}{\sin\beta},$$

otrzymujemy tezę:

$$\frac{m}{n} = \frac{b}{a},$$

co kończy dowód.

Dowód 3.

Oznaczenia takie jak w dowodzie 2.

Ponieważ stosunek pól trójkątów o równej wysokości równy jest stosunkowi długości ich podstaw, więc

$$\frac{P_{ADC}}{P_{DBC}} = \frac{m}{n}.$$

Z drugiej strony, mamy:

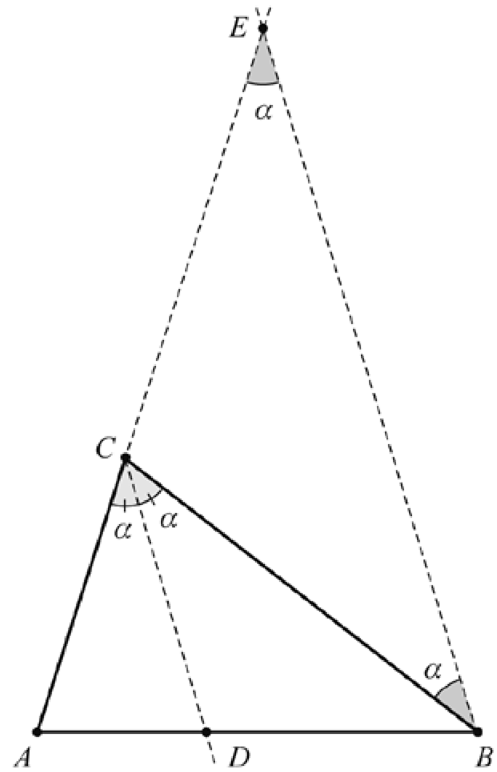
$$\frac{P_{ADC}}{P_{DBC}} = \frac{\frac{1}{2}b|CD|\sin\alpha}{\frac{1}{2}a|CD|\sin\alpha} = \frac{b}{a},$$

zatem

$$\frac{m}{n} = \frac{b}{a} \ ,$$

co należało wykazać.

Dowód 4.



Poprowadźmy prostą równoległą do dwusiecznej CD przechodzącą przez punkt B. Prosta ta przecina półprostą AC w punkcie E.

Ponieważ proste CD i BE są równoległe, więc

$$|\measuredangle ACD| = \alpha = |\measuredangle AEB| \text{ oraz } |\measuredangle DCB| = \alpha = |\measuredangle CBE|.$$

Zatem trójkąt BCE jest równoramienny, czyli $|BC| = |CE|$.

Z twierdzenia Talesa i powyższej równości otrzymujemy:

$$\frac{|AD|}{|DB|} = \frac{|AC|}{|CE|} = \frac{|AC|}{|BC|},$$

co kończy dowód.

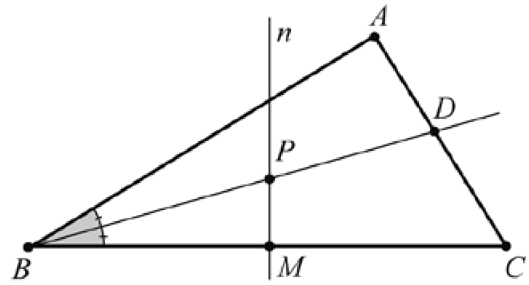
Twierdzenie P9.2.

Jeżeli dwusieczna kąta zewnętrznego w trójkącie przecina prostą na której leży bok przeciwległy, to odcinki zawarte między punktem przecięcia i końcami tego boku są proporcjonalne do przyległych boków.

2.9. TWIERDZENIE O DWUSIECZNEJ

Zadanie P9.1.

Niech ABC będzie trójkątem prostokątnym, którego kąt prosty znajduje się w wierzchołku A. Poprowadźmy dwusieczną BD kąta wewnętrznego przy wierzchołku B, a przez M oznaczmy środek przeciwprostokątnej BC. Następnie poprowadźmy przez punkt M prostą n, prostopadłą do BC. Prosta ta przecina prostą BD w punkcie P.

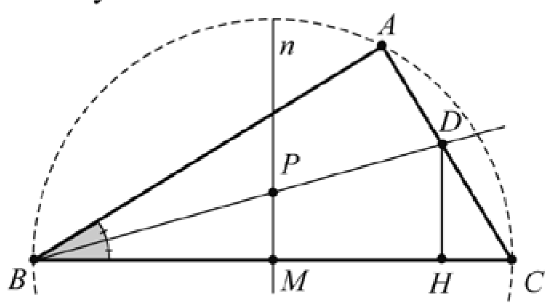


Wykaż, że

$$|CD| = 2|MP|.$$

Rozwiązanie

Przyjmijmy oznaczenia na rysunku.



Z twierdzenia P9.1 otrzymujemy:

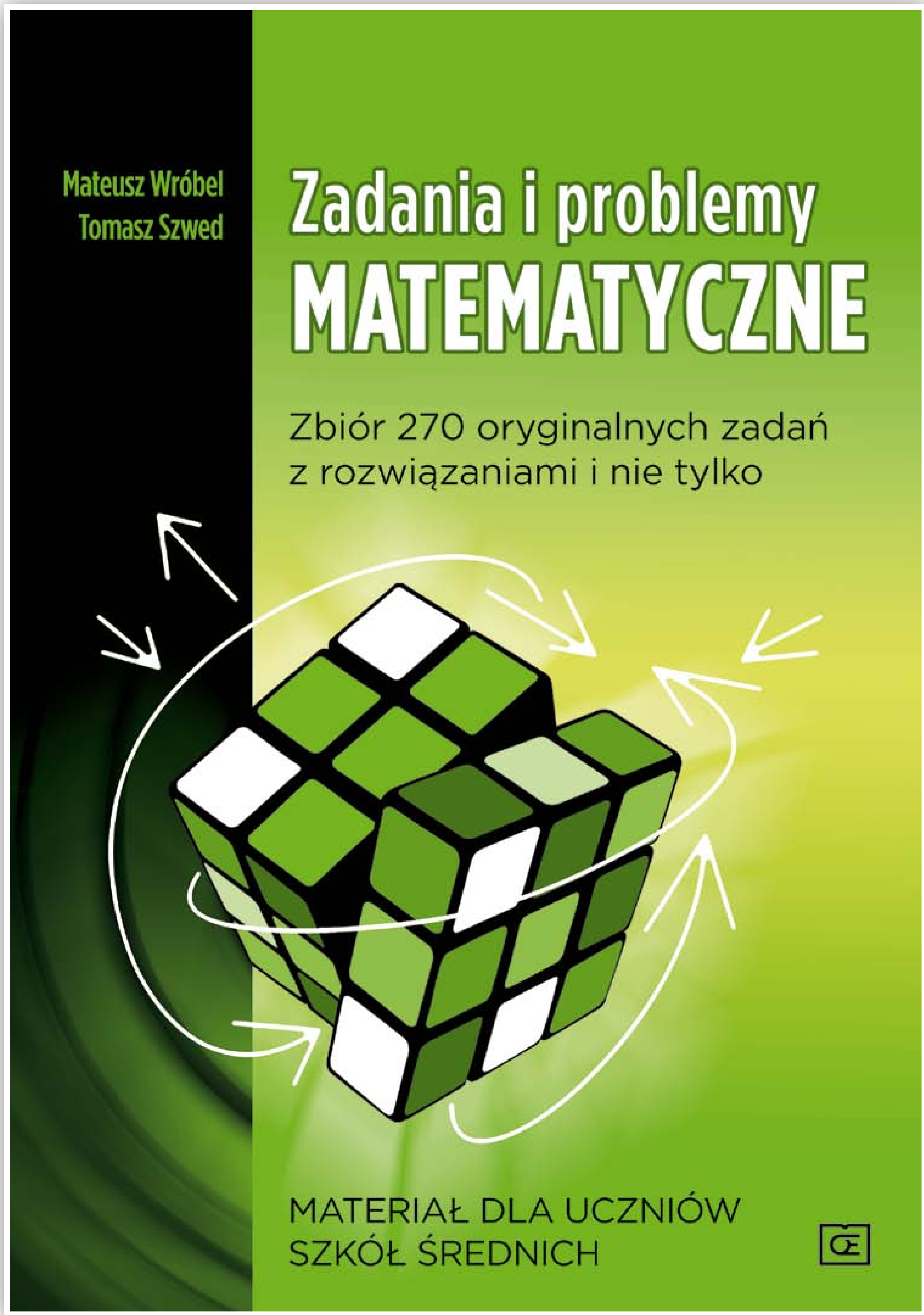
$$\frac{|CD|}{|AD|} = \frac{|BC|}{|AB|}.$$

Skąd

$$(1)\ |CD| = \frac{|BC| \cdot |AD|}{|AB|}.$$

Punkt H jest rzutem prostokątnym punktu D na przeciwprostokątną BC. Zauważmy, że trójkąty prostokątne BMP i BHD są podobne, zatem

$$(*)\ \frac{|HD|}{|BH|} = \frac{|MP|}{|BM|}.$$


Mateusz Wróbel
Tomasz Szwed
Zadania i problemy
MATEMATYCZNE
Zbiór 270 oryginalnych zadań
z rozwiązaniami i nie tylko
MATERIAŁ DLA UCZNIÓW
SZKÓŁ ŚREDNICH

Zacznij od zrobienia tego, co konieczne; potem zrób to, co możliwe.
Nagle odkryjesz, że dokonałeś niemożliwego.
św. Franciszek z Asyżu

„Zadania i problemy matematyczne…” adresujemy przede wszystkim do uczniów przygotowujących się do egzaminu maturalnego z matematyki na poziomie rozszerzonym. Znajdą oni w tym zbiorze blisko 270 oryginalnych zadań i problemów matematycznych. Każde zadanie – problem posiada pełne rozwiązanie i stanowi wartościowy materiał do samokształcenia oraz poznania różnorodnych metod i narzędzi matematycznych, służących efektywnemu rozwiązywaniu zadań.

