Rozszerz swoje horyzonty

Tomasz Zamek-Gliszczyński

MATEMATYKA

dla dociekliwych licealistów

Zadania i nie tylko

Część II

STEREOMETRIA

PRAWDOPODOBIEŃSTWO I STATYSTYKA

RACHUNEK RÓŻNICZKOWY I CAŁKOWY

Spis treści

Część I

Część II

Wstęp

Wszystko, co zawiera niniejsza książka, zdarzyło się w szkole. Z niektórymi tematami uczniowie zgłaszali się sami, bo ich interesowały, niektóre tematy ja rozwijałem na lekcjach, nie tyle rozszerzając nasz polski program, co wkładając go w nieco inny kontekst matematyczny. Uczniowie sycili tymi tematami swoją ciekawość, a ja będę długo pamiętał te momenty, kiedy widziałem ich radość poznania i zrozumienia różnych, nowych konstrukcji matematycznych.

Nad niektórymi tematami pracuję z uczniami od wielu lat. W każdej kolejnej grupie uczniów, niezależnie od etykietek, jakie im przyznawano, zainteresowanie jest podstawą dobrej nauki. Oczywiście, każdy temat można zrobić dowolnie trudnym. Staram się przedstawiać kolejne tematy w przystępny sposób, ale ciągle dostrzegam fragmenty, które planuję za rok zrobić lepiej, zręczniej, żeby ich nauka była ciekawsza, łatwiejsza, skuteczniejsza.

Ta książka jest podsumowaniem takich właśnie wysiłków.

Tematy są uporządkowane w kolejności podobnej do kolejności działów podstawy programowej. Każdy rozdział jednak różni się i pod względem stylu, i pod względem stopniowania trudności. W części I znalazło się 7 rozdziałów, a w części II – pozostałe 3 rozdziały.

Trudno nie znać algorytmu Euklidesa i paru jego zastosowań, w geometrii – twierdzenia Menelaosa czy twierdzenia Cevy. Nie można nie znać indukcji matematycznej. Geometria trójwymiarowa nie powinna ograniczać się do graniastosłupów i ostrosłupów oraz kul i walców. Nie można nie znać podstaw rachunku różniczkowego i całkowego, w szczególności rachunku całkowego. To nie jest w porządku, że Polska jest dość wyjątkowym krajem w Europie, w którym uczniowie mają programowo nie znać całek.

W moim nauczaniu jest ukryty pewien program. Chciałbym, żeby nauka matematyki polegała w większym stopniu na nauczaniu właśnie matematyki, a nie żeby polegała tylko na przygotowaniu do egzaminu.

Gdy bardziej znasz matematykę, gdy rozumiesz więcej niż wymagają arkusze egzaminacyjne, lepiej dostosujesz się do wymagań egzaminacyjnych. Będziesz dużo skuteczniejszy. Gdy jesteś w klasie maturalnej, czyż nie patrzysz „z góry” na matematykę ze szkoły podstawowej? Jakie to było łatwe...

Życzę Wam, żebyście na każdy egzamin z matematyki mogli spojrzeć z góry jeszcze przed nim. Wymagajcie od siebie dużo, nawet gdyby inni tego od Was nie wymagali.

Autor

Podziękowania

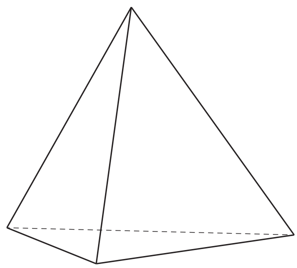
Chciałbym bardzo serdecznie podziękować redaktorowi Jankowi Baranowskiemu za wsparcie i mobilizację.

Chciałbym też podziękować moim uczniom, którzy swoimi zainteresowaniami w dużym stopniu kierowali mnie w stronę tematów tej książki.

