4. Funkcja liniowa

Proporcjonalność prosta

Przykład 1.

Załóżmy, że cena jednego kilograma cukru jest równa 2 zł 30 gr. Zaobserwujemy, jak zmienia się koszt zakupów w zależności od ilości zakupionego cukru. Pokazuje to poniższa tabela:

liczba kg cukru	x	1	2	3	4	5	6
koszt zakupu w zł	y	2,30	4,60	6,90	9,20	11,50	13,80

Zależność między kosztem zakupu a liczbą kilogramów cukru wyraża wzór:

$$y = 2{,}3 \cdot x$$

gdzie x jest liczbą naturalną dodatnią. Zauważ, że koszt zakupu (y) i liczba kilogramów zakupionego cukru (x) zmieniają się w tym samym stosunku, np. trzykrotny wzrost liczby kilogramów pociąga za sobą trzykrotny wzrost kosztu zakupu. Stały stosunek kosztu zakupu (y) do liczby kilogramów zakupionego cukru (x) wyraża cenę 1 kg cukru, czyli 2,3 (zł).

Przykład 2.

Rowerzysta postanowił, że pewien odcinek trasy przejedzie ze stałą prędkością 12 km/h. Jak będzie zmieniała się długość przebytej drogi, jeśli rowerzysta na ten eksperyment przeznaczył 4 godziny?

Długość przebytej drogi przy stałej prędkości jazdy zależy od czasu, w jakim ta droga zostanie przebyta, i wyraża się wzorem:

$$s = v \cdot t, \text{ czyli } s = 12 \cdot t$$

gdzie s – długość drogi w km, t – czas jazdy w godzinach, $t \in (0, 4\rangle$.
Zauważ, że tym razem długość przebytej drogi (s) i liczba godzin jazdy (t) zmieniają się w tym samym stosunku. Stały stosunek długości przebytej drogi (s) do liczby godzin jazdy (t) wyraża wartość prędkości jazdy, czyli 12 (km/h).

Jeśli dwie wielkości zmieniają się w tym samym stosunku, to mówimy, że te dwie wielkości są wprost proporcjonalne.

Definicja 1.

Proporcjonalnością prostą nazywamy zależność między dwiema wielkościami zmiennymi x, y, określoną wzorem $y = a \cdot x$, gdzie a jest liczbą różną od zera, zwaną **współczynnikiem proporcjonalności**.

W przykładzie 1. koszt zakupu jest wprost proporcjonalny do liczby kilogramów zakupionego cukru, a współczynnik proporcjonalności 2,30 (zł) oznacza stałą cenę 1 kg cukru.
W przykładzie 2. długość drogi jest wprost proporcjonalna do czasu, w jakim ta droga zostanie przebyta, a współczynnikiem proporcjonalności jest stała prędkość rowerzysty 12 (km/h).

Przykład 3.

a) Rozważmy trójkąty równoboczne. Długość boku trójkąta oznaczmy przez x, zaś jego obwód przez y. Czy obwód trójkąta i długość jego boku są wielkościami wprost proporcjonalnymi? Jeśli tak, to jaki jest współczynnik proporcjonalności?

b) Niech x oznacza długość boku kwadratu, natomiast y – pole kwadratu o boku x. Czy pole kwadratu i długość jego boku są wielkościami wprost proporcjonalnymi?

Ad a) Zależność między obwodem trójkąta równobocznego a długością jego boku wyraża wzór:
$y = 3x$, gdzie $x > 0$
Zauważmy, że stosunek obwodu trójkąta do długości jego boku jest stały i wynosi 3. Liczba 3 – oznaczająca liczbę boków trójkąta – jest wielkością stałą. Jest to współczynnik proporcjonalności.

Ad b) Pole kwadratu w zależności od długości boku kwadratu wyraża się wzorem
$y = x^2$, gdzie $x > 0$
Zauważmy, że pole kwadratu nie jest wprost proporcjonalne do długości boku kwadratu. Na przykład kwadrat o boku 3 ma pole równe 9, zatem $\frac{9}{3} = 3$; zaś kwadrat o boku 8 ma pole równe 64, zatem $\frac{64}{8} = 8$. Stosunek pola kwadratu do długości jego boku nie jest stały.

Proporcjonalność prosta opisana wzorem $y = ax$, gdzie $a \neq 0$, jest funkcją zmiennej x określoną w zbiorze $\boldsymbol{R}$. Jej wykres i własności poznasz w kolejnym temacie.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Sprawdź, czy podane w tabelkach wielkości x i y są wprost proporcjonalne. Jeśli tak, to podaj współczynnik proporcjonalności i napisz wzór opisujący zależność zmiennej y od zmiennej x.

a)

x	–18	–3	6	27	60	900
y	–12	–2	4	18	40	600

b)

x	–4	–3	2	9	100	120
y	–5	3,75	2,5	11,25	125	155

2. O wielkościach x i y wiemy, że są wprost proporcjonalne. Uzupełnij tabelę. Podaj współczynnik proporcjonalności.

x	1,2		24		36	42,6	
y		8	20	$24\frac{2}{3}$			105,5

3. Pan Kowalski za 6 dni pracy otrzymał wynagrodzenie w wysokości 864 zł.
   a) Zakładając, że stawka za dzień pracy nie ulega zmianie, napisz wzór proporcjonalności prostej, określający kwotę wynagrodzenia w zależności od liczby przepracowanych dni.
   b) Ile zarobi pan Kowalski za: 3, 7, 15, 20 oraz 28 dni pracy? Wyniki przedstaw w tabeli.

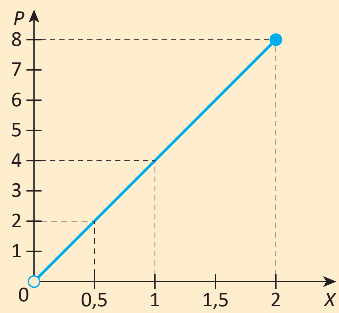
4. Motocyklista przebył drogę 63 km w czasie 1 godziny i 10 minut.
   a) Zakładając, że motocyklista jedzie ze stałą prędkością, zapisz wzór proporcjonalności prostej, określający liczbę przejechanych kilometrów w zależności od czasu jazdy (w godzinach).
   b) Ile kilometrów przejedzie ten motocyklista w czasie: 20 minut, 1 godziny i 40 minut, 2 godzin, 2,5 godziny? Wyniki przedstaw w tabeli.

5. Za 3 m tasiemki ozdobnej Hania zapłaciła 10,50 zł.
   a) Napisz wzór proporcjonalności prostej określający koszt zakupu x metrów zakupionej tasiemki.
   b) Ile trzeba zapłacić za 9,5 m tej tasiemki?

6. Z 19 litrów mleka otrzymuje się 5,8 kg śmietany.
   a) Napisz wzór proporcjonalności prostej, określający ilość (w kg) otrzymanej śmietany w zależności od x litrów wykorzystanego mleka.
   b) Z ilu litrów mleka otrzymamy 29 kg śmietany?

7. Napisz wzór proporcjonalności prostej, opisującej zależność obwodu sześciokąta foremnego od długości jego boku x. Naszkicuj wykres tej funkcji wiedząc, że $x \in \left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 1\frac{1}{2}\right\}$.

8. Rozważamy trójkąty o stałej wysokości h. Poniżej przedstawiony jest wykres funkcji, która opisuje, jak zmienia się pole trójkąta P w zależności od długości podstawy x tego trójkąta, gdzie $x \in (0, 2\rangle$.
   a) Odczytaj z wykresu współczynnik proporcjonalności i napisz wzór funkcji P.
   b) Oblicz wysokość h rozważanych trójkątów.



9. Czy dane wielkości są wprost proporcjonalne? Odpowiedź uzasadnij.
   a) obwód koła i promień tego koła b) pole koła i promień tego koła.

Funkcja liniowa. Wykres i miejsce zerowe funkcji liniowej

Definicja 1.
Funkcją liniową nazywamy funkcję, którą można opisać wzorem $y = ax + b$, gdzie a i b są ustalonymi liczbami rzeczywistymi. Liczbę a nazywamy współczynnikiem kierunkowym, b – wyrazem wolnym. Dziedziną funkcji liniowej jest zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$.

Przykład 1.

Poniższe wzory opisują cztery funkcje liniowe:

1) $y = 5x - 7$, $(a = 5,\ b = -7)$
2) $y = 3 - x$, $(a = -1,\ b = 3)$
3) $y = -\sqrt{3}x$, $\left(a = -\sqrt{3}, b = 0\right)$,
4) $y = 10$, $(a = 0,\ b = 10)$

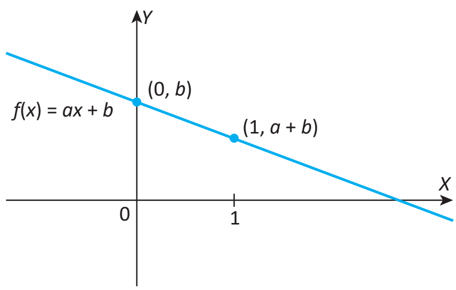
Wykresem każdej funkcji liniowej jest prosta. Zapewne pamiętasz, że prosta równoległa do osi OY nie jest wykresem żadnej funkcji. Zatem prosta będąca wykresem funkcji liniowej nie jest równoległa do osi OY.

Wiesz, że przez dwa dowolne różne punkty płaszczyzny można poprowadzić tylko jedną prostą.

Aby naszkicować wykres funkcji liniowej, wystarczy wyznaczyć dwa punkty należące do wykresu funkcji i poprowadzić przez nie prostą.

Obliczmy wartości funkcji dla argumentów 0 i 1:

$$f(0) = a \cdot 0 + b = b$$
$$f(1) = a \cdot 1 + b = a + b$$



Prawdziwe jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1.
Wykresem funkcji liniowej $y = ax + b$ jest prosta przechodząca przez punkty $(0, b)$ oraz $(1, a + b)$.