Książka ta z powodzeniem wzbogaci warsztat pracy każdego nauczyciela matematyki. Będzie również cennym materiałem dydaktycznym dla nauczycieli przygotowujących uczniów do egzaminu maturalnego z matematyki na poziomie rozszerzonym. Zadania zawarte w tym zbiorze będą dobrym materiałem ćwiczeniowym na kółka matematyczne i inne zajęcia dodatkowe, mające na celu pogłębienie kompetencji matematycznych uczniów.

Zbiór składa się z trzech części:

- **zadania – „startery”** (z odpowiedziami),
- **zadania – problemy** (z pełnymi rozwiązaniami),
- **zadania przeznaczone do samodzielnego rozwiązania.**

Aby pomóc uczniowi w zorganizowaniu pracy, zbiór podzielono na trzydzieści jednostek – każda z nich zawiera dwa startery i pięć problemów. Na rozwiązanie zadań zawartych w jednej jednostce trzeba przeznaczyć około godziny.

Naturalnymi towarzyszami procesu uczenia się są: praca, trud, zaangażowanie, zmęczenie, niemoc, zniecierpliwienie i popełnianie błędów. Droga do sukcesu w matematyce nie jest łatwa i wymaga ciągłego podtrzymywania motywacji. Dlatego też zdecydowaliśmy się na zamieszczenie trzydziestu inspirujących myśli, zachęcających do pokonywania wszelkiego rodzaju trudności.

Uczenie się matematyki nie jest procesem linearnym, dlatego zadania nie są poukładane według działów programowych. Niezwykle ważną umiejętnością maturzysty jest dobór narzędzi właściwych do postawionego problemu. Aby ułatwić orientację w zawartości merytorycznej zadań i przypisanie ich do konkretnych działów programowych, przygotowaliśmy poniższy wykaz:

Liczby. Dowody algebraiczne: 1.1, 1.2, 2.1, 2.2, 3.1, 3.6, 3.7, 5.2, 5.4, 6.2, 7.1, 7.2, 8.1, 8.2, 8.7, 9.1, 9.2, 10.4, 10.5, 10.6, 17.2, 17.5, 18.2a, 20.4, 22.4, 22.5, 22.6, 23.6, 27.1, 29.3. Zadania do samodzielnego rozwiązania: 2, 13, 14, 26, 32, 40, 44, 45.

Funkcje. Funkcja kwadratowa: 2.6, 3.2, 3.4, 4.2, 5.1, 5.7, 6.1, 6.3, 6.5, 9.4, 14.6, 15.1,

16.3, 18.1, 18.2b, 18.3, 18.4, 19.2, 21.3, 21.6, 21.7, 25.5, 26.2, 28.1, 28.7, 29.1, 29.4, 30.2.
Zadania do samodzielnego rozwiązania: 12, 30.

Wielomiany i funkcja wymierna: 4.1, 5.3, 6.7, 10.1, 10.2, 10.7, 11.3, 12.7, 13.1, 13.2, 13.3, 13.4, 14.1, 14.2, 14.4, 14.5, 14.7, 15.2, 15.3, 16.1, 16.2, 17.7, 28.2.
Zadania do samodzielnego rozwiązania: 47, 49.

Planimetria. Dowody geometryczne: 1.7, 2.3, 2.4, 4.3, 4.4, 4.6, 6.6, 7.4, 9.3, 9.5, 9.6, 11.2, 11.5, 11.7, 12.1, 12.4, 12.5, 12.6, 13.6, 13.7, 14.3, 15.5, 16.7, 17.3, 17.4, 19.3, 19.5, 19.6, 20.5, 20.6, 20.7, 21.5, 22.3, 23.5, 23.7, 24.5, 25.4, 27.7, 28.3.
Zadania do samodzielnego rozwiązania: 1, 10, 17, 38, 42, 48.

Geometria analityczna: 1.3, 1.4, 4.7, 5.6, 7.5, 7.6, 11.4, 16.6, 19.7, 23.3, 23.4, 24.4, 25.2, 25.3, 28.5.
Zadania do samodzielnego rozwiązania: 15, 25, 31.

Ciągi liczbowe: 1.5, 2.7, 3.3, 3.5, 4.5, 9.7, 10.3, 11.6, 12.2, 16.4, 16.5, 19.1, 20.1, 25.6, 25.7, 26.3, 26.4, 26.5, 26.6, 26.7, 27.3, 27.4, 27.5, 29.5.
Zadania do samodzielnego rozwiązania: 11, 41.

Trygonometria: 5.5, 8.6, 11.1, 17.1, 17.6, 29.2, 30.1.
Zadania do samodzielnego rozwiązania: 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 22, 23, 24, 34, 39.

Stereometria: 7.7, 8.3, 8.4, 8.5, 13.5, 15.6, 18.5, 18.6, 18.7, 23.2, 24.1, 27.2, 28.4.
Zadania do samodzielnego rozwiązania: 16, 28, 43, 46.

Granice, pochodne, optymalizacja: 7.3, 15.7, 19.4, 20.2, 21.1, 21.2, 22.1, 22.2, 24.6, 24.7, 27.6, 29.6, 29.7, 30.3, 30.4, 30.5, 30.6, 30.7.
Zadania do samodzielnego rozwiązania: 18, 19, 21, 33.

Kombinatoryka i rachunek prawdopodobieństwa: 1.6, 2.5, 6.4, 12.3, 15.4, 20.3, 21.4, 22.7, 23.1, 24.2, 25.1, 26.1, 28.6.
Zadania do samodzielnego rozwiązania: 20, 27, 29, 35, 36, 37, 50.

Wszystkim Czytelnikom życzymy wyraźnych postępów w kształtowaniu kompetencji matematycznych oraz wyników maturalnych na miarę marzeń, potrzeb edukacyjnych oraz włożonej pracy.

Autorzy

Spis treści

STARTERY

1.1. Oblicz:

a) $\sqrt{10-2\sqrt{21}}$

b) $\left(\sqrt{3-\sqrt{2}}-\sqrt{3+\sqrt{2}}\right)^2$

c) $\left(\sqrt{3}-1\right)^3-\left(\sqrt{3}+1\right)^2$

1.2. Pozbądź się niewymierności z mianownika ułamka:

a) $\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$

b) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{3}}$

c) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{4}+1}$

Prawo przyciągania: szczęście sprzyja tym, którzy się starają.

Barbara Oakley

1.3. Okrąg o_2 ze środkiem leżącym na osi Ox, jest styczny zewnętrznie do okręgu o_1 o równaniu $(x-3)^2+(y+5)^2=25$ i jednocześnie jest styczny do prostej $x+2\sqrt{6}y-3=0$.
Wyznacz równanie okręgu o_2. Rozważ wszystkie przypadki.

1.4. Punkt S leży na osi Ox i jest środkiem okręgu stycznego jednocześnie do obu prostych: $4x-3y+21=0$ oraz $3x+4y-28=0$. Oblicz promień tego okręgu oraz wyznacz współrzędne punktu S. Rozważ wszystkie przypadki.

1.5. W trójwyrazowym ciągu geometrycznym (a,b,c) wszystkie wyrazy są dodatnie. Wyznacz wszystkie wartości ilorazu tego ciągu, dla których odcinki o długościach a, b, c tworzą trójkąt.

1.6. Oblicz, ile jest liczb sześciocyfrowych parzystych, które zawierają co najmniej cztery dwójki.

1.7. Długości boków trójkąta o obwodzie 30 tworzą ciąg arytmetyczny. Największy kąt tego trójkąta wynosi 120°. Oblicz pole tego trójkąta.

1. Oblicz promień okręgu opisanego na trapezie równoramiennym, w którym najdłuższy bok ma długość 22, a każdy z trzech pozostałych boków ma długość 10.

2. Uzasadnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y prawdziwa jest nierówność $4x(1 + y) - 2(x^2 + 2y^2) < 5$.

3. Rozwiąż równanie $\frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} = 6tg\, x$ w przedziale $\langle 0; 2\pi \rangle$.

4. Rozwiąż równanie $\sin 2x - \cos x = \cos 2x + \sin x$ w przedziale $\langle 0; 2\pi \rangle$.

5. Rozwiąż równanie $\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos 2x = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ w przedziale $\langle 0; 2\pi \rangle$.

6. Rozwiąż równanie $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin 2x$ w przedziale $\langle -\pi; \pi \rangle$.

7. Rozwiąż równanie $5\cos 2x + 4\sin x \cdot \cos^2 x + 4\sin x = -1$ w przedziale $\langle 0; 2\pi \rangle$.

8. Rozwiąż równanie $2\sin^2 x - \cos^2 2x = 1$ w przedziale $\langle -\pi; \pi \rangle$.

9. Rozwiąż równanie $\frac{1}{\sin x} + \sin 2x \cdot \mathrm{tg}\, x = 3\sin x$ w przedziale $\langle -2\pi; 2\pi \rangle$.