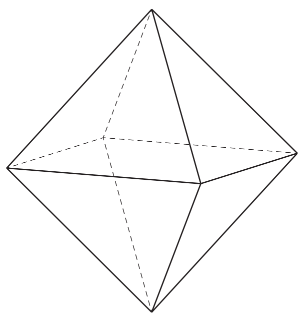
8. STEREOMETRIA

Bryły platońskie (wielościany foremne)

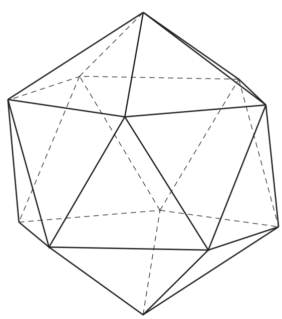
Bryła platońska to wielościan wypukły, którego wszystkie ściany są przystającymi do siebie wielokątami foremnymi, a w każdym wierzchołku spotyka się tyle samo takich ścian.
Z przystających trójkątów równobocznych można zbudować czworościan foremny – w każdym z 4 wierzchołków spotykają się trzy trójkąty



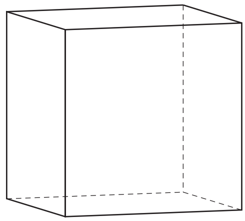
ośmiościan foremny – w każdym z 6 wierzchołków spotykają się cztery trójkąty



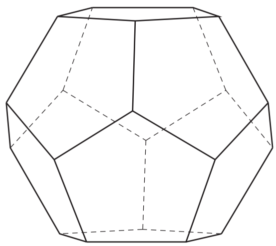
i dwudziestościan foremny – w każdym z 12 wierzchołków spotyka się 5 trójkątów.



Z przystających kwadratów można zbudować tylko sześcian z ośmioma wierzchołkami – w każdym spotykają się po 4 kwadraty.



Z przystających pięciokątów foremnych można zbudować tylko dwunastościan foremny, w którego każdym z 20 wierzchołków spotykają się 3 pięciokąty.

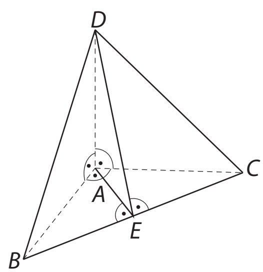


Innych brył platońskich nie ma.

Uogólnienie twierdzenia Pitagorasa

Klasyczne twierdzenie Pitagorasa odnosi się do trójkątów prostokątnych. Jedno z jego uogólnień dotyczy czworościanów, w których trzy ściany są do siebie parami prostopadłe.

Twierdzenie 8.1 (twierdzenie de Gua)
Jeżeli dany jest czworościan, jak na rysunku, to



$(P_{BCD})^2 = (P_{ABC})^2 + (P_{ABD})^2 + (P_{ACD})^2$
(We wzorze jest mowa o polach odpowiednich trójkątów, np. P_{BCD} oznacza pole trójkąta BCD.)

Dowód

Istnieje taki punkt E na odcinku BC, że płaszczyzna prostopadła do BC w punkcie E zawiera odcinek AE. Wtedy $\sphericalangle AED$ i $\sphericalangle AEB$ są kątami prostymi. Następnie

$$(P_{BCD})^2 = \frac{|BC|^2 \cdot |ED|^2}{4} = \frac{|BC|^2\left(|AE|^2 + |AD|^2\right)}{4} = \frac{|BC|^2 \cdot |AE|^2}{4} + \frac{|BC|^2 \cdot |AD|^2}{4} =$$

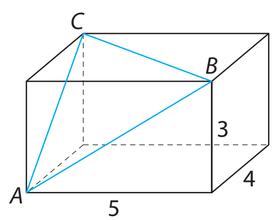
$$= (P_{ABC})^2 + \frac{\left(|AB|^2 + (|AC|)^2\right) \cdot |AD|^2}{4} = (P_{ABC})^2 + \frac{|AB|^2 \cdot |AD|^2}{4} + \frac{|AC|^2 \cdot |AD|^2}{4} =$$

$$= (P_{ABC})^2 + (P_{ABD})^2 + (P_{ACD})^2 \quad \blacksquare$$

Twierdzenie 8.1 można rozumieć ogólniej. Trójkąt ABC jest rzutem prostopadłym trójkąta ABD na płaszczyznę poziomą, trójkąt ABD jest rzutem prostopadłym trójkąta ABD na jedną płaszczyznę pionową, a trójkąt ACD jest rzutem na drugą płaszczyznę pionową. Płaszczyzny pionowe są do siebie wzajemnie prostopadłe. Odrobina wyobraźni wystarczy, żeby dowolny trójkąt w przestrzeni rzutować na trzy płaszczyzny wzajemnie do siebie prostopadłe i obliczać pole tego trójkąta, sumując kwadraty pól jego rzutów, a następnie pierwiastkując. Przydałby się jeszcze jeden wysiłek wyobraźni. Przecież w ten sposób można rzutować dowolną figurę płaską złożoną z trójkątów i, korzystając z twierdzenia de Gua, obliczyć jej pole. Można z wyobraźni zrobić jeszcze większy użytek. Na przykład co z kołem? Co prawda to nie jest suma skończonej liczby trójkątów, ale nieskończonej. To „nowe twierdzenie Pitagorasa" też jest tu skuteczne.