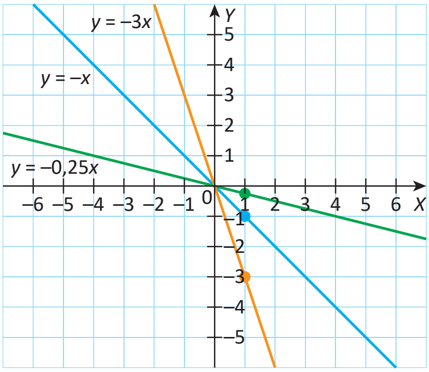
Korzystając z powyższego twierdzenia, naszkicujemy wykresy kilku funkcji liniowych.

Przykład 2.

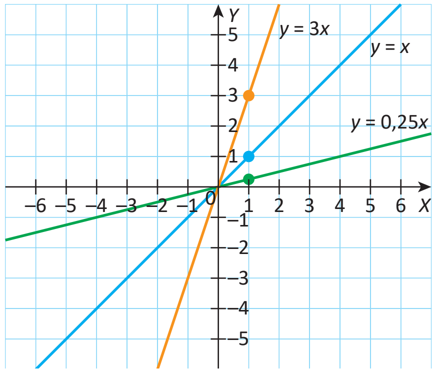
Naszkicujemy wykresy funkcji:

1) $y = -3x$ $\quad y = -x$ $\quad y = -0{,}25x$
2) $y = 3x$ $\quad y = x$ $\quad y = 0{,}25x$

1)



2)



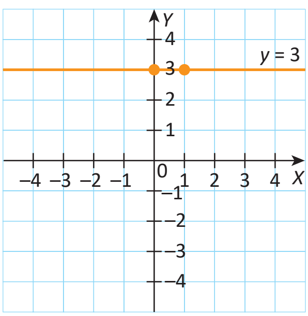
Wykresem funkcji $y = ax$, $a \neq 0$, jest prosta przechodząca przez punkty $(0, 0)$ i $(1, a)$. Miejscem zerowym funkcji $y = ax$, $a \neq 0$, jest liczba 0. Funkcja $y = ax$, $a \neq 0$, jest przykładem proporcjonalności prostej.

Przykład 3.

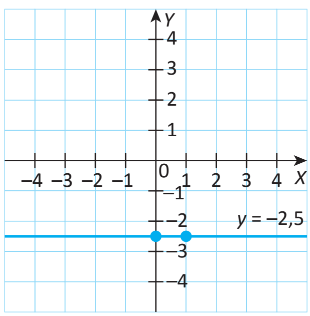
Naszkicujemy wykresy funkcji:

1) $y = 3$ $\quad$ 2) $y = -2{,}5$ $\quad$ 3) $y = 0$

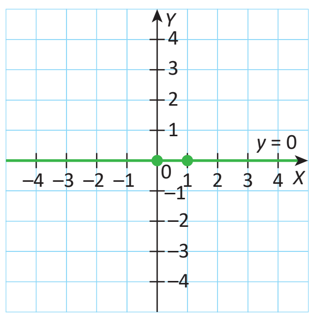
1)



2)



3)



Wykresem funkcji $y = b$ jest prosta przechodząca przez punkty $(0, b)$ i $(1, b)$, czyli prosta równoległa do osi OX. Jeśli $b \neq 0$, to funkcja $y = b$ nie ma miejsc zerowych. Natomiast miejscem zerowym funkcji $y = 0$ jest każda liczba rzeczywista.

Omówimy teraz szkicowanie wykresu funkcji liniowej, jeżeli obydwa współczynniki występujące we wzorze tej funkcji są różne od 0.

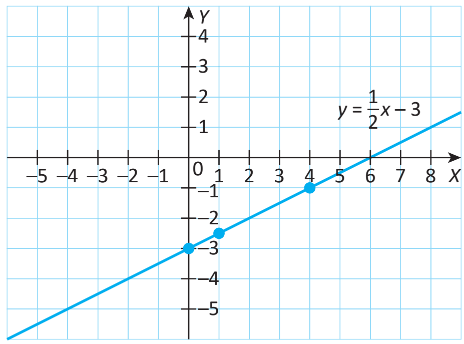
Przykład 4.

Sporządzimy wykres funkcji liniowej $y = \frac{1}{2}x - 3$.

Do wykresu funkcji należą punkty o współrzędnych $(0, -3)$ oraz $(1; -2{,}5)$. Warto jest wyznaczyć dodatkowo trzeci punkt (bardziej odległy od pozostałych) – żeby wykluczyć ewentualne błędy.

x	0	1	4
y	–3	–2,5	–1

Wykres funkcji $y = \frac{1}{2}x - 3$, gdzie $x \in \mathbf{R}$



Zauważ, że wykres funkcji f przecina oś OX w punkcie o współrzędnych $(6, 0)$.

Jeśli $a \neq 0$, to wykres funkcji liniowej $f(x) = ax + b$ nie jest równoległy do osi OX (uzasadnij to, wykorzystując twierdzenie 1.). Wówczas prosta będąca wykresem tej funkcji przecina oś OX tylko w jednym punkcie, którego pierwsza współrzędna jest miejscem zerowym danej funkcji.
Z definicji miejsca zerowego otrzymujemy:

$f(x) = 0$, czyli

$ax + b = 0$

$ax = -b \quad /: a \quad$ (bo $a \neq 0$)

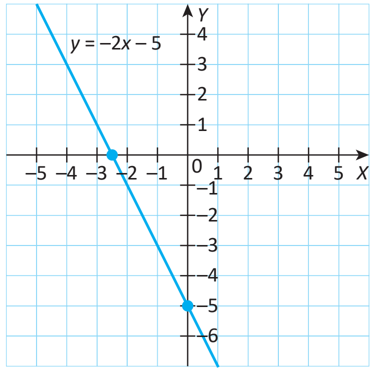
$x = \frac{-b}{a}$

Miejscem zerowym funkcji liniowej $f(x) = ax + b$, gdzie $a \neq 0$, jest liczba $\frac{-b}{a}$.

Wniosek: Jeśli $a \neq 0$, to wykres funkcji liniowej $f(x) = ax + b$ przecina oś OX w punkcie $\left(\frac{-b}{a}, 0\right)$.

Przykład 3.

Naszkicujemy wykres funkcji liniowej $f(x) = -2x - 5$, wykorzystując punkty przecięcia jej wykresu z osiami układu współrzędnych.



Wykresem funkcji f jest prosta przecinająca oś OY w punkcie o współrzędnych $(0, -5)$, zaś oś OX – w punkcie o współrzędnych

$\left(\frac{5}{-2}, 0\right)$, czyli $(-2{,}5; 0)$.

Prawdziwe jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 2.

1) Funkcja liniowa $y = ax + b$ ma jedno miejsce zerowe tylko wtedy, gdy $a \neq 0$ i jest ono równe $\frac{-b}{a}$.
2) Funkcja liniowa $y = ax + b$ nie ma miejsc zerowych tylko wtedy, gdy $a = 0$ i $b \neq 0$.
3) Każda liczba rzeczywista jest miejscem zerowym funkcji liniowej $y = ax + b$ tylko wtedy, gdy $a = b = 0$.

Przykład 4.

Funkcja liniowa $f(x) = 4x + b$ ma takie samo miejsce zerowe, jak funkcja liniowa $g(x) = 0{,}5x + 1$. Obliczymy b.

Jedynym miejscem zerowym funkcji g i f jest liczba -2. Zatem

$0 = 4 \cdot (-2) + b$, skąd $b = 8$.

Przykład 5.

Dana jest funkcja liniowa opisana wzorem $f(x) = (m^2 - 4)x + 2 - m$. Sprawdzimy, ile miejsc zerowych ma funkcja f, jeśli: a) $m = 0$ b) $m = 2$ c) $m = -2$.

Ad a) Jeśli $m = 0$, to wzór funkcji f jest następujący: $f(x) = -4x + 2$. Ta funkcja liniowa ma jedno miejsce zerowe, równe 0,5.

Ad b) Jeśli $m = 2$, to otrzymujemy wzór $f(x) = (2^2 - 4)x + 2 - 2$, czyli $f(x) = 0$. Każda liczba rzeczywista jest miejscem zerowym tej funkcji liniowej.

Ad c) Jeśli $m = -2$, to $f(x) = 0 \cdot x + 4$, czyli $f(x) = 4$. Funkcja f nie ma miejsc zerowych.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Wśród poniższych funkcji określonych wzorami znajdują się funkcje liniowe. Wskaż je.

   a) $f(x) = -2x$ b) $f(x) = \frac{5}{x} + 7$ c) $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ d) $f(x) = 5 - \frac{x}{4}$

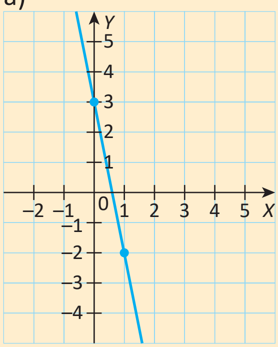
2. Dla każdej z poniższych funkcji liniowych podaj współczynnik kierunkowy a oraz wyraz wolny b.