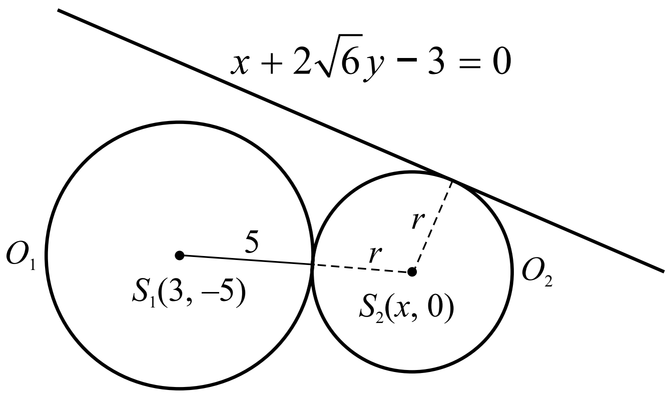
PROBLEMY DO SAMODZIELNEGO ROZWIĄZANIA

1.1. a) $\sqrt{7}-\sqrt{3}$ b) $6-2\sqrt{7}$ c) $4\sqrt{3}-14$

1.2. a) $\dfrac{5-\sqrt{21}}{2}$ b) $\dfrac{\sqrt[3]{49}+\sqrt[3]{21}+\sqrt[3]{9}}{4}$ c) $\dfrac{\sqrt[3]{4}+1}{5}$

1.3. $\left(x-\dfrac{61}{12}\right)^2+y^2=\dfrac{25}{144}$ lub $\left(x-\dfrac{11}{12}\right)^2+y^2=\dfrac{25}{144}$

Rozwiązanie



Z równania okręgu o_1 mamy środek (3, –5) i promień długości 5. Środek okręgu o_2 ma współrzędne $(x, 0)$, bo leży na osi Ox. Odległość punktu $S_2=(x, 0)$ od prostej $x+2\sqrt{6}y-3=0$ jest równa r,

zatem $\dfrac{\left|1\cdot x+2\sqrt{6}\cdot 0+(-3)\right|}{\sqrt{1^2+\left(2\sqrt{6}\right)^2}}=r \Leftrightarrow \dfrac{|x-3|}{5}=r.$

Z warunku na styczność zewnętrzną okręgów mamy:

$$|S_1S_2|=5+r \Leftrightarrow \sqrt{(x-3)^2+(0+5)^2}=5+r \Leftrightarrow \sqrt{(x-3)^2+25}=5+r.$$

Podstawiamy $r=\dfrac{|x-3|}{5}$ do równania $\sqrt{(x-3)^2+25}=5+r.$

$$\sqrt{(x-3)^2+25}=5+\frac{|x-3|}{5} \qquad |\cdot 5$$

$$5\sqrt{(x-3)^2+25}=25+|x-3|$$

Rozwiązujemy równanie w przedziałach:

dla $x \geq 3$

$$5\sqrt{(x-3)^2+25} = 25 + x - 3$$

$$5\sqrt{(x-3)^2+25} = 22 + x \qquad |\cdot(\ )^2$$

$$25\left[(x-3)^2+25\right] = (22+x)^2$$

z powyższego równania mamy $x_1 = \frac{61}{12}$ oraz $x_2 = 3$.

Jednak dla $x = 3$ mamy $r = 0$, więc odrzucamy $x = 3$. Zatem $S_2 = \left(\frac{61}{12}; 0\right)$.

Obliczamy $r = \frac{|x-3|}{5} = \frac{\left|\frac{61}{12} - 3\right|}{5} = \frac{5}{12}$,

Mając środek $S_2 = \left(\frac{61}{12}; 0\right)$ oraz $r = \frac{5}{12}$, otrzymujemy równanie okręgu

$$\left(x - \frac{61}{12}\right)^2 + y^2 = \frac{25}{144}.$$

dla $x < 3$

$$5\sqrt{(x-3)^2+25} = 25 - x + 3$$

$$5\sqrt{(x-3)^2+25} = 28 - x \qquad |\cdot(\ )^2$$

$$25\left[(x-3)^2+25\right] = (28-x)^2$$

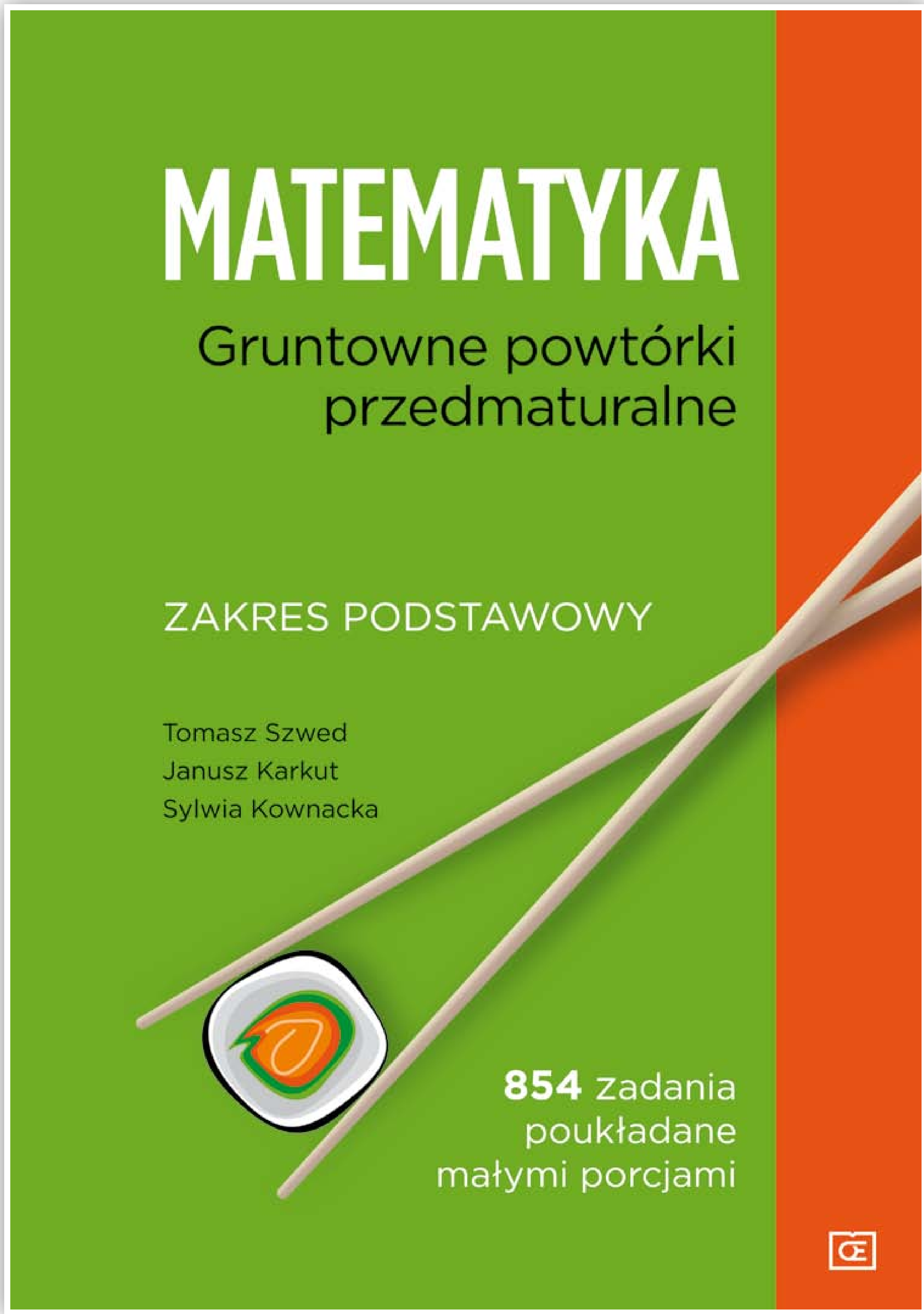
z powyższego równania mamy $x_3 = \frac{11}{12}$ oraz $x_4 = 3$.

Jednak dla $x = 3$ mamy $r = 0$, więc odrzucamy $x = 3$. Zatem $S_2 = \left(\frac{11}{12}; 0\right)$.

Obliczamy $r = \frac{|x-3|}{5} = \frac{\left|\frac{11}{12} - 3\right|}{5} = \frac{5}{12}$.

Mając środek $S_2 = \left(\frac{11}{12}; 0\right)$ oraz $r = \frac{5}{12}$, otrzymujemy równanie okręgu

$$\left(x - \frac{11}{12}\right)^2 + y^2 = \frac{25}{144}.$$


MATEMATYKA
Gruntowne powtórki przedmaturalne
ZAKRES PODSTAWOWY
Tomasz Szwed
Janusz Karkut
Sylwia Kownacka
854 zadania poukładane małymi porcjami

Spis treści

Wstęp

Nie ma znaczenia, jak duże robisz postępy – ważne, że się nie poddajesz.
Konfucjusz

Drogie Uczennice, Drodzy Uczniowie!

Na przygotowanie *Gruntownych powtórek przedmaturalnych* poświęciliśmy blisko dwa lata naszej pracy. Staraliśmy się przygotować zadania o wysokich walorach edukacyjnych. Całość materiału podzieliliśmy na pięćdziesiąt jeden „porcji" – trzydzieści jeden merytorycznych i dwadzieścia samokontrolnych. Chcemy, aby tak uporządkowany materiał ułatwił Wam dogłębne powtarzanie oraz zastosowanie zdobytych kompetencji w różnorodnym kontekście.

Zbiór ten polecamy szczególnie tym, którzy chcą przyzwoicie zdać egzamin maturalny na poziomie podstawowym, według tzw. nowej formuły (od 2015 r.).

Zależy nam na Waszych postępach. Zestawy zadań mają na celu przypomnienie, uporządkowanie i utrwalenie wcześniej nabytych przez Was umiejętności. Odpowiednio dobrane „porcje" zadań ułatwiają powtarzanie poszerzające i pogłębiające (nauczycie się więcej i lepiej to zrozumiecie).