Przykład 8.1

Prostopadłościan o krawędziach 3, 4, 5 został przecięty płaszczyzną przechodzącą przez trzy jego wierzchołki jak na rysunku.



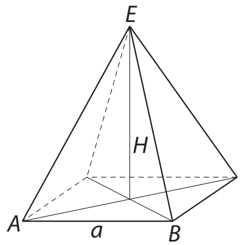
Oblicz pole trójkąta ABC.

Rozwiązanie

Rzut trójkąta ABC na „podłogę" ma pole 10 (połowa prostokąta 4×5), rzut na „plecy" 7,5, a na ścianę boczną 6. Kwadrat pola trójkąta ABC to $10^2 + 7{,}5^2 + 6^2 = 192{,}75$. A więc pole jest równe $\sqrt{192{,}75}$.

Przykład 8.2

Oblicz pole całkowitej powierzchni ostrosłupa prawidłowego kwadratowego o boku podstawy a i wysokości H.



Rozwiązanie

Spróbujmy zastosować twierdzenie de Gua. Obliczmy pole ściany ABE. Jej rzut na płaszczyznę podstawy ma pole $\frac{1}{4}a^2$, zaś pole rzutu na płaszczyznę tylną jest równe $\frac{1}{2}aH$. Rzut na płaszczyznę boczną ma pole zero. Wobec tego pole powierzchni ściany ABE jest równe

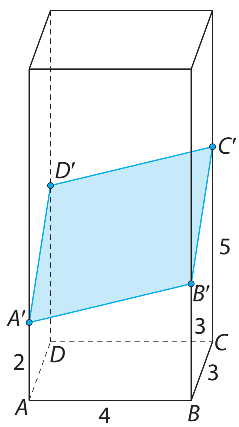
$$\sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2\right)^2 + \left(\frac{1}{2}aH\right)^2} = \frac{a}{4}\sqrt{a^2 + 4H^2}$$

Ale są 4 ściany boczne oraz podstawa, więc pole całkowite to

$$a^2 + a\sqrt{a^2 + 4H^2}$$

Sprawdź obliczenia standardową metodą.

8.1. Wysoki prostopadłościan o podstawie $ABCD$ mającej wymiary 4×3 został przecięty płaszczyzną na wysokości 2 nad wierzchołkiem A i na wysokości 3 nad wierzchołkiem B i 5 nad wierzchołkiem C. Patrz rysunek.



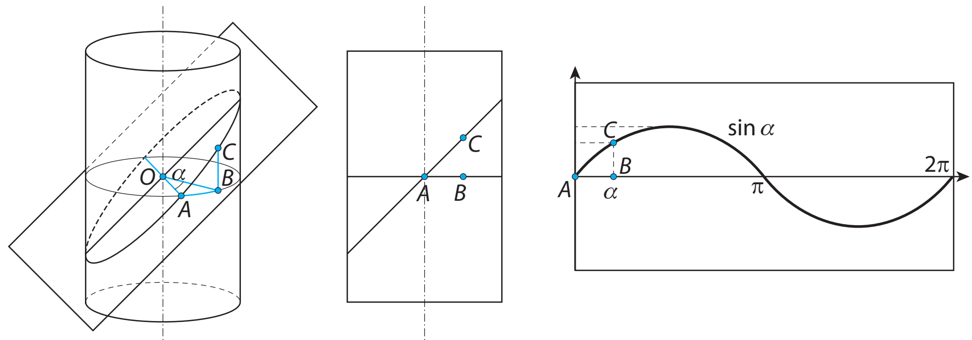
Oblicz pole przekroju.

8.2. Oblicz pole powierzchni całkowitej ostrosłupa prawidłowego trójkątnego z krawędzią podstawy równą a i wysokością H. Porównaj metody.