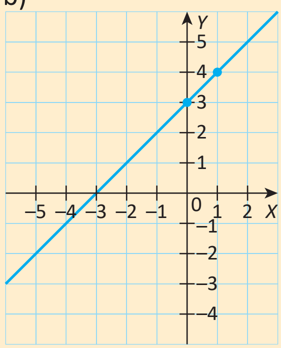
   a) $y = 0{,}6x$ b) $y = 8 - 9x$ c) $y = \frac{5-3x}{4}$ d) $y = -12$

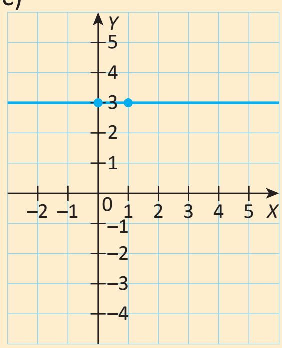
3. Do wykresu proporcjonalności prostej należy punkt A. Wyznacz wzór tej funkcji i naszkicuj jej wykres w prostokątnym układzie współrzędnych.

   a) $A(1, 4)$ b) $A(-4, 2)$ c) $A(6, -4)$ d) $A(4, 7)$

4. Na rysunku poniżej przedstawiony jest wykres funkcji liniowej $y = ax + b$. Wiedząc, że do wykresu funkcji należą punkty $(0, b)$ oraz $(1, a+b)$, napisz wzór tej funkcji.

   a)
   

   b)
   

   c)
   

5. Napisz wzór funkcji liniowej wiedząc, że do jej wykresu należą punkty:

   a) $A(0, 5)$ i $B(1, -4)$ b) $A(1, 7)$ i $B(0, -3)$
   c) $A(16, -2)$ i $B(0, 30)$ d) $A(0, -18)$ i $B(-6, -22)$.

6. Dany jest wzór funkcji liniowej. Oblicz współrzędne punktów, jeżeli istnieją, w których wykres funkcji przecina osie układu współrzędnych. Następnie naszkicuj wykres tej funkcji i omów jej własności, jeśli:

   a) $y = 2x + 3$ b) $y = -x + 4$ c) $y = -3$ d) $y = \frac{1}{5}x$

   e) $y = -6 + 2x$ f) $y = \frac{2x-6}{4}$ g) $y = -1\frac{2}{3} + \frac{2x}{3}$ h) $y = \frac{-(x+8)}{4}$

7. Wyznacz miejsce zerowe funkcji liniowej f, jeśli:
a) $f(x) = 12x + 288$ b) $f(x) = -0{,}01x + 2$ c) $f(x) = \pi x - 2\pi^2$
d) $f(x) = \frac{-2}{\sqrt{8}}x + 5\sqrt{2}$ e) $f(x) = \sqrt{3}x - 2\sqrt{6}$ f) $f(x) = \left(\sqrt{6} - \sqrt{5}\right)x + \sqrt{6} + \sqrt{5}$.

8. Wyznacz brakujący współczynnik we wzorze funkcji liniowej wiedząc, że liczba podana obok wzoru funkcji jest miejscem zerowym tej funkcji.
a) $f(x) = 10x + b;\quad \frac{1}{2}$ b) $f(x) = -5x + b;\quad 4$
c) $f(x) = ax - \pi;\quad -2\pi$ d) $f(x) = ax + \sqrt{6};\quad \sqrt{2}$

9. Naszkicuj wykres funkcji f. Następnie odczytaj z wykresu miejsca zerowe funkcji f, jeśli:
a) $f(x) = \begin{cases} -x - 1, \text{ jeśli } x \in \left(-\infty, -1\right\rangle \\ 0, \text{ jeśli } x \in (-1, +\infty) \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} x + 4, \text{ jeśli } x \in (-\infty, -2) \\ -1{,}5x, \text{ jeśli } x \in \left\langle -2, +\infty\right) \end{cases}$
c) $f(x) = \begin{cases} 2x + 6, \text{ jeśli } x \in (-\infty, 0) \\ 6 - x, \text{ jeśli } x \in \left\langle 0, +\infty\right) \end{cases}$ d) $f(x) = \begin{cases} \frac{x + 4}{2}, \text{ jeśli } x \in \left(-\infty, 2\right\rangle \\ 3, \text{ jeśli } x \in (2, +\infty) \end{cases}$

10. Dana jest funkcja liniowa $g(x) = -mx + m - 4$. Wyznacz współrzędne punktu przecięcia wykresu funkcji g z osią OY, jeśli:
a) $m = 1$ b) $m = 4$ c) $m = 11$ d) $m = 64$.

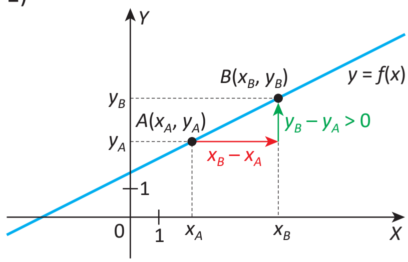
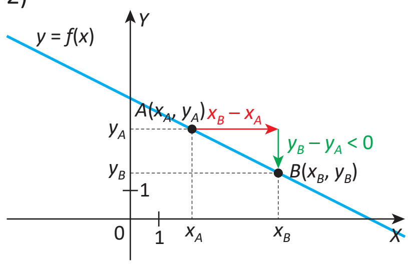
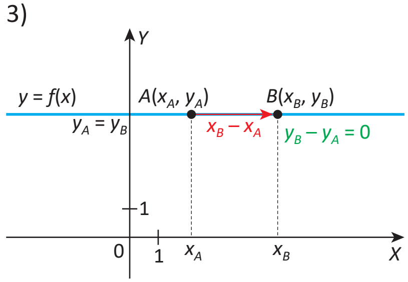
11. Dana jest funkcja liniowa $h(x) = (2m + 3)x - 5$. Wyznacz współrzędne punktu przecięcia wykresu funkcji h z osią OX, jeśli:
a) $m = 0$ b) $m = 1$ c) $m = -1$ d) $m = 3{,}5$.

12. Funkcję liniową f opisuje wzór: $f(x) = 2x + 4m - 1$. Wyznacz liczbę m, dla której:
a) funkcja f jest proporcjonalnością prostą;
b) wykres funkcji f przecina oś OY w punkcie $(0, 7)$;
c) do wykresu tej funkcji należy punkt $(-3, 5)$;
d) miejscem zerowym funkcji f jest liczba 1.
Dla wyznaczonej wartości m podaj wzór funkcji f i sprawdź poprawność obliczeń.

13. Funkcje liniowe $f(x) = \frac{3x - 4}{5}$ oraz $g(x) = ax + 2a - 3\frac{1}{3}$ mają wspólne miejsce zerowe. Oblicz a. Następnie podaj współrzędne punktu przecięcia wykresu funkcji g z osią OY.

Znaczenie współczynnika kierunkowego we wzorze funkcji liniowej

Na poniższych rysunkach przedstawione są wykresy trzech różnych funkcji liniowych: funkcji rosnącej, funkcji malejącej, funkcji stałej), do których należą takie punkty $A(x_A, y_A)$ i $B(x_B, y_B)$, że $x_B > x_A$.

<table>
<tr>
<td>1)

</td>
<td>Funkcja f jest rosnąca.
Przyrost argumentu funkcji f o dodatnią liczbę $x_B - x_A$ powoduje dodatni przyrost wartości funkcji o $y_B - y_A$.</td>
</tr>
<tr>
<td>2)

</td>
<td>Funkcja f jest malejąca.
Przyrost argumentu funkcji o dodatnią liczbę $x_B - x_A$ powoduje ujemny „przyrost” wartości funkcji o $y_B - y_A$.</td>
</tr>
<tr>
<td>3)

</td>
<td>Funkcja f jest stała.
Przyrostowi argumentu funkcji o dodatnią liczbę $x_B - x_A$ odpowiada „przyrost” wartości funkcji równy 0.</td>
</tr>
</table>

Obliczmy $y_B - y_A$ jako różnicę wartości funkcji *f* dla argumentów x_B oraz x_A. Mamy:

$$y_B - y_A = f(x_B) - f(x_A) = (ax_B + b) - (ax_A + b) = ax_B - ax_A = a(x_B - x_A).$$

Zatem prawdziwa jest równość

$$y_B - y_A = a \cdot (x_B - x_A), \text{ gdzie } x_B - x_A \neq 0.$$

Po podzieleniu stron równości przez wyrażenie $x_B - x_A$ otrzymujemy:

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Zauważ, że $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-(y_A - y_B)}{-(x_A - x_B)} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$. Zatem nie jest istotne uporządkowanie punktów A, B na prostej będącej wykresem funkcji liniowej $y = ax + b$.

Z naszych rozważań wynika następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1. *O współczynniku kierunkowym*
Jeśli dwa różne punkty $A(x_A, y_A)$ i $B(x_B, y_B)$ należą do wykresu funkcji liniowej $y = ax + b$, to $a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

Przykład 1.

Dane są dwa punkty $A(2, -3)$, $B(4, 5)$ należące do wykresu funkcji liniowej. Wyznaczymy wzór tej funkcji.

Obliczamy współczynnik kierunkowy (korzystamy z twierdzenia 1.):

$$a = \frac{5-(-3)}{4-2} = 4$$

Wzór funkcji przyjmuje postać $y = 4x + b$.
Po podstawieniu współrzędnych punktu A (lub B) do wzoru w miejsce x i y mamy:

$-3 = 4 \cdot 2 + b$, skąd

$b = -11$

Wzór funkcji jest następujący: $y = 4x - 11$.

Na podstawie wykresów ze str. 210 stwierdzamy, że iloraz $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ jest dodatni wtedy, gdy funkcja liniowa jest rosnąca, ujemny wtedy, gdy funkcja liniowa jest malejąca i równy 0 wtedy, gdy funkcja liniowa jest stała.

Twierdzenie 2. *O monotoniczności funkcji liniowej*
Funkcja liniowa $y = ax + b$ jest:
1) rosnąca tylko wtedy, gdy $a > 0$
2) malejąca tylko wtedy, gdy $a < 0$
3) stała tylko wtedy, gdy $a = 0$.

Przykład 2.

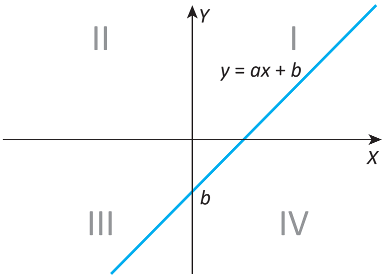
Dane są funkcje liniowe: $f(x) = \left(1-\sqrt{2}\right)x + 1$, $g(x) = -8 + \pi x$, $h(x) = -\sqrt{3}$.