Stawiamy na różnorodność i nieprzewidywalność zadań. Niektóre zadania są bardzo nietypowe, jednak większość z nich powstała na bazie oryginalnych zadań maturalnych Centralnej Komisji Egzaminacyjnej. Odpowiedzi do zadań, dostępne po każdej „porcji", ułatwią samokontrolę. Przygotowane i pogrupowane zadania nie wyczerpują wszystkich wymagań zapisanych w aktualnej podstawie programowej z matematyki, ale świadome i samodzielne ich rozwiązywanie daje solidne podstawy do rozwiązywania zadań trudniejszych.

Nasza publikacja jest przygotowana w formacie sprzyjającym uczeniu się, czyli w A4. Zachęcamy Was do notowania, pisania, podkreślania, rozwiązywania zadań na marginesie, wolnych przestrzeniach między zadaniami oraz zakratkowanych miejscach.

Czytajcie cele każdej porcji i spróbujcie się z nimi utożsamić, traktując je jak swoje. Po każdej „porcji" merytorycznej postarajcie się odpowiedzieć na pytanie kluczowe, dokonajcie też krótkiej samooceny.

Zachęcamy Was do świadomego zaangażowania się w proces uczenia się matematyki.

Życzymy Wam powodzenia!

Autorzy

Oznaczenia:

zadanie testowe

zadanie na dowodzenie

- ✓ Potencjalni odbiorcy: Uczniowie, którzy chcą przyzwoicie zdać obowiązkowy egzamin maturalny z matematyki na poziomie podstawowym, mimo że matematyka nie jest, póki co, ich pasją.
- ✓ Kiedy korzystać z tego zbioru? W pracy indywidualnej, podczas lekcji powtórzeniowych, na różnych zajęciach dodatkowych.

Porcja 22. Ciąg geometryczny

Zestaw wybranych wzorów matematycznych – strona 3.
Miejsce w podstawie programowej: IV.5.2 – 4.

Cel **Przypomnę sobie i utrwalę podstawowe własności ciągu geometrycznego.**

Zadanie 1.

Pierwszy wyraz ciągu geometrycznego jest równy 3, a drugi jest równy –6. Oblicz szósty wyraz tego ciągu.

Zadanie 2.

Dany jest trzywyrazowy ciąg geometryczny $(36, 12, m + 5)$. Oblicz m.

Zadanie 3.

Wyznacz x, jeśli wiadomo, że ciąg $(10, 20, 2x + 1)$ jest trzywyrazowym ciągiem geometrycznym.

Zadanie 4.

Dany jest ciąg geometryczny $(x, 3x^2, 9x^3, 27)$ o wyrazach dodatnich. Oblicz x.

Zadanie 5.

W ciągu geometrycznym (a_n) dane są: $a_4 = 16$ i $a_8 = 256$. Oblicz $a_1 - a_7$.

Zadanie 6.

Dany jest trzywyrazowy ciąg geometryczny $(3a - 5, 26, 39)$. Oblicz a.

Zadanie 15.

Dany jest niemonotoniczny ciąg geometryczny $(2m, -5, 6p+1, -125)$. Oblicz $m \cdot p$.

Zadanie 16.

Między liczby 3 i 18 wstaw dwie liczby dodatnie tak, aby trzy pierwsze tworzyły ciąg geometryczny, a trzy ostatnie ciąg arytmetyczny.

Zadanie 17.

Dany jest ciąg geometryczny $1, 3, 9, x, y, \ldots$ Oblicz wartość różnicy $x - y$.

Zadanie 18.

W ciągu geometrycznym o ilorazie całkowitym dane są trzy kolejne wyrazy: $3x - 2$, $x - 10$, $8x$. Wyznacz x.

Zadanie 19.

Oblicz sumę dwudziestu kolejnych wyrazów ciągu geometrycznego $5^1, 5^2, 5^3, \ldots$

Zadanie 20.

W ciągu geometrycznym (a_n) dane są: $a_1 = 4$ i $a_2 = 12$. Oblicz a_{10}.

Co ma wspólnego ciąg geometryczny z geometrią?

SAMOCENA

Po dzisiejszej powtórce umiem: Zaznacz + / -

1. Wyznaczyć kolejne wyrazy ciągu geometrycznego.

2. Zastosować wzór na n-ty wyraz ciągu geometrycznego.

3. Użyć w zadaniu wzoru na sumę n kolejnych wyrazów ciągu geometrycznego.

4. Wykorzystać własność trzech kolejnych wyrazów ciągu geometrycznego.

Wskaźnik postępu: 22/51

Test samokontrolny nr 6

Zadanie 1.

Siódmym wyrazem ciągu określonego wzorem ogólnym $a_n = (-1)^n \cdot 2^n$ jest:

A. –14 **B.** 128 **C.** –128 **D.** 14

Zadanie 2.

Dany jest ciąg określony wzorem ogólnym $a_n = (-\sqrt{3}) \cdot (n^2 - 16)$. Piątym wyrazem tego ciągu jest:

A. $-81\sqrt{3}$ **B.** $-9\sqrt{3}$ **C.** $27\sqrt{3}$ **D.** $81\sqrt{3}$

Zadanie 3.

Dany jest ciąg arytmetyczny, którego pierwszym wyrazem jest 2, zaś różnicą jest $r = 5$. Siódmym wyrazem tego ciągu jest zatem:

A. 10 **B.** 70 **C.** 32 **D.** 37

TEST 6

Zadanie 4.

Dany jest ciąg arytmetyczny, w którym $a_{16} = 23$ i $a_4 = 5$. Różnicą tego ciągu i wyrazem dziesiątym są odpowiednio:

A. $\frac{7}{3}$; 19 **B.** $\frac{3}{2}$; – 4 **C.** $\frac{2}{3}$; 9 **D.** $\frac{3}{2}$; 14

Zadanie 5.

Pierwszym wyrazem ciągu arytmetycznego jest 2, zaś szóstym jest 17. Różnicą tego ciągu jest zatem:

A. 3 **B.** $\frac{5}{2}$ **C.** 15 **D.** $\frac{7}{2}$

Zadanie 6.

Ile jest wyrazów między wyrazami 9 i $\frac{1}{27}$ ciągu geometrycznego o ilorazie $\frac{1}{3}$?

A. 3 **B.** 4 **C.** 5 **D.** 6

Odpowiedzi

1. C

2. B

3. C

4. D

5. A

6. B

7. A

8. B

9. C

10. A

11. 14, 17, 20

12. 36, 144, 576

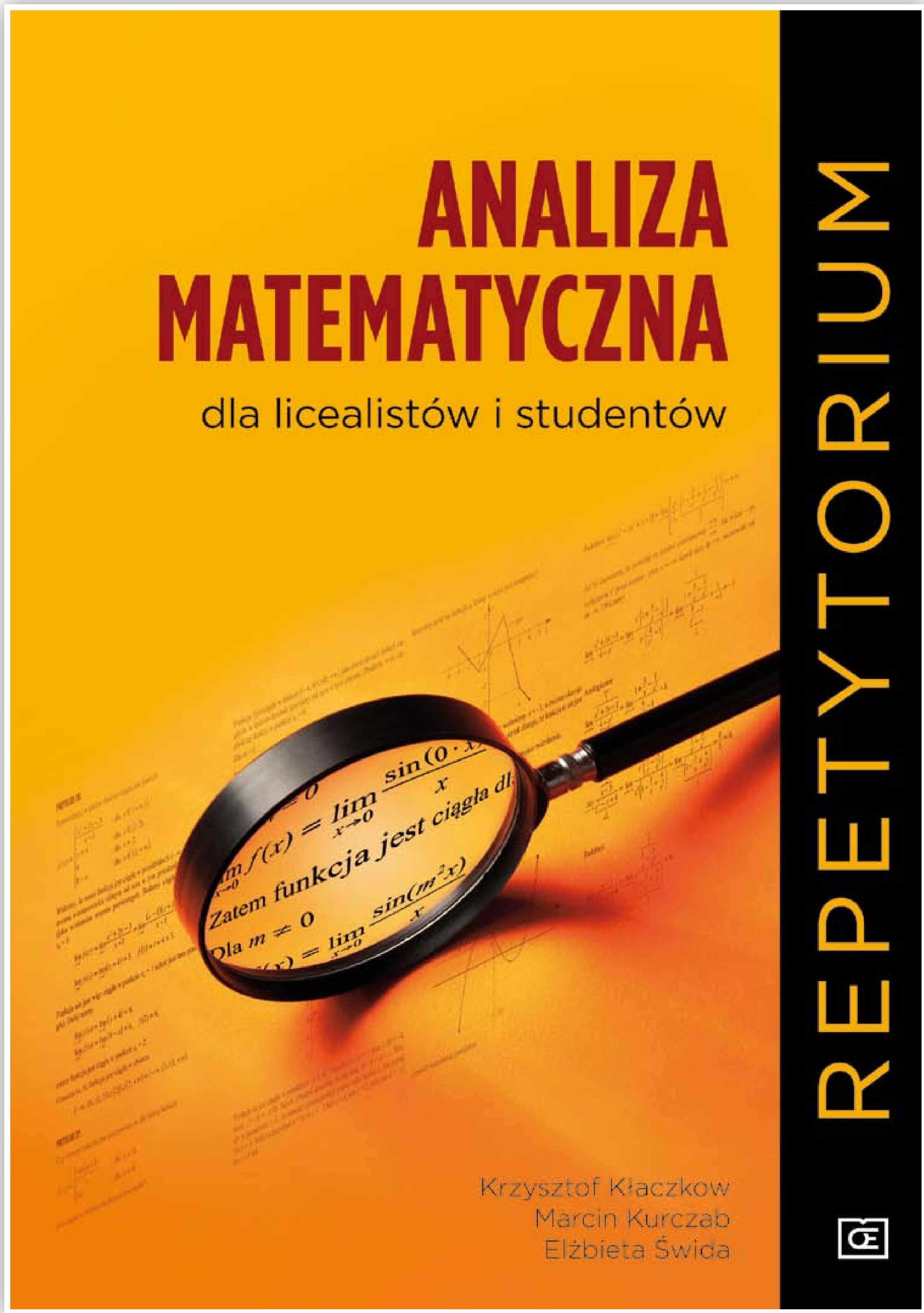
13. $20°$, $60°$

14. 1092

15. $a_1 = \frac{1}{3}$, $r = \frac{2}{3}$

16. **Szkic dowodu:**

wyznacz n z równania $\frac{2\sqrt{3} + 20\sqrt{3}}{2} n = 77\sqrt{3}$.