Pole powierzchni walca

Przykład 8.3

Powierzchnia boczna nieskończonego walca o promieniu 1 została przecięta płaszczyzną pod kątem 45° do osi walca. Patrz rysunek.



a) b) c)

Płaszczyzna ta przecina powierzchnię walca, tworząc elipsę, natomiast z osią walca przecina się w punkcie O. Płaszczyzna prostopadła do osi walca i powierzchnia boczna walca przecinają się, tworząc okrąg. Okrąg i elipsa przecinają się w dwóch punktach. Jednym z nich jest punkt A na rysunku. Punkt B jest na wymienionym okręgu i kąt AOB ma miarę α. Pionowo nad punktem B na elipsie jest punkt C.

W środku jest rzut walca na płaszczyznę przechodzącą przez oś symetrii walca prostopadłą do OA. Na tym rzucie punkty A i O zlewają się w jeden punkt, punkt B jest w odległości $\sin\alpha$ od rzutu A. (Przyjrzyj się poziomemu okręgowi jednostkowemu na lewym rysunku. Tworzy on koło trygonometryczne z osią OX wyznaczoną przez OA.) Płaszczyzna staje się prostą przechodzącą przez punkt O pod kątem 45° do osi walca. Punkt C jest nad punktem B w takiej samej odległości jak na tym rysunku punkt C jest nad puntem B tak samo daleko jak od punktu A, czyli w odległości $\sin\alpha$.

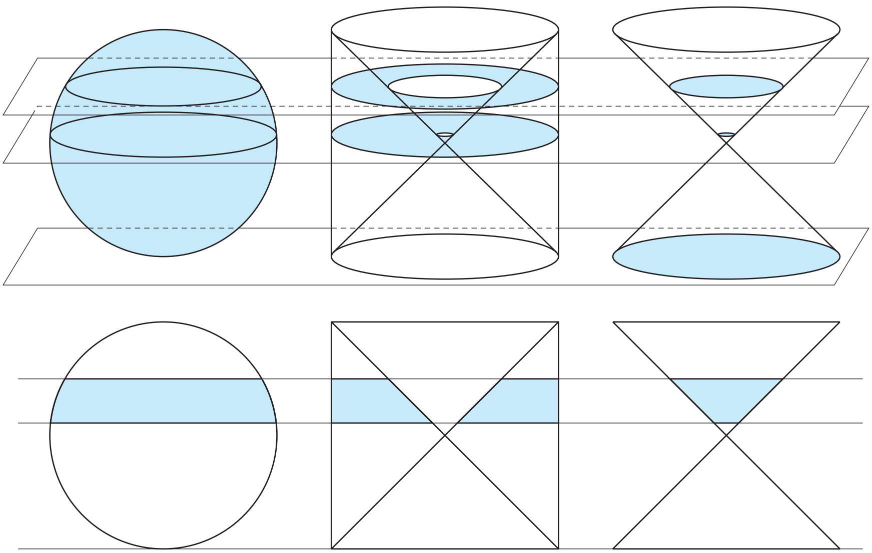
Trzeci rysunek, najbardziej na prawo, jest rozwinięciem bocznej powierzchni walca rozciętej wzdłuż pionowej linii przechodzącej przez punkt A. Poziomy okrąg rozwija się wzdłuż poziomej osi i kończy się w 2π. Punkt A znajduje się w początku powstałego układu współrzędnych, punkt B na osi OX w α (długość łuku od A do B), punkt C ma współrzędne $(\alpha, \sin\alpha)$. Elipsa staje się sinusoidą $y = \sin\alpha$.

8.3. Jaki kształt ma przecięcie powierzchni bocznej walca o promieniu R z płaszczyzną przecinającą go pod kątem φ do osi symetrii walca? Jaki kształt powstaje po rozcięciu powierzchni bocznej wzdłuż tworzącej walca i rozpłaszczeniu tej powierzchni?

Objętość brył obrotowych

Archimedes, znając promień kuli, potrafił obliczyć nie tylko jej objętość, ale także objętość jej części między dwiema płaszczyznami równoległymi. Tak mniej więcej prowadziłby swoje rozumowanie, gdyby chciał być zrozumiany dzisiaj.