Z twierdzenia 2. wynika, że funkcja f jest malejąca $\left(1-\sqrt{2} < 0\right)$, funkcja g jest rosnąca $(\pi > 0)$, zaś funkcja h jest stała.

Przykład 3.

Prosta będąca wykresem funkcji liniowej $y = ax + b$ przechodzi przez I, III i IV ćwiartkę układu współrzędnych. Ustalimy znaki współczynników a i b.

Wykonujemy szkic wykresu funkcji w układzie współrzędnych.



Zauważamy, że wykres przecina oś OY poniżej punktu $(0, 0)$, więc $b < 0$. Miejsce zerowe znajduje się na dodatniej półosi OX. Funkcja jest rosnąca, $a > 0$.

Z twierdzenia 1. wynika również następujący wniosek.

Dla każdej funkcji liniowej $f(x) = ax + b$, wzrost argumentu o 1 powoduje „przyrost" wartości funkcji równy współczynnikowi kierunkowemu a.

Jeśli bowiem $A(x_A, y_A)$, zaś $B(x_A + 1, y_B)$, to

$$y_B - y_A = f(x_A + 1) - f(x_A) = a(x_A + 1) + b - (ax_A + b) = a$$

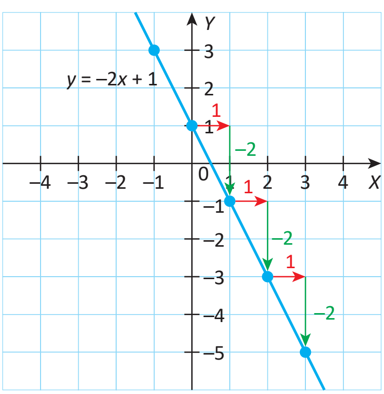
Przykład 4.

Naszkicujemy wykresy funkcji: a) $y = -2x + 1$ b) $y = \frac{3}{4}x + 2$

korzystając z interpretacji współczynników we wzorze funkcji liniowej.

Ad a) $y = -2x + 1$

Zaczynamy szkicowanie wykresu danej funkcji od zaznaczenia w układzie współrzędnych punktu przecięcia wykresu z osią OY, mającego współrzędne $(0, 1)$.
Następnie zauważamy, że każdy wzrost argumentu o 1 spowoduje „przyrost" wartości funkcji o -2 (bo $a = -2$).

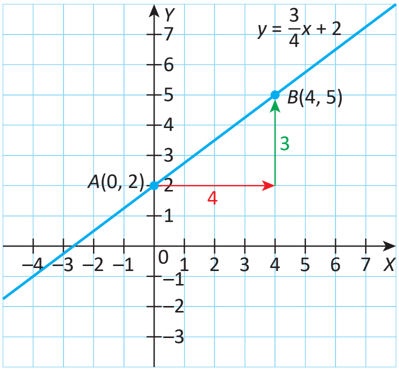


Przechodzimy do zaznaczenia kolejno punktów o współrzędnych:

$(1, -1)$, $(2, -3)$, $(3, -5)$, itd.

Analogicznie możemy zaznaczyć wybrane punkty wykresu w drugiej ćwiartce układu współrzędnych, np. punkt o współrzędnych $(-1, 3)$.
Przez wyznaczone punkty prowadzimy szukaną prostą.

Ad b) $y = \frac{3}{4}x + 2$



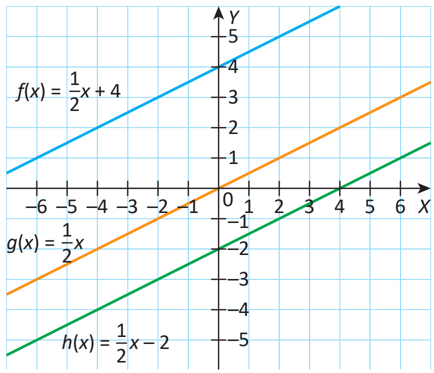
Wykres funkcji przecina oś OY w punkcie $A(0, 2)$. Przyrost argumentu o 1 powoduje przyrost wartości funkcji o $\frac{3}{4}$. Jeśli rozważymy czterokrotnie większy przyrost argumentu $(4 \cdot 1 = 4)$, to odpowiadać mu będzie czterokrotnie większy przyrost wartości $\left(4 \cdot \frac{3}{4} = 3\right)$.

Wyznaczamy kolejny punkt wykresu:

$B(0 + 4, 2 + 3)$, czyli $B(4, 5)$.

Przez punkty A i B prowadzimy szukaną prostą.

Porównamy teraz wykresy trzech funkcji:
$f(x) = \frac{1}{2}x + 4$, $g(x) = \frac{1}{2}x$ i $h(x) = \frac{1}{2}x - 2$.
Współczynnik kierunkowy każdej funkcji jest równy $\frac{1}{2}$.
Proste będące wykresami tych funkcji są równoległe.



Twierdzenie 3.

Proste będące wykresami funkcji liniowych są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy współczynniki kierunkowe występujące we wzorach tych funkcji są równe.

Przykład 5.

Napiszemy wzór funkcji liniowej f, wiedząc, że jej wykres jest równoległy do wykresu funkcji $y = 3x$ i przechodzi przez punkt o współrzędnych $(2, 1)$.

Szukamy współczynników a i b we wzorze funkcji $y = ax + b$.

1) Na podstawie twierdzenia 3. zauważamy, że $a = 3$. Szukany wzór przyjmuje postać $y = 3x + b$.
2) Podstawiamy współrzędne $(2, 1)$ w miejsce x i y do wzoru funkcji:

$$1 = 3 \cdot 2 + b, \quad \text{skąd} \quad b = -5$$

Funkcję liniową f opisuje wzór $y = 3x - 5$.

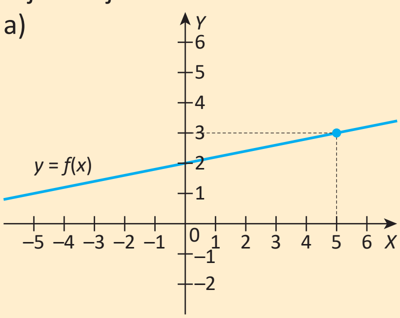
Więcej informacji o równoległości prostych w układzie współrzędnych poznasz w klasie drugiej.

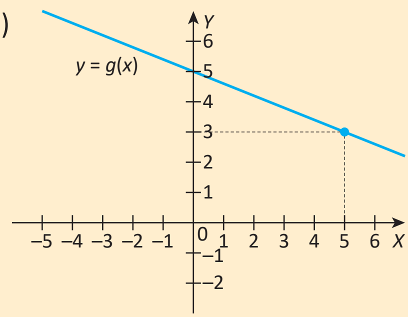
Sprawdź, czy rozumiesz

1. Dane są punkty A i B należące do wykresu funkcji liniowej. Oblicz współczynnik kierunkowy występujący we wzorze tej funkcji liniowej, jeśli:
a) $A(2, 0)$, $B(1, 7)$
b) $A(6, -2)$, $B(0, 1)$
c) $A(4, 3)$, $B(-1, 3)$
d) $A\left(3, \sqrt{2}\right)$, $B\left(1, -\sqrt{2}\right)$
e) $A(-15, -3)$, $B(5, 1)$
f) $A\left(1, 2\sqrt{3}\right)$, $B\left(\sqrt{3}, 2\right)$.

2. Do wykresu funkcji liniowej należą punkty M i N. Wyznacz wzór tej funkcji, jeśli:
a) $M(2, -1)$, $N(-4, 11)$
b) $M(2, 0)$, $N(-6, -2)$
c) $M\left(\frac{5}{6}, -4\frac{1}{2}\right)$, $N(8, 17)$
d) $M\left(\sqrt{5}, 5\right)$, $N\left(-\sqrt{5}, -5\right)$.

3. Do wykresu funkcji liniowej $f(x) = 4(2m - 3) - 3mx$ należy punkt $A(2, -26)$. Oblicz m. Dla otrzymanej wartości m, wyznacz współczynnik kierunkowy i wyraz wolny funkcji f.

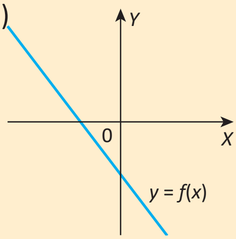
4. Na poniższym rysunku przedstawiony jest wykres funkcji liniowej. Podaj wzór tej funkcji.
a)


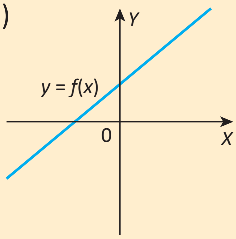
b)


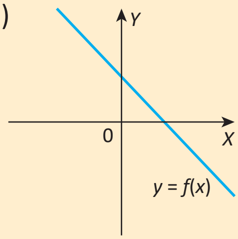
5. Dana jest funkcja liniowa $f(x) = 1 + (2 - m)x$. Określ, czy funkcja f jest rosnąca, malejąca czy stała, jeśli:
a) $m = 7$
b) $m = 2$
c) $m = -1$
d) $m = \pi$.

6. Wyznacz wszystkie wartości m, $m \in \boldsymbol{R}$, dla których funkcja liniowa:
a) $f(x) = (m^2 - 3)x + 2m$ jest stała
b) $f(x) = (4 - m)x + 3$ jest rosnąca
c) $f(x) = m - (2m - 7)x$ jest malejąca
d) $f(x) = m - (m - 2)(m + 2)x$ jest stała.