ANALIZA
MATEMATYCZNA
dla licealistów i studentów
REPETYTORIUM
Krzysztof Kłaczkow
Marcin Kurczab
Elżbieta Świda

Spis treści

ROZDZIAŁ 3.

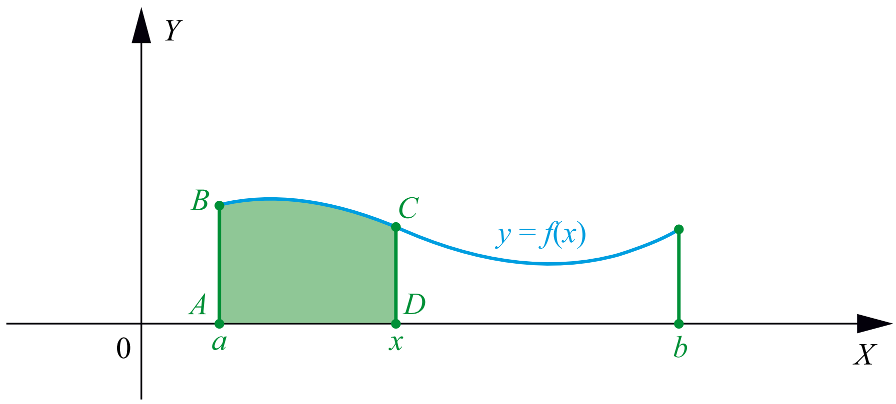
ROZDZIAŁ 4.

TESTY

4.2. Interpretacja geometryczna całki oznaczonej

Udowodnimy teraz pewne twierdzenie, które pozwoli nam na interpretację geometryczną całki oznaczonej.

Niech będzie dana funkcja f, określona w przedziale $\langle a, b \rangle$, ciągła i nieujemna w tym przedziale. Dla $x \in \langle a, b \rangle$ oznaczmy przez $P(x)$ pole figury $ADCB$ (nazywanej trapezem krzywoliniowym):



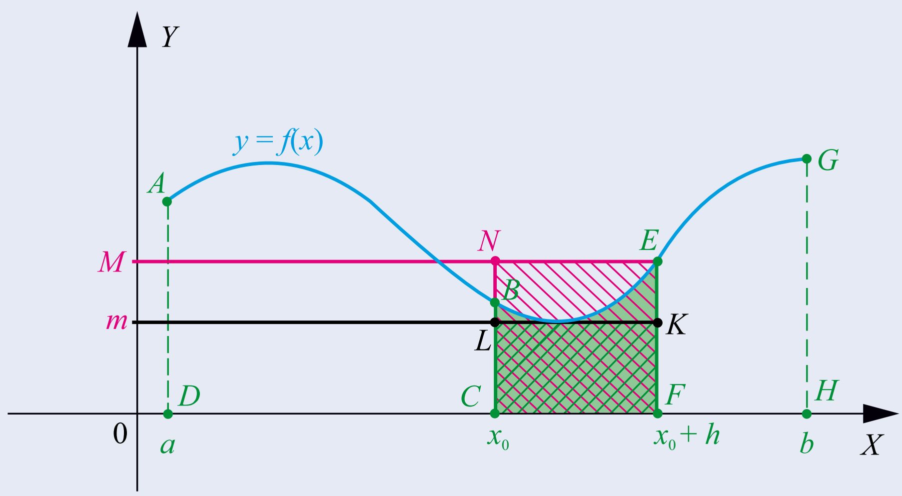
Zachodzi następujące

TWIERDZENIE 3 . **(Newtona - Leibniza)**

Funkcja P jest funkcją pierwotną funkcji f w przedziale $\langle a, b \rangle$,

Dowód.

Weźmy najpierw dowolne $x_0 \in \langle a, b \rangle$, a następnie dowolną liczbę $h \neq 0$, dla której $x_0 + h \in (a, b)$.



Zauważmy, że liczba $|P(x_0 + h) - P(x_0)|$ wyraża pole S_{BCFE} figury $BCFE$. Jeżeli bowiem $h > 0$, to pole figury $BCFE$ wyraża różnica $P(x_0 + h) - P(x_0)$, jeśli zaś h < 0, to pole odpowiedniej figury wyraża różnica $P(x_0) - P(x_0 + h)$.

Tak więc liczby: h oraz $P(x_0+h)-P(x_0)$ są albo obie dodatnie, albo obie ujemne, zatem ich iloraz jest zawsze dodatni. Otrzymujemy stąd, wykorzystując twierdzenie o wartości bezwzględnej ilorazu, że:

$$(1)\qquad \frac{|P(x_0+h)-P(x_0)|}{|h|}=\left|\frac{P(x_0+h)-P(x_0)}{h}\right|=\frac{P(x_0+h)-P(x_0)}{h}.$$

Oznaczmy teraz przez m i M odpowiednio: najmniejszą i największą wartość funkcji f w przedziale domkniętym, którego końcami są x_0 oraz x_0+h (na mocy twierdzenia Weierstrassa mamy pewność, że funkcja osiąga te wartości w tym przedziale, gdyż jest w nim ciągła).

Zauważmy, że zachodzi następująca nierówność dla pól S_{CFKL}, S_{BCFE}, S_{CFEN} odpowiednio figur *CFKL*, *BCFE* i *CFEN*:

$$S_{CFKL}\le S_{BCFE}\le S_{CFEN}.$$

Ale $S_{CFKL}=m\cdot|h|$ i $S_{CFEN}=M\cdot|h|$, zatem mamy:

$$m\cdot|h|\le|P(x_0+h)-P(x_0)|\le M\cdot|h|.$$

Dzieląc ostatnią nierówność stronami przez $|h|$, otrzymujemy:

$$m\le\frac{|P(x_0+h)-P(x_0)|}{|h|}\le M.$$

Po uwzględnieniu równości (1) mamy:

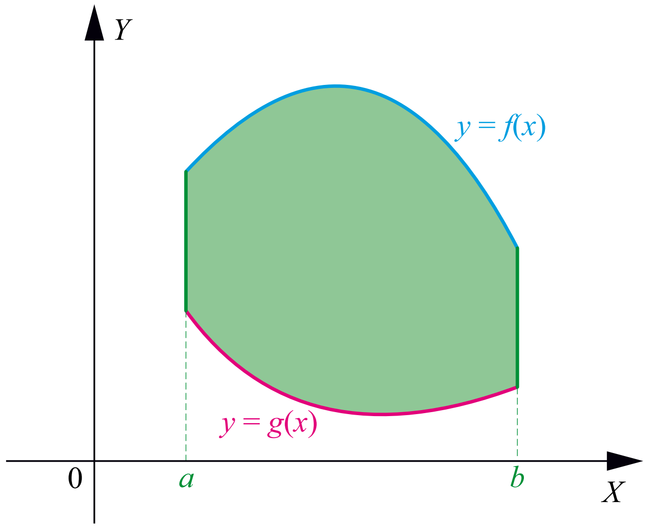
$$m\le\frac{|P(x_0+h)-P(x_0)|}{h}\le M.$$

Natomiast na podstawie wniosku ze str. 81. $\left(\text{przy } A=\frac{P(x_0+h)-P(x_0)}{h}\right)$ otrzymujemy, że istnieje w przedziale domkniętym o końcach x_0 oraz x_0+h taki punkt c, dla którego

$$(2)\qquad f(c)=\frac{P(x_0+h)-P(x_0)}{h}.$$

Zauważmy, że jeżeli $h\to 0$, to $c\to x_0$ (ponieważ przedział o końcach x_0 oraz x_0+h staje się coraz krótszy, a więc c leży coraz bliżej x_0). Stąd, na mocy ciągłości funkcji f, wynika, że $f(c)\to f(x_0)$. Otrzymujemy zatem $\lim_{h\to 0} f(c)=f(x_0)$.

Natomiast jeżeli $h\to 0$, to iloraz różnicowy $\frac{P(x_0+h)-P(x_0)}{h}$ dąży do $P'(x_0)$.



Zauważmy (spróbuj to uzasadnić), że wtedy

$$P = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx,$$

a więc

(***) $\quad P = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx.$

PRZYKŁAD 4.