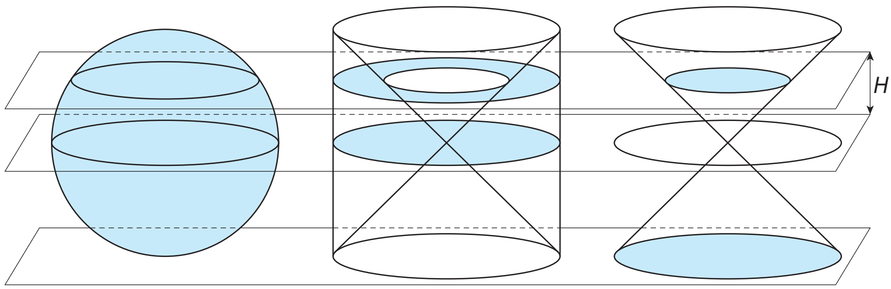
Twierdzenia 8.2 (Archimedesa o objętości kuli i o objętości części kuli pomiędzy płaszczyznami równoległymi)
Ustawmy obok siebie na płaszczyźnie poziomej kulę o promieniu R i walec o promieniu podstawy R i wysokości $2R$. Z tego walca usuńmy dwa stożki o promieniu podstawy R i wysokości R.
Sytuację pokazuje rysunek poniżej.



Na dolnej płaszczyźnie stoi kula, walec z wyrzuconymi stożkami i wyrzucone stożki. Dwie płaszczyzny równoległe do płaszczyzny podstawy przecinają kulę, walec z wyrzuconymi stożkami i wyrzucone stożki. Na dolnym rysunku są rzuty tych brył na płaszczyznę pionową.
Archimedes twierdzi, że objętość części kuli pomiędzy tymi dwiema płaszczyznami jest taka sama jak objętość pomiędzy tymi płaszczyznami części walca z wyrzuconymi stożkami.

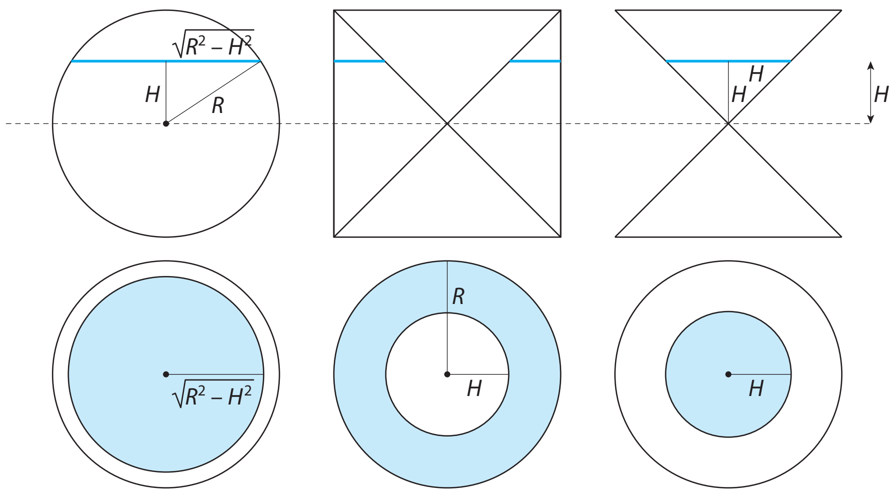
Dowód

Przerysujmy ilustrację do twierdzenia Archimedesa z trochę innymi płaszczyznami.



Jest więc płaszczyzna podstawy, na której stoi kula o promieniu R, walec o promieniu R i wysokości $2R$ i wyrzucone stożki. Druga płaszczyzna równoległa do płaszczyzny podstawy przechodzi przez koło wielkie kuli i wspólny wierzchołek wyrzuconych stożków. Jej przecięciem z kulą jest koło o promieniu R, z walcem z wyrzuconymi stożkami jest koło o promieniu R bez środka, przecięciem z wyrzuconymi stożkami jest jeden punkt – ich wspólny wierzchołek. Przecięciem trzeciej płaszczyzny równoległej do podstawy i będącej w odległości H od poprzedniej są kolejno: koło o promieniu r mniejszym od R, pierścień o promieniu zewnętrznym R i wewnętrznym r, a przecięciem trzeciej bryły jest koło o promieniu r. Z dość oczywistych powodów $r = H$.

Do obliczenia objętości części kuli wygodniej będzie narysować po dwa rzuty kuli i walca bez stożków oraz stożków z boku i z góry.