7. Określ znaki współczynników a i b we wzorze funkcji liniowej $f(x) = ax + b$, której wykres jest przedstawiony poniżej:

a) 

b) 

c) 

8. Dany jest wzór funkcji liniowej f. Naszkicuj wykres funkcji f na podstawie interpretacji współczynników występujących we wzorze funkcji. Następnie oblicz miejsce zerowe i omów własności funkcji f, jeśli:

a) $f(x) = 3x - 1$ b) $f(x) = -4x$ c) $f(x) = -\frac{1}{3}x + 2$

d) $f(x) = -\frac{3}{7}x + 1$ e) $f(x) = \frac{2}{5}x - 3$ f) $f(x) = \frac{7x+8}{4}$

9. Dany jest wzór funkcji liniowej f oraz punkt P. Wyznacz wzór funkcji liniowej g, wiedząc, że wykres funkcji g jest równoległy do wykresu funkcji f i przechodzi przez punkt P, jeśli:

a) $f(x) = \sqrt{2}x - 1,\ P(0, 4)$ b) $f(x) = -5x,\ P(2, 0)$
c) $f(x) = -4,\ P(1, 3)$ d) $f(x) = 6 - x,\ P(2, 7)$
e) $f(x) = 0{,}25x + 4,\ P(2\pi, \pi)$ f) $f(x) = -\sqrt{3}x + 2,\ P\left(1, -\sqrt{3}\right)$.

10. Wykres funkcji liniowej f jest równoległy do wykresu funkcji liniowej g. Oblicz m, jeśli:
a) $f(x) = 4x - m,\ g(x) = (m + 1)x + 2$
b) $f(x) = (2m - 1)x - 2m,\ g(x) = 4mx - 5$
Dla wyznaczonej wartości m naszkicuj wykresy obydwu funkcji w jednym układzie współrzędnych.

11. Do wykresu funkcji liniowej f należą punkty $A(-3, 1)$ oraz $B(1, 7)$. Wykres funkcji liniowej g jest równoległy do wykresu funkcji f i przechodzi przez punkt $C(-5, -3)$.
a) Wyznacz wzory funkcji f i g.
b) Podaj argumenty, dla których funkcja f przyjmuje wartości ujemne.
c) Oblicz pole trójkąta ograniczonego wykresem funkcji g i osiami układu współrzędnych.

Własności funkcji liniowej – zadania różne

Umiesz już szkicować wykres funkcji liniowej. Znasz też też własności funkcji liniowej. W tym temacie zwrócimy uwagę na zastosowanie poznanych wiadomości w różnych zadaniach.

Przykład 1.

Funkcja liniowa przyjmuje wartości ujemne wtedy i tylko wtedy, gdy $x \in (-\infty, 3)$. Ponadto dla argumentu 0 przyjmuje wartość -1. Wyznaczymy wzór tej funkcji.

Szukamy funkcji określonej wzorem $f(x) = ax + b$.
Ponieważ funkcja liniowa f przyjmuje wartości ujemne tylko dla argumentów mniejszych od 3, więc możemy wnioskować, że liczba 3 jest miejscem zerowym funkcji f. Zatem $0 = 3a + b$. Ponadto $f(0) = -1$, czyli wykres funkcji f przecina oś OY w punkcie $(0, -1)$, stąd $b = -1$. Otrzymujemy:

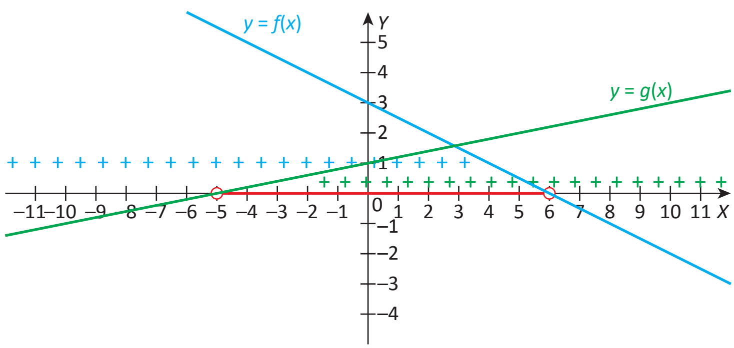
$b = -1$ i $0 = 3a + b$, skąd

$$a = \frac{1}{3}$$

Wzór funkcji f przyjmuje postać $f(x) = \frac{1}{3}x - 1$.

Przykład 2.

Naszkicujemy w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji liniowych $f(x) = -0{,}5x + 3$ i $g(x) = 0{,}2x + 1$. Następnie na podstawie wykresów wyznaczymy zbiór wszystkich takich argumentów, dla których obie funkcje jednocześnie przyjmują wartości dodatnie.



Wyznaczamy miejsca zerowe funkcji f i g:

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 6$ $\qquad$ $g(x) = 0 \Leftrightarrow x = -5$

Na rysunku powyżej niebieskie plusy wyznaczają przedział, w którym funkcja f przyjmuje wartości dodatnie, zaś plusy zielone – przedział, w którym funkcja g przyjmuje wartości dodatnie.

$f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 6)$ $\qquad$ $g(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-5, +\infty)$

Na osi OX kolorem czerwonym jest zaznaczony zbiór tych wszystkich argumentów, dla których obie funkcje jednocześnie przyjmują wartości dodatnie, czyli przedział $(-5, 6)$.

Obie funkcje przyjmują jednocześnie wartości dodatnie wtedy i tylko wtedy, gdy $x \in (-5, 6)$.

UWAGA: Zauważ, że $(-\infty, 6) \cap (-5, +\infty) = (-5, 6)$.

Zbiór argumentów, dla których obie funkcje z przykładu 2. jednocześnie przyjmują wartości dodatnie, można też wyznaczyć bez szkicowania wykresów. Wystarczy:

1) rozwiązać nierówności:

$-0{,}5x + 3 > 0 \quad$ i $\quad 0{,}2x + 1 > 0$

$x < 6 \quad$ i $\quad x > -5$

2) następnie wyznaczyć część wspólną zbiorów rozwiązań.

Przykład 3.

Wyznaczymy zbiór tych wszystkich argumentów, dla których funkcja liniowa $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$ przyjmuje wartości należące do przedziału $(3, 7\rangle$.

I sposób

Szukamy takich argumentów, dla których $f(x) \in (3, 7\rangle$, czyli $3 < f(x) \leqslant 7$.

Rozwiązujemy nierówność podwójną:

$$3 < \frac{1}{2}x + 1 \leqslant 7,$$

$$\frac{1}{2}x + 1 > 3 \quad \text{i} \quad \frac{1}{2}x + 1 \leqslant 7, \quad \text{skąd}$$

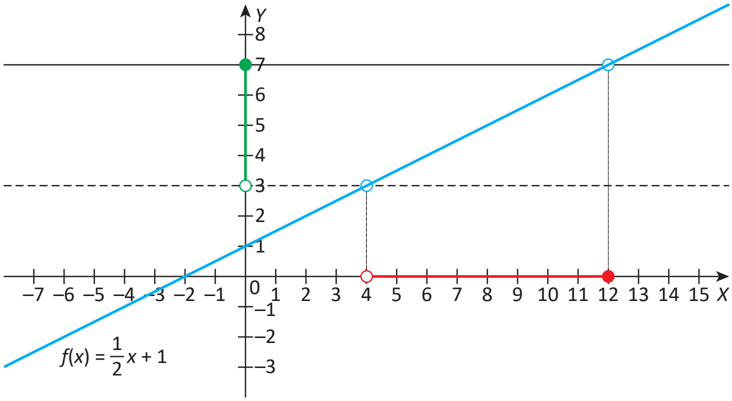
$$x > 4 \quad \text{i} \quad x \leqslant 12, \quad \text{zatem}$$

$$x \in (4, 12\rangle$$

Funkcja f przyjmuje wartości należące do przedziału $(3, 7\rangle$ tylko wtedy, gdy $x \in (4, 12\rangle$.

II sposób

Szkicujemy wykres funkcji $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$, (zobacz rysunek poniżej). Zaznaczamy na osi OY przedział $(3, 7\rangle$, następnie prowadzimy w układzie współrzędnych proste $y = 3$ i $y = 7$. Obliczamy współrzędne punktów przecięcia tych prostych z wykresem funkcji f. Na koniec odczytujemy na osi OX przedział tych argumentów, dla których $f(x) \in (3, 7\rangle$.



Funkcja f przyjmuje wartości należące do przedziału $(3, 7\rangle$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \in (4, 12\rangle$.

Przykład 4.

Funkcja f dana jest wzorem $f(x) = \begin{cases} 0{,}5x + 1, & \text{jeśli } x \in (-\infty, -4) \\ x + 3, & \text{jeśli } x \in \langle -4, 0) \\ 3 - 0{,}5x, & \text{jeśli } x \in \langle 0, +\infty) \end{cases}$

a) Obliczymy miejsca zerowe funkcji f.
b) Wyznaczymy zbiór wartości tej funkcji.
c) Odczytamy z wykresu funkcji f, dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartości mniejsze od 1.

Ad a) Sprawdzamy, czy funkcja f ma miejsca zerowe.

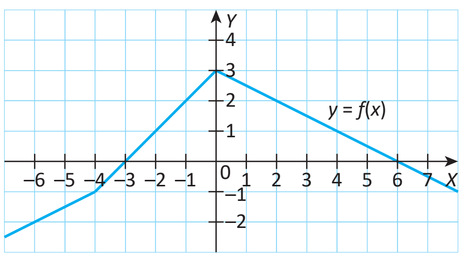
1) $x \in (-\infty, -4)$
$0{,}5x + 1 = 0$
$x = -2$
$-2 \notin (-\infty, -4)$

2) $x \in \langle -4, 0)$
$x + 3 = 0$
$x = -3$
$-3 \in \langle -4, 0)$.

3) $x \in \langle 0, +\infty)$
$3 - 0{,}5x = 0$
$x = 6$
$6 \in \langle 0, +\infty)$.