Obliczmy pole P obszaru ograniczonego wykresem funkcji

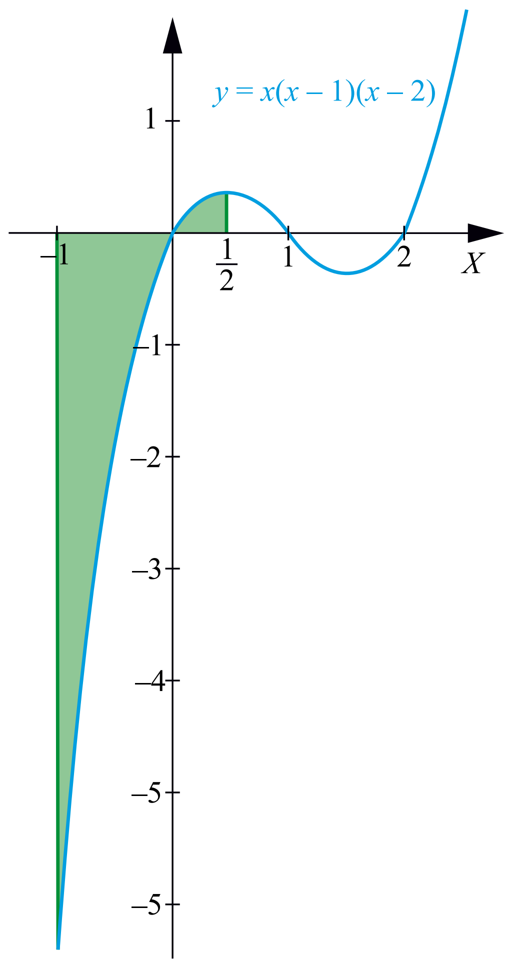
$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x,$

osią OX i prostymi $x = -1$ oraz $x = \frac{1}{2}$.

Uwzględniając, że

$f(x) = x(x-1)(x-2)$

możemy naszkicować wykres tej funkcji:




Tomasz Grębski
Podstawianie zmiennej pomocniczej w równaniach i nie tylko
Zadania z rozwiązaniami
Matematyka

Spis treści

Wstęp

W rozwiązywaniu równań, nierówności i układów równań potrzeba znajomości różnych metod, m.in. podstawienia zmiennej pomocniczej. Jest to zwykle wielkie ułatwienie w rozwiązaniu zadania, czasem wręcz jedyna skuteczna metoda. Jednak użycie nowej zmiennej często wymaga też wprowadzenia odpowiednich założeń lub dodatkowych warunków, w szczególności w zadaniach z parametrem i wartością bezwzględną. Proponuję bliżej się przyjrzeć tej metodzie i zobaczyć, w jak wielu różnych sytuacjach bywa skuteczna, a także jak ją poprawnie stosować.

W każdym rozdziale umieszczone są zadania o różnym stopniu trudności. Poszczególne szczeble zostały tak oznaczone:

$\boxed{\text{I}}$ pierwszy stopień wtajemniczenia,

$\boxed{\text{II}}$ drugi stopień wtajemniczenia,

$\boxed{\text{III}}$ trzeci (najtrudniejszy) stopień wtajemniczenia.

Zbiór zawiera 105 zadań z pełnymi rozwiązaniami oraz 98 zadań do samodzielnego rozwiązania; te ostatnie umieszczone są na końcu poszczególnych rozdziałów. Aby móc się zmierzyć z zebranymi tu zadaniami, trzeba – naturalnie – mieć pewną elementarną wiedzę na temat równań, nierówności i układów równań.

Książka przyda się uczniom przygotowującym się do egzaminu maturalnego lub do startu w konkursach matematycznych.

Od wielu lat prowadzę dodatkowe zajęcia z matematyki i tego typu zadania często rozwiązuję z uczniami. Niniejszy zbiór napisałem na podstawie wieloletniego doświadczenia, jestem przekonany, że może się przydać nauczycielom w pracy na lekcjach czy kółkach.

Warto zauważyć, że metoda podstawiania jest jedną z ważniejszych metod przy obliczaniu całek i rozwiązywaniu równań różniczkowych. Opanowanie tej metody ułatwi więc także naukę na studiach wyższych.

Życzę udanej pracy z zadaniami
Tomasz Grębski

1 Podstawienie zmiennej pomocniczej w równaniach

Zajmiemy się podstawieniem zmiennej pomocniczej w równaniach różnego typu. Przedstawione przykłady pokażą, jak stosować podstawienie oraz jakie założenia pociąga za sobą wprowadzenie do równania nowej zmiennej. Ten rozdział jest w książce najbardziej rozbudowany, ponieważ to tutaj pojawia się większość rodzajów podstawień, w innych rozdziałach już tylko je wykorzystujemy, czasem modyfikując.

1.1. Równania wielomianowe

I Zadanie 1.1.

Rozwiąż równanie: $x^4 - 18x^2 + 32 = 0$.

Rozwiązanie:

$x^4 - 18x^2 + 32 = 0$

$(x^2)^2 - 18x^2 + 32 = 0$	Wyodrębniamy element x^2.
$x^2 = t$, gdzie $t \geq 0$	Podstawiamy zmienną pomocniczą, dodając odpowiednie założenie.

$t^2 - 18t + 32 = 0$

$\Delta = 196$, $\sqrt{\Delta} = 14$

$(t = 2 \vee t = 16) \wedge t \geq 0 \Rightarrow t = 2 \vee t = 16$

A zatem

$(t = 2 \vee t = 16) \wedge x^2 = t$

$x^2 = 2 \vee x^2 = 16$	Wracamy do pierwotnej zmiennej.

$x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2} \vee x = 4 \vee x = -4$

Odpowiedź: $x \in \{-4, -\sqrt{2}, \sqrt{2}, 4\}$.

I Zadanie 1.2.

Rozwiąż równanie: $x^4 + 14x^2 - 32 = 0$.

Rozwiązanie typowe:

$x^4 + 14x^2 - 32 = 0$

$(x^2)^2 + 14x^2 - 32 = 0$	Wyodrębniamy element x^2.
$x^2 = t$, gdzie $t \geq 0$	Podstawiamy nową zmienną, dodając odpowiednie założenie.

$t^2 + 14t - 32 = 0$

$\Delta = 324$, $\sqrt{\Delta} = 18$

$(t = -16 \vee t = 2) \wedge t \geq 0 \Rightarrow t = 2$

A więc
$t = 2 \wedge x^2 = t$

$x^2 = 2$	Wracamy do zmiennej x.

$x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2}$

Odpowiedź: $x \in \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$.

Rozwiązanie alternatywne: Często się zdarza, że podczas podstawiania nowej zmiennej zapominamy o założeniach. Jednak w wielu przypadkach rozwiązanie można jeszcze „uratować". Przeanalizujmy ponownie poprzednie zadanie.

$x^4 + 14x^2 - 32 = 0$	
$(x^2)^2 + 14x^2 - 32 = 0$	Wyodrębniamy element x^2.
$x^2 = t$	Podstawiamy nową zmienną, zapominając o założeniu.

$t^2 + 14t - 32 = 0$
$\Delta = 324, \sqrt{\Delta} = 18$
$t = -16 \vee t = 2$
A zatem
$(t = -16 \vee t = 2) \wedge x^2 = t$

$x^2 = -16 \vee x^2 = 2$	Wracamy do pierwotnej zmiennej.

Tu właśnie możemy „uratować" nasze rozwiązanie. Wystarczy zauważyć, że pierwsze z tych równań nie ma rozwiązań, ponieważ kwadrat dowolnej liczby nie może być ujemny. A więc

$x \in \varnothing \vee x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2}$

Odpowiedź: $x \in \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$.

I Zadanie 1.3.

Rozwiąż równanie: $x^4 + 5x^2 + 6 = 0$.

Rozwiązanie:

$x^4 + 5x^2 + 6 = 0$	
$(x^2)^2 + 5x^2 + 6 = 0$	Wyodrębniamy element x^2.
$x^2 = t$, gdzie $t \geq 0$	Podstawiamy nową zmienną, dodając odpowiednie założenie.

$t^2 + 5t + 6 = 0$
$\Delta = 1, \sqrt{\Delta} = 1$

$(t = -3 \vee t = -2) \wedge t \geq 0 \Rightarrow t \in \varnothing \Rightarrow x \in \varnothing$	Wracamy do zmiennej x.

Odpowiedź: Równanie nie ma rozwiązań.

I Zadanie 1.4.

Rozwiąż równanie: $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$.

Rozwiązanie:

$x^6 - 7x^3 - 8 = 0$	
$(x^3)^2 - 7x - 8 = 0$	Wyodrębniamy element x^3.
$x^3 = t$, gdzie $t \in \mathbf{R}$	Podstawiamy nową zmienną, która tym razem jest dowolną liczbą rzeczywistą (można opuścić to założenie).
$t^2 - 7t - 8 = 0$	
$(t + 1)(t - 8) = 0$	
$(t = -1 \vee t = 8) \wedge t \in \mathbf{R}$	
A zatem	
$(t = -1 \vee t = 8) \wedge x^3 = t$	
$x^3 = -1 \vee x^3 = 8$	Wracamy do zmiennej x.
$x = -1 \vee x = 2$	

Odpowiedź: $x \in \{-1, 2\}$.

I Zadanie 1.5.

Rozwiąż równanie: $x^8 - 15x^4 - 16 = 0$.

Rozwiązanie:

$x^8 - 15x^4 - 16 = 0$	
$(x^4)^2 - 15x^4 - 16 = 0$	Wyodrębniamy element x^4.
$x^4 = t$, gdzie $t \geq 0$	Podstawiamy nową zmienną, dodając odpowiednie założenie.
$t^2 - 15t - 16 = 0$	
$(t + 1)(t - 16) = 0$	
$(t = -1 \vee t = 16) \wedge t \geq 0$	
Wobec tego	
$t = 16 \wedge x^4 = t$	
$x^4 = 16$	Wracamy do zmiennej x.
$x = 2 \vee x = -2$	

Odpowiedź: $x \in \{-2, 2\}$.