Teraz trzeba pokazać, że dwa pierwsze przekroje mają równe pola.

Promień koła powstałego z przecięciem płaszczyzny z kulą jest z twierdzenia Pitagorasa równy $\sqrt{R^2 - H^2}$, więc pole tego koła to $\pi(R^2 - H^2)$. Pole pierścienia to pole koła wielkiego odjąć pole przecięcia z wyjętym stożkiem. Stożek ma w odległości H od wierzchołka promień H (to jest stożek o promieniu R i wysokości R). Wobec tego pole pierścienia na wysokości H to $\pi R^2 - \pi H^2 = \pi(R^2 - H^2)$. Obie bryły mają więc to samo pole przekroju z dowolną płaszczyzną równoległą do podstawy. Dalej rozumowanie Archimedesa odwołuje się do intuicji fizycznych. Mamy dwa naczynia – jedno w kształcie kuli i drugie w kształcie walca bez stożków. Gdybyśmy nalewali ciecz w tym samym tempie, czyli tyle samo cieczy w tym samym czasie do obu naczyń, to naczynia byłyby napełnione cieczą do tej samej wysokości. No i to właściwie kończy jego dowód. Skoro naczynia mają na równych wysokościach równe przekroje, to mają też równe objętości. ■

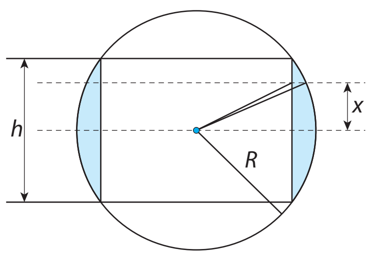
Dziś wolelibyśmy to wypowiadać w inny sposób:

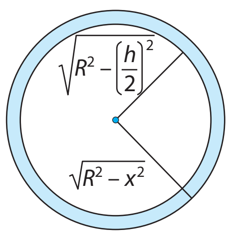
Twierdzenie 8.3 (zasada Cavalieriego)
Jeśli dwie bryły tworzą przekroje o równych polach z każdą płaszczyzną równoległą do pewnej ustalonej płaszczyzny, to mają równe objętości.

Możliwe jest też uogólnienie tej zasady.

Twierdzenie 8.4 (zasada Cavalieriego)
Jeśli dwie bryły tworzą przekroje z każdą płaszczyzną równoległą do pewnej ustalonej płaszczyzny o polach w stałej proporcji, to ich objętości są w tej samej proporcji.

Przykład 8.4 (obrączki Napkina)
Objętość obrączki o wysokości h wyciętej z kuli o promieniu R (patrz rysunek) nie zależy od R.

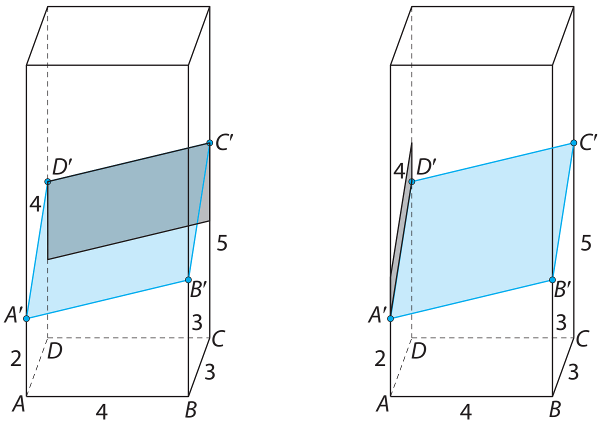




Rozwiązania zadań

8. Stereometria

8.1. Rzut prostopadły $A'B'C'D'$ na płaszczyznę poziomą to prostokąt $ABCD$ o polu 12. Rzut prostopadły na ścianę tylną wyznaczoną przez DCC' to równoległobok, w którym dwa równoległe boki mają długość 2, a ich odległość to 4, a więc pole jest 8.



Rzut prostopadły na płaszczyznę $A'AD$ to równoległobok, którego dwa równoległe boki mają długość 1, a ich odległość to 3, więc jego pole to 3. Z twierdzenia de Gua pole przekroju jest równe $\sqrt{12^2+8^2+3^2}=\sqrt{144+64+9}=\sqrt{217}$.

8.2. Umieśćmy ten ostrosłup przy trzech płaszczyznach prostopadłych do siebie. Patrz rysunek.