Funkcja f ma tylko dwa miejsca zerowe. Są to liczby -3 oraz 6.

Ad b) Zbiór wartości funkcji f odczytujemy z jej wykresu.



Zbiorem wartości funkcji f jest przedział $(-\infty, 3\rangle$.

Ad c) Z wykresu odczytujemy zbiór tych argumentów, dla których funkcja przyjmuje wartości mniejsze od 1:

$f(x) < 1 \iff x \in (-\infty, -2) \cup (4, +\infty)$

Przykład 5.

Dana jest funkcja liniowa $y = (m^2 - 9)x + 9m + 27$. Sprawdzimy, czy istnieje liczba m, dla której ta funkcja ma nieskończenie wiele miejsc zerowych.

Funkcja liniowa $y = ax + b$ ma nieskończenie wiele miejsc zerowych tylko wtedy, gdy jej wzór przyjmuje postać $y = 0$, czyli tylko wtedy, gdy $a = 0$ i $b = 0$ (zobacz str. 207). Zauważamy, że $a = m^2 - 9$ oraz $b = 9m + 27$. Zatem rozwiązujemy dwa równania:

$$\begin{array}{rcl} m^2 - 9 = 0 & \text{i} & 9m + 27 = 0 \\ (m-3)(m+3) = 0 & \text{i} & 9m = -27 \\ (m = 3 \ \text{lub} \ m = -3) & \text{i} & m = -3 \end{array}$$

Dana funkcja liniowa ma nieskończenie wiele miejsc zerowych wtedy i tylko wtedy, gdy $m = -3$.

Przykład 6.

Wyznaczymy wszystkie wartości m, dla których funkcja liniowa $f(x) = (2m + 8)x - m + 5$ jest rosnąca i jednocześnie jej wykres przecina oś OY powyżej punktu $P(0, 2)$.

Funkcja liniowa $y = ax + b$ jest rosnąca tylko wtedy, gdy $a > 0$. Wykres tej funkcji przecina oś OY powyżej punktu $P(0, 2)$ tylko wtedy, gdy $b > 2$. Zauważamy, że

$a = 2m + 8 \qquad b = -m + 5.$

Rozwiązujemy nierówności:

$$\begin{array}{lcl} 2m + 8 > 0 & \text{i} & -m + 5 > 2. \\ m > -4 & \text{i} & m < 3 \end{array}$$

Wyznaczamy część wspólną przedziałów $(-4, +\infty)$ i $(-\infty, 3)$:

$(-4, +\infty) \cap (-\infty, 3) = (-4, 3)$

Funkcja liniowa f jest rosnąca i jednocześnie jej wykres przecina oś OY powyżej punktu P wtedy i tylko wtedy, gdy $m \in (-4, 3)$.

Przykład 7.

Sprawdzimy, czy punkty $A(0, -7)$, $B(60, -5)$ i $C(-120, -11)$ należą do jednej prostej.

Przez dwa dowolne różne punkty płaszczyzny przechodzi jedna prosta. Aby rozwiązać to zadanie, wystarczy wyznaczyć wzór funkcji liniowej, której wykres przechodzi przez dwa punkty, na przykład A i B, a następnie sprawdzić (rachunkowo), czy trzeci punkt (C) należy do wykresu tej funkcji.

Niech $f(x) = ax + b$. Zatem:

1) Wyznaczamy współczynnik kierunkowy: $a = \dfrac{-5 + 7}{60 - 0} = \dfrac{1}{30}$.

2) Punkt $A(0, -7)$ należy do wykresu funkcji f. Odczytujemy b: $b = -7$.

3) Funkcję liniową f opisuje wzór $f(x) = \frac{1}{30}x - 7$. Sprawdzamy, czy punkt C należy do prostej będącej wykresem tej funkcji, to znaczy sprawdzamy, czy jest spełniona równość $f(-120) = -11$:

$$f(-120) = \frac{1}{30} \cdot (-120) - 7 = -11$$

Punkt C należy do prostej wyznaczonej przez punkty A i B, czyli punkty A, B, C są współliniowe.

Sprawdź, czy rozumiesz

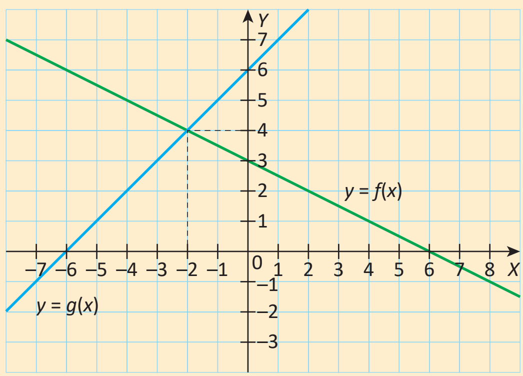
1. Wykres funkcji liniowej $f(x) = ax + b$ przecina oś OY w punkcie $(0, 8)$. Funkcja ta przyjmuje wartości dodatnie wtedy i tylko wtedy, gdy $x \in (-\infty, 5)$. Wyznacz wzór funkcji f.

2. Funkcja liniowa określona wzorem $f(x) = (m - 2)x + 4$ przyjmuje wartości ujemne wtedy i tylko wtedy, gdy $x \in (-\infty, -3)$. Oblicz m.

3. Wyznacz zbiór tych wszystkich argumentów, dla których wartości funkcji liniowej $f(x) = -\frac{3}{8}x + 6$ należą do przedziału $(-9, 21\rangle$.

4. Wyznacz zbiór tych wszystkich argumentów, dla których funkcje liniowe $f(x) = \frac{1}{3}x - \frac{2}{5}$ oraz $g(x) = -5x + 9$ jednocześnie przyjmują wartości nieujemne.

5. Na rysunku poniżej we wspólnym układzie współrzędnych przedstawione są wykresy dwóch funkcji liniowych $y = f(x)$ oraz $y = g(x)$. Odczytaj z wykresu:
   a) zbiór wartości funkcji f dla argumentów należących do przedziału $\langle 0, 4)$;
   b) argument, dla którego obie funkcje przyjmują tę samą wartość;
   c) dla jakich argumentów zachodzi nierówność $g(x) < 0$;
   d) dla jakich argumentów obie funkcje przyjmują jednocześnie wartości większe od 2.



6. Dane są funkcje liniowe: $f(x) = -0{,}4x + 8$ oraz $g(x) = -0{,}3x + 15$. Wyznacz zbiór wszystkich argumentów, dla których wartości funkcji f są większe od wartości funkcji g.

7. Wyznacz zbiór tych wszystkich argumentów, dla których funkcja liniowa $f(x) = 0{,}5x - 10$ przyjmuje wartości większe od 3 i jednocześnie funkcja liniowa $g(x) = 0{,}1x - 4$ przyjmuje wartości mniejsze od 16.

8. Dany jest wzór funkcji f. Naszkicuj wykres tej funkcji i na jego podstawie omów jej własności.

a) $f(x) = \begin{cases} -x-4, & \text{jeśli } x \in (-\infty, -1\rangle \\ -3, & \text{jeśli } x \in (-1, 3) \\ x-6, & \text{jeśli } x \in \langle 3, +\infty) \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 2x+8, & \text{jeśli } x \in (-\infty, -2) \\ -\frac{1}{2}x+3, & \text{jeśli } x \in \langle -2, 4) \\ 1, & \text{jeśli } x \in \langle 4, +\infty) \end{cases}$

9. Wyznacz wszystkie wartości p, $p \in \boldsymbol{R}$, dla których wykres funkcji liniowej $f(x) = (p+3)x - 2p + 4$ przecina oś OY:
a) poniżej punktu $P(0, -3)$
b) powyżej punktu $K(0, 6)$.

10. Wykresy funkcji liniowych $f(x) = (a+1)x + (a+3)^2$ oraz $g(x) = 3x + a^2 + 16$ przecinają oś OY w tym samym punkcie. Wyznacz a.

11. Wyznacz wszystkie wartości b tak, aby funkcja liniowa określona wzorem:
a) $f(x) = (b^2 + 4b + 4)x + 2$ miała jedno miejsce zerowe;
b) $f(x) = b(b-2)x + b$ nie miała miejsca zerowego;
c) $f(x) = (4+b)x - 16 + b^2$ miała nieskończenie wiele miejsc zerowych.

12. Wyznacz wszystkie wartości k, $k \in \boldsymbol{R}$, dla których funkcja liniowa:
a) $g(x) = 4 + k - (5k+8)x$ jest stała;
b) $g(x) = (k+5)x + 6 + 2k$ jest rosnąca;
c) $g(x) = -4k + 7 - (3-2k)x$ jest malejąca.

13. Funkcja liniowa $f(x) = (3-m)x + (m+1)^2$ jest rosnąca, a jej wykres przechodzi przez punkt $A(2, 23)$. Oblicz m. Dla wyznaczonej wartości m, oblicz miejsce zerowe funkcji f.

14. Wyznacz wszystkie wartości m, $m \in \boldsymbol{R}$, dla których wykres funkcji liniowej określonej wzorem $f(x) = (2-m)x + m - 5$ przechodzi przez II, III i IV ćwiartkę układu współrzędnych.

15. Wyznacz wszystkie wartości m, $m \in \boldsymbol{R}$, dla których wykres funkcji liniowej określonej wzorem $h(x) = (2m+5)x + 6m + 3$ przechodzi przez I, III i IV ćwiartkę układu współrzędnych.

16. Proste będące wykresami funkcji liniowych $f(x) = 3 - a + 8x$ oraz $g(x) = 3(b-2)x + 6$ się pokrywają. Wyznacz a i b.

17. Wyznacz k tak, aby punkt $C(5k, 3k+2)$ należał do prostej przechodzącej przez punkty $A(5, 9)$ i $B(-10, 3)$.

18. Proste będące wykresami dwóch funkcji liniowych $f(x) = (1-m)x - 2m$ oraz $g(x) = (m-5)x - 1$ są równoległe.
a) Oblicz m.
b) Zaznacz w układzie współrzędnych trapez, którego podstawy zawierają się w tych prostych, a ramiona zawierają się w osiach układu współrzędnych. Wyznacz współrzędne wierzchołków tego trapezu.

Zastosowanie własności funkcji liniowej w zadaniach praktycznych

Przykład 1.

W wyścigu kolarskim grupa sportowców ma jeszcze 144 km do mety i jedzie ze średnią prędkością 45 km/h. Oznaczmy odległość (w km) tej grupy od mety literą d, zaś czas jazdy (w h) – literą t.

a) Wyznaczymy wzór opisujący odległość tej grupy od mety, w zależności od czasu i obliczymy, ile czasu potrzeba kolarzom, by dotrzeć do mety.

b) Naszkicujemy wykres funkcji d.

Ad a) Odległość grupy kolarzy od mety, w zależności od czasu t, opisuje wzór:

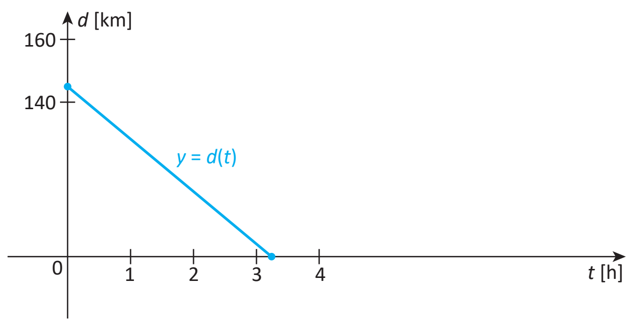
$d(t) = 144 - 45 \cdot t$

Kolarze dotrą do mety w czasie t, dla którego $d(t) = 0$. Zatem

$144 - 45 \cdot t = 0$, skąd $t = 3{,}2$ (h) zatem $d(t) = 144 - 45 \cdot t$, gdzie $t \in \left\langle 0,\ 3\frac{1}{5} \right\rangle$

Kolarze dotrą do mety za 3 godziny i 12 minut.

Ad b)



Przykład 2.

W pewnym kraju od podatku dochodowego są zwolnione dochody nieprzekraczające 5 tys. dolarów. Za dochody przekraczające 5 tys. dolarów, ale nie większe niż 30 tys. dolarów, podatnik zapłaci podatek w wysokości 10% od dochodu pomniejszonego o 5 tys. dolarów. Jeżeli dochód przekracza 30 tys. dolarów, podatnik płaci 2500 dolarów plus 25% nadwyżki powyżej 30 tys. dolarów.

Opiszemy system podatkowy w tym kraju za pomocą funkcji f, która pokazuje zależność podatku od dochodu, i naszkicujemy jej wykres.

Oznaczamy:

x – dochód uzyskany przez podatnika (w dolarach)

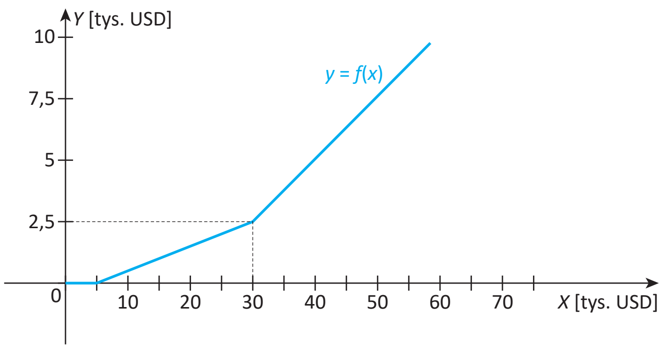
y – podatek, jaki należy zapłacić od uzyskanego dochodu (w dolarach).

1. Jeżeli podatnik uzyska dochód z przedziału $\langle 0, 5000\rangle$, to nie płaci podatku, czyli podatek ma wartość równą zero.
2. Jeśli dochód x podatnika spełnia warunek $5000 < x \leqslant 30\,000$
   to dochód x pomniejszamy o 5000 dolarów i otrzymujemy kwotę
   $$x - 5000$$
   dolarów; następnie obliczamy 10% uzyskanej w ten sposób kwoty, czyli
   $$0{,}1 \cdot (x - 5000).$$
   Zatem podatnik zapłaci podatek w wysokości
   $$0{,}1x - 500.$$
3. Jeśli natomiast dochód x podatnika przekroczy 30 tys. dolarów, to postępujemy następująco: od uzyskanego dochodu odejmujemy 30 000 dolarów i otrzymujemy nadwyżkę powyżej 30 000 dolarów, równą
   $$x - 30\,000$$
   Obliczamy 25% z otrzymanej nadwyżki, czyli
   $$0{,}25 \cdot (x - 30\,000)$$
   i otrzymujemy kwotę
   $$0{,}25x - 7500$$
   do której należy jeszcze dodać opłatę stałą w wysokości 2500 dolarów. Zatem podatek w tym przypadku wynosi:
   $$0{,}25x - 7500 + 2500, \text{ czyli}$$
   $$0{,}25x - 5000.$$

Oto wzór funkcji f opisującej system podatkowy w tym kraju:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{jeśli } 0 \leqslant x \leqslant 5000 \\ 0{,}1x - 500, & \text{jeśli } 5000 < x \leqslant 30\,000 \\ 0{,}25x - 5000, & \text{jeśli } x > 30\,000 \end{cases}$$

Poniższy rysunek przedstawia wykres funkcji f:



Oblicz, jaki podatek zapłaci obywatel tego kraju, który uzyskał dochód równy 28 000 dolarów, a jaki obywatel, którego dochód wyniósł 86 000 dolarów.

Niektóre ciała stałe pod wpływem temperatury zmieniają swoje rozmiary liniowe. Takie zjawisko zwane jest rozszerzalnością cieplną. Inżynierowie projektujący mosty, sieci elektryczne czy tory kolejowe muszą uwzględnić to zjawisko fizyczne. Na przykład szyny kolejowe są układane z zachowaniem pewnych odstępów zwanych szczelinami dylatacyjnymi, aby w przypadku ich wydłużenia, pod wpływem zmiany temperatury, nie doszło do wykolejenia się pociągu.

Przykład 3.

Przyrost długości Δl ciała stałego jest wprost proporcjonalny do długości początkowej l_0 i przyrostu temperatury ΔT:

$\Delta l = \alpha \cdot l_0 \cdot \Delta T$, gdzie α – współczynnik rozszerzalności.

Długość końcowa l jest równa

$$l - l_0 = \alpha \cdot l_0 \cdot \Delta T$$
$$l = l_0 + \alpha \cdot l_0 \cdot \Delta T$$
$$l = l_0(1 + \alpha \cdot \Delta T)$$

Szyna kolejowa w temperaturze 5°C ma długość 120 m. Współczynnik rozszerzalności stali jest równy $\alpha = 11 \cdot 10^{-6} \frac{1}{°C}$.

a) Obliczymy, jaką długość będzie mieć ta szyna w temperaturze 25°C.
b) Obliczymy w jakiej temperaturze szyna wydłuży się o 5 cm i 2,8 mm.

Ad a) Mamy:

$$l_0 = 120 \text{ m}, \quad \Delta T = 25°C - 5°C = 20°C$$
$$l = 120 \cdot (1 + 11 \cdot 10^{-6} \cdot 20)$$
$$l = 120 \cdot (1 + 0{,}00022)$$
$$l = 120 \cdot 1{,}00022$$
$$l = 120{,}0264$$

W temperaturze 25°C szyna będzie mieć długość 120,0264 m.

Ad b) Szyna wydłuży się o 5 cm 28 mm, czyli $\Delta l = 0{,}0528$ m, $T_0 = 5°C$, $l_0 = 120$ m. Szukamy temperatury T. Korzystamy ze wzoru: $\Delta l = \alpha \cdot l_0 \cdot \Delta T$

$$\Delta l = \alpha \cdot l_0 \cdot (T - T_0) \quad \text{skąd}$$
$$0{,}0528 = 11 \cdot 10^{-6} \cdot 120 \cdot (T - 5) \qquad \text{czyli}$$
$$0{,}0528 = 0{,}00132\,(T - 5) \quad /: 0{,}00132$$
$$40 = T - 5$$
$$T = 45$$

Szyna zwiększy swoją długość o 5,28 cm w temperaturze 45°C.

Przykład 4.

Troposfera to warstwa atmosfery ziemskiej, najbliższa powierzchni Ziemi, która rozciąga się do wysokości 7 – 10 km nad obszarami podbiegunowymi, 10 – 12 km nad umiarkowanymi szerokościami geograficznymi oraz 16 – 18 km nad równikiem. Jej grubość od kilkudziesięciu metrów do 2 km nazywa się warstwą graniczną. Powyżej warstwy granicznej, w atmosferze swobodnej, temperatura maleje niemal jednostajnie z wysokością, to znaczy co każde 100 m obniża się o 0,6°C (encyklopedia PWN).

Załóżmy, że kilkadziesiąt metrów nad poziomem morza (w atmosferze swobodnej) znajduje się punkt badawczy, w którym temperatura jest równa 23°C.

a) Napiszemy wzór funkcji opisującej zmianę temperatury T[°C] w zależności od wysokości h [m] od punktu badawczego, gdzie $0 \leqslant h \leqslant 10\,000$.
b) Obliczymy wartość temperatury na wysokości 10 km od punktu badawczego.
c) Obliczymy, na jakiej wysokości od punktu badawczego temperatura jest równa –25°C.
d) Naszkicujemy wykres funkcji temperatury w zależności od wysokości i odczytamy z wykresu na jakiej wysokości temperatura jest równa 0°C.

Ad a) Temperatura obniża się co każde 100 m o 0,6°C, zatem na wysokości h będzie niższa od temperatury początkowej o $\frac{h}{100} \cdot 0{,}6$°C. Zatem

$$T(h) = 23 - \frac{h}{100} \cdot 0{,}6$$

$$T(h) = 23 - 0{,}006h,\ \ h \in \langle 0,\ 10\,000 \rangle$$

Ad b) $T(10\,000) = 23 - 0{,}006 \cdot 10\,000 = 23 - 60 = -37$

Na wysokości 10 km nad punktem badawczym temperatura jest równa –37°C.

Ad c) $T = 23 - 0{,}006h$, więc

$$h = \frac{23 - T}{0{,}006}, \text{ zatem}$$

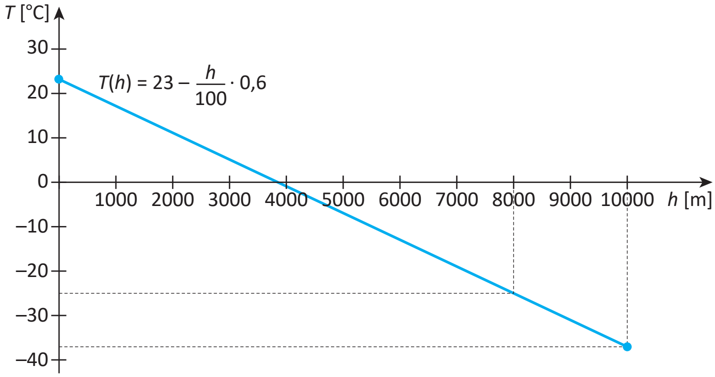
$$h = \frac{23 - (-25)}{0{,}006}$$

$$h = \frac{48}{0{,}006}$$

$$h = 8\,000$$

Na wysokości 8 km nad punktem badawczym temperatura jest równa –25°C.

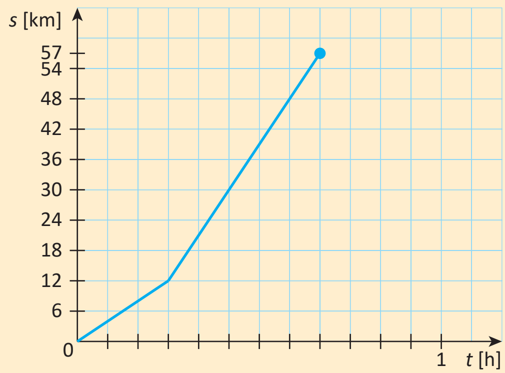
Ad d) Wykres funkcji przedstawia poniższy rysunek.



Z wykresu odczytujemy, że w odległości ok. 3,8 km nad punktem badawczym temperatura jest równa 0°C (sprawdź rachunkiem).

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Samochód najpierw jechał w terenie zabudowanym, a następnie w terenie niezabudowanym i łącznie przebył 57 km. Na rysunku obok przedstawiony jest wykres ilustrujący drogę *s* samochodu w zależności od czasu *t*.
   a) Oblicz średnią prędkość samochodu na całej trasie.
   b) Napisz wzór funkcji opisującej drogę *s* samochodu w zależności od czasu jazdy *t*.



2. W zbiorniku o wysokości 1,3 m znajduje się woda. Lustro wody jest na wysokości 4 cm od dna zbiornika. Po odkręceniu kranu poziom wody podnosi się o 18 cm co godzinę.
   a) Zapisz wzór funkcji *P* opisującej zależność poziomu wody w zbiorniku od czasu *t*. Określ dziedzinę funkcji, przyjmując, że proces ten trwa do całkowitego napełnienia zbiornika.
   b) Jaki byłby poziom wody w zbiorniku, gdyby czas napełniania wynosił 5 godzin 36 minut?
3. Napisz wzór funkcji wyrażającej zależność temperatury, podanej w stopniach Fahrenheita, od temperatury wyrażonej w stopniach Celsjusza, wiedząc, że ta zależność ma postać $F = a \cdot C + b$, oraz wiedząc, że 100°C to 212°F, zaś 35°C to 95°F, a następnie:
   a) Oblicz temperaturę powietrza w stopniach Celsjusza, jeśli temperatura tego dnia była równa 59°F.
   b) Temperatura zdrowego człowieka wynosi 36,6°C. Wyraź tę temperaturę w skali Fahrenheita.

Wykresy wybranych funkcji

Znajomość wykresu funkcji liniowej pozwala na szkicowanie wykresów różnych ciekawych funkcji. Niektóre z nich przedstawimy w tym temacie.

Przykład 1.

Naszkicujemy wykres funkcji $f(x) = \operatorname{sgn} x$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}$.

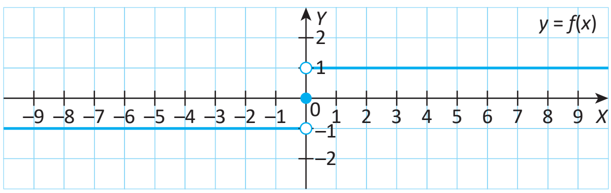
Symbol „sgn" oznacza signum (łac. *signum* = *znak*). Funkcja signum:

- każdej liczbie rzeczywistej dodatniej przyporządkowuje liczbę 1,
- każdej liczbie rzeczywistej ujemnej przyporządkowuje liczbę –1,
- liczbie 0 przyporządkowuje liczbę 0.

Wzór funkcji $f(x) = \operatorname{sgn} x$ możemy zapisać następująco:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{jeśli } x \in (0, +\infty) \\ 0, & \text{jeśli } x = 0 \\ -1, & \text{jeśli } x \in (-\infty, 0) \end{cases}$$

Wykres funkcji $f(x) = \operatorname{sgn} x$ ilustruje poniższy rysunek:



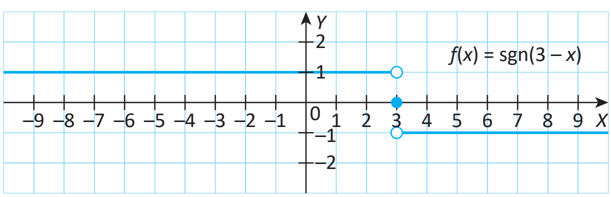
Przykład 2.

Naszkicujemy wykres funkcji $f(x) = \operatorname{sgn}(3 - x)$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}$.

Korzystamy z określenia funkcji signum i otrzymujemy:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{jeśli } 3 - x > 0 \\ 0, & \text{jeśli } 3 - x = 0 \\ -1, & \text{jeśli } 3 - x < 0 \end{cases} \quad \text{skąd mamy} \quad f(x) = \begin{cases} 1, & \text{jeśli } x < 3 \\ 0, & \text{jeśli } x = 3 \\ -1, & \text{jeśli } x > 3 \end{cases}$$

Wykres funkcji $f(x) = \operatorname{sgn}(3 - x)$ ilustruje rysunek poniżej.



W kolejnym przykładzie wykorzystamy definicję wartości bezwzględnej.

Przykład 3.

Naszkicujemy wykres funkcji $f(x) = |x-2|$, gdzie $x \in \mathbf{R}$.

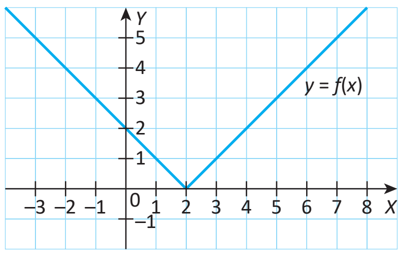
Zgodnie z definicją wartości bezwzględnej (zobacz str. 17) mamy:

1) $|x-2| = x-2$ – jeśli $x-2 \geqslant 0$, czyli wtedy, gdy $x \geqslant 2$
2) $|x-2| = -(x-2)$ – jeśli $x-2 < 0$, czyli wtedy, gdy $x < 2$

Wzór funkcji f możemy zapisać następująco:

$$f(x) = \begin{cases} (x-2), & \text{jeśli } x \geqslant 2 \\ -(x-2), & \text{jeśli } x < 2 \end{cases} \quad \text{czyli} \quad f(x) = \begin{cases} x-2, & \text{jeśli } x \geqslant 2 \\ -x+2, & \text{jeśli } x < 2 \end{cases}$$

Szkicujemy wykres funkcji f:



Definicja 1.

1) **Maksimum** dwóch liczb rzeczywistych a i b (w skrócie $\max(a, b)$) nazywamy nie mniejszą z tych liczb, czyli $\max(a, b) = \begin{cases} a, & \text{jeśli } a \geqslant b \\ b, & \text{jeśli } a < b \end{cases}$.
2) **Minimum** dwóch liczb rzeczywistych a i b (w skrócie $\min(a, b)$) nazywamy nie większą z tych liczb, czyli $\min(a, b) = \begin{cases} a, & \text{jeśli } a \leqslant b \\ b, & \text{jeśli } a > b \end{cases}$.

Na podstawie definicji 1. otrzymujemy na przykład:

$\max(3, 7) = 7$, bo $7 > 3$, $\quad \max(8, 8) = 8$, bo $8 \geqslant 8$

$\min(\sqrt{2}, 2) = \sqrt{2}$, bo $\sqrt{2} < 2$ $\quad \min(-\pi, -3{,}14) = -\pi$, bo $-\pi < -3{,}14$

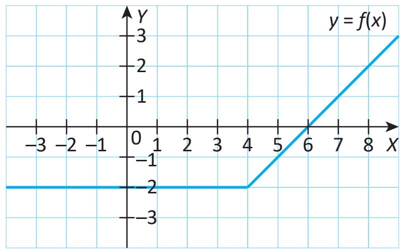
Przykład 4.

Naszkicujemy wykres funkcji $f(x) = \max(-2; x-6)$, gdzie $x \in \mathbf{R}$.

Wzór funkcji f możemy zapisać w postaci:

$$f(x) = \begin{cases} -2, & \text{jeśli } -2 \geqslant x-6 \\ x-6, & \text