Wniosek: Jeśli podstawiamy zmienną pomocniczą za potęgę o wykładniku parzystym, to musimy pamiętać, że ta nowa zmienna jest nieujemna. Zapisując symbolicznie, otrzymujemy:
$x^{2n} = t, \ t \geq 0$.
Jeśli podstawiamy nową zmienną za potęgę x o wykładniku nieparzystym, to nowa zmienna może być dowolną liczbą rzeczywistą. Zapisując symbolicznie, otrzymujemy:
$x^{2n+1} = t, \ t \in \mathbf{R}$.

Zadania do samodzielnego rozwiązania

I **1.1.** Rozwiąż równanie: $x^4 + x^2 - 2 = 0$.

I **1.2.** Rozwiąż równanie: $2x^4 - x^2 - 1 = 0$.

I **1.3.** Rozwiąż równanie: $25x^4 - 10x^2 + 1 = 0$.

I **1.4.** Rozwiąż równanie: $x^6 - 17x^3 + 16 = 0$.

I **1.5.** Rozwiąż równanie: $16x^8 - 15x^4 - 1 = 0$.

II **1.6.** Rozwiąż równanie: $x^9 - 3x^6 - 6x^3 + 8 = 0$.

I **1.7.** Rozwiąż równanie: $-3(-x^4 + 3x^2 - 3) = 6 + (3x^2 - x^4 - 1)^2$.

II **1.8.** Rozwiąż równanie: $(x^2 + 3x + 3)(2x^2 + 6x - 1) + 3 = 0$.

II **1.9.** Rozwiąż równanie: $x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 5x + 1 = 0$.

III **1.10.** Rozwiąż równanie: $x^6 - 10x^5 + 47x^4 - 100x^3 + 47x^2 - 10x + 1 = 0$.

II **1.11.** Rozwiąż równanie: $2(x - 3)^2 - 1 = -|x - 3|$.

II **1.12.** Rozwiąż równanie: $(x + 5)^2 = 2 - |x + 5|$.

II **1.13.** Rozwiąż równanie: $|x + 1|^5 = |x + 1|$.

I **1.14.** Rozwiąż równanie: $x + 7\sqrt{x} = 18$.

II **1.15.** Rozwiąż równanie: $x - 2 - 3\sqrt{x + 6} = 0$.

II **1.16.** Rozwiąż równanie: $\sqrt[3]{x^2} - 6 = 5\sqrt[3]{x}$.

II **1.17.** Rozwiąż równanie: $\sqrt[3]{x^2 + 9 + 6x} - 12 = \sqrt[3]{x + 3}$.

III **1.18.** Rozwiąż równanie: $5\sqrt[3]{4 - x^2} - \sqrt[3]{(2 + x)^2} = 4\sqrt[3]{(2 - x)^2}$.

III **1.19.** Rozwiąż równanie: $\sqrt[3]{x + 5} - \sqrt[6]{x^2 - 25} = \sqrt[3]{x - 5}$.

II **1.20.** Rozwiąż równanie: $3\sqrt[4]{\frac{x - 1}{x + 1}} + 3\sqrt[4]{\frac{x + 1}{x - 1}} = 10$.

II **1.21.** Rozwiąż równanie: $\sqrt[5]{\frac{x^2 - 4}{x + 1}} - 3\sqrt[5]{\frac{x + 1}{x^2 - 4}} = -2$.

II **1.22.** Rozwiąż równanie: $5\sqrt[4]{x^2 - 4} = 6 - \sqrt{x^2 - 4}$.

II **1.23.** Rozwiąż równanie: $x^2 + 3x - \frac{3}{2}\sqrt{x^2 + 3x - 4} = 4$.

II **1.24.** Rozwiąż równanie: $x^2 + 3x - 4 = 5\sqrt{x^2 + 3x - 4}$.

Odpowiedzi

1. Podstawienie zmiennej pomocniczej w równaniach

1.1. Podstawienie: $t = x^2$, gdzie $t \geq 0$.
Odpowiedź: $x \in \{-1, 1\}$.

1.2. Podstawienie: $t = x^2$, gdzie $t \geq 0$.
Odpowiedź: $x \in \{-1, 1\}$.

1.3. Podstawienie: $t = x^2$, gdzie $t \geq 0$.
Odpowiedź: $x \in \left\{-\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right\}$.

1.4. Podstawienie: $t = x^3$, gdzie $t \in \boldsymbol{R}$.
Odpowiedź: $x \in \left\{1, 2\sqrt[3]{2}\right\}$.

1.5. Podstawienie: $t = x^4$, gdzie $t \geq 0$.
Odpowiedź: $x \in \{-1, 1\}$.

1.6. Podstawienie: $t = x^3$, gdzie $t \in \boldsymbol{R}$.
Odpowiedź: $x \in \left\{1, -\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}\right\}$.

1.7. Podstawienie: $t = -x^4 + 3x^2 - 1$, gdzie $t \in \boldsymbol{R}$.
Odpowiedź:

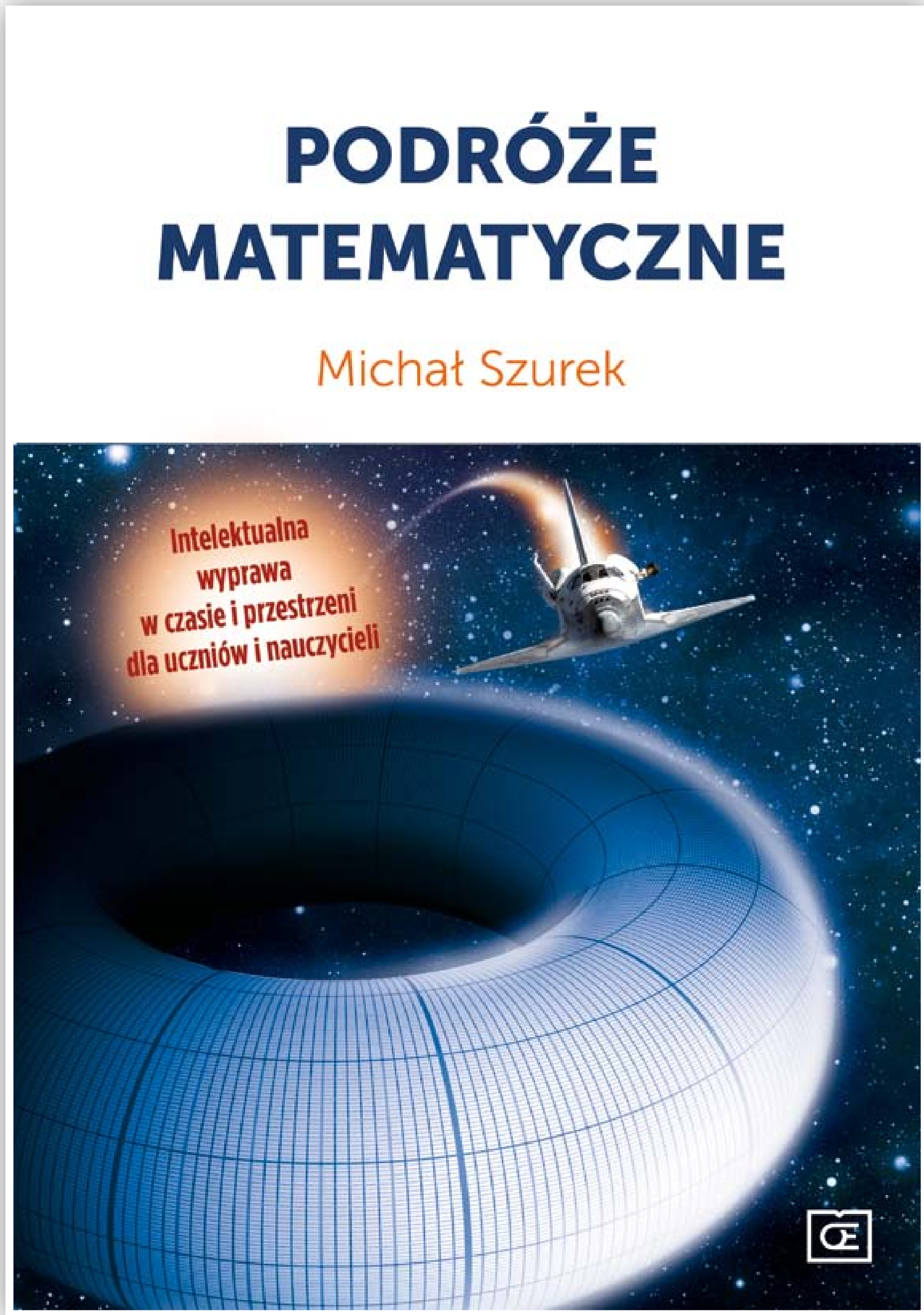
$$x \in \left\{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}, -\sqrt{\frac{3+\sqrt{17}}{2}}, \sqrt{\frac{3+\sqrt{17}}{2}}\right\}.$$

1.8. Podstawienie: $t = x^2 + 3x$, gdzie $t \in \boldsymbol{R}$.
Odpowiedź: $x \in \{-3, 0\}$.

1.9. Podstawienie: $t = x + \frac{1}{x}$, gdzie $t \in \boldsymbol{R}$.
Odpowiedź: $x \in \left\{1, \frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

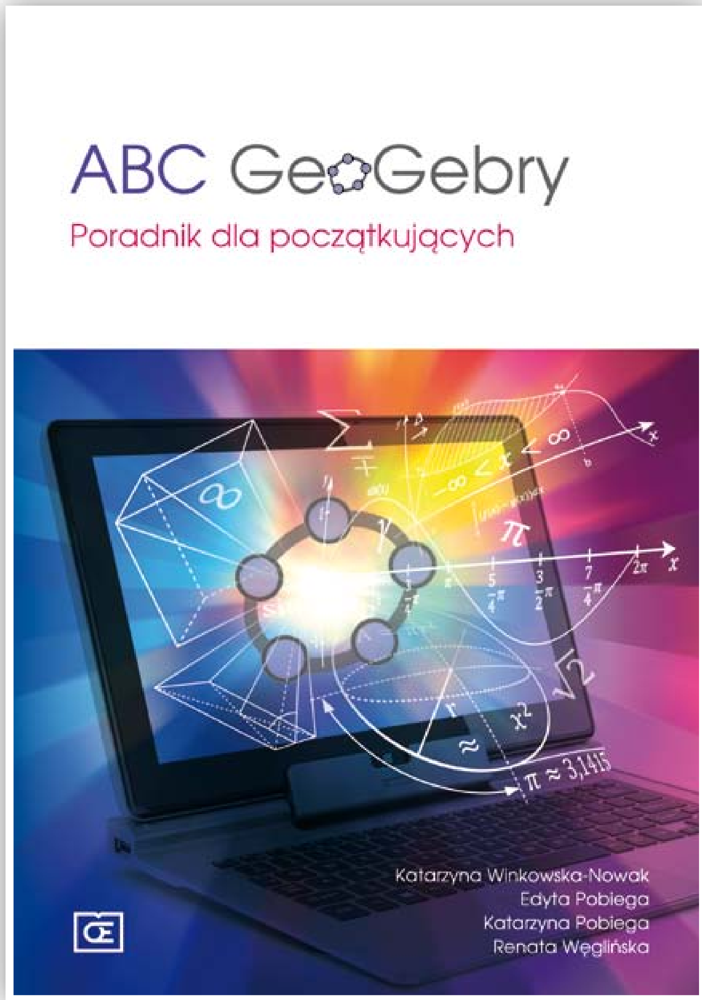
1.10. Podstawienie: $t = x + \frac{1}{x}$, gdzie $t \in \boldsymbol{R}$.
Odpowiedź: $x \in \left\{2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3}\right\}$.

1.11. Podstawienie: $t = |x - 3|$, gdzie $t \geq 0$.
Odpowiedź: $x \in \left\{\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right\}$.



Podróże matematyczne to książka nie tylko dla ucznia i nauczyciela, lecz dla wszystkich, którzy interesują się matematyką i reagują na jej wyzwania – i dla młodszych, i dla starszych.

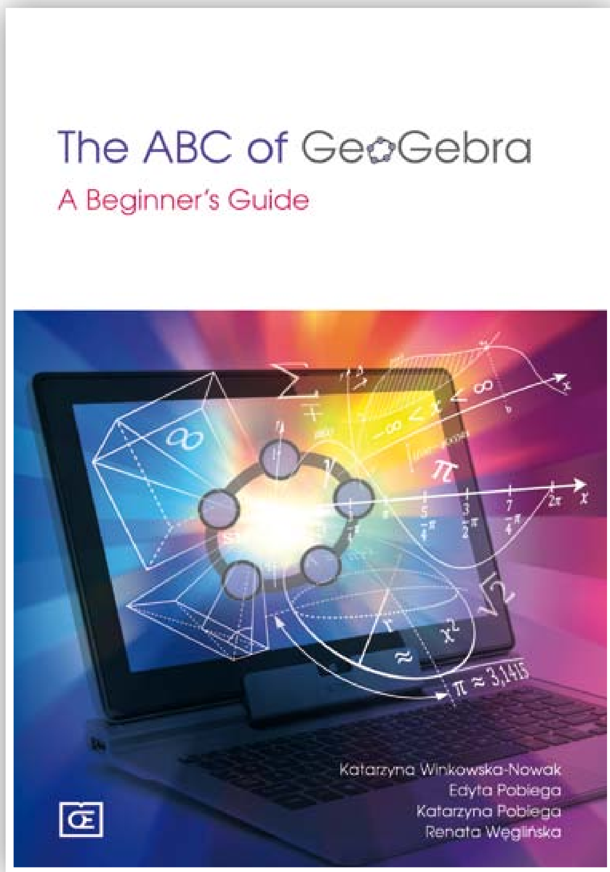
Z nieprzebranego dorobku matematyki Autor wybrał kilkadziesiąt arcydzieł – zadań, twierdzeń, teorii – i w barwny sposób opowiada o nich z wielu punktów widzenia. A czyni to tak, by początkującego czytelnika zainteresować, a czytelnika dojrzałego – nie znudzić. Autor ukazuje matematykę przyjemną i intrygującą. Treść książki oscyluje wokół programu szkolnego, chociaż im wyższy numer rozdziału, tym „odległość" od szkoły większa, a w rozdziale 17 jest wręcz „kosmiczna". Książka i jej rozdziały są napisane zgodnie z zasadą stopniowania trudności. Znajdziemy tu równania, tradycyjne zadania w nowym ujęciu, zadania logiczne, kolorową geometrię i wycieczkę w dziwne przestrzenie. Trudne miejsca nie powinny nikogo odstraszać.



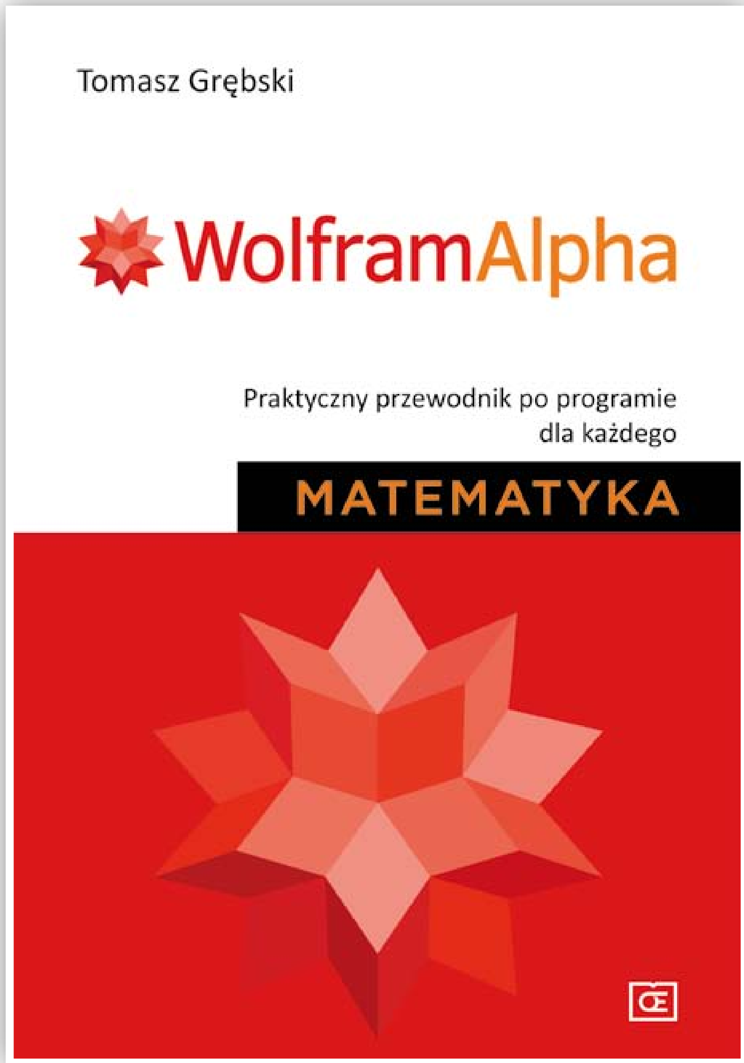
Ten poradnik jest przeznaczony dla początkujących adeptów i zainteresowanych GeoGebrą, jej możliwościami i przydatnością w nauczaniu i uczeniu się matematyki na wszystkich poziomach edukacji.

GeoGebra jest bezpłatnym oprogramowaniem matematycznym, dostępnym on-line i off-line w systemach operacyjnych *Windows, Linux i Mac OSX*, na komputerach i na urządzeniach przenośnych (tablety, smartfony).

Poradnik ten dotyczy stosowania GeoGebry przy użyciu komputerów z systemem operacyjnym *Windows.*



Dostępna również w języku angielskim.



O programie

Program ten swe korzenie ma w słynnym programie *Mathematica*, który doskonale łączy obliczenia numeryczne i symboliczne, interpretację graficzną wyników, język programowania, dokumentację i możliwość publikacji pracy. Dzięki bogactwu funkcji jest świetnym narzędziem pracy matematyków, fizyków, biologów, chemików i innych.

Program jest przeznaczony zarówno dla uczniów, studentów, jak i dla nauczycieli. Z własnego doświadczenia wiem, jak przyjemnie pracuje się z programem wspólnie z uczniami. Nauczyciel bez wątpienia staje się nowoczesny, a uczniów to zachęca do pracy. Krótko mówiąc – przyjemne z pożytecznym.

W tym *Poradniku* zajmujemy się stroną matematyczną programu. A zatem stawiamy sobie pytanie: w czym może pomóc nam Wolfram Alpha (jeśli chodzi o matematykę) oraz w jaki sposób z niego korzystać?

Wolfram Alpha m.in. rozwiązuje równania i nierówności, układy równań i nierówności, oblicza pochodne i całki, rysuje funkcje oraz wypisuje ich najważniejsze własności. To oczywiście przysłowiowa „kropla w morzu" jego możliwości. Opisane w książce funkcje i przykłady pozwolą Czytelnikowi poznać wiele możliwości tego programu.

OFICYNA
EDUKACYJNA

KRZYSZTOF PAZDRO

www.pazdro.com.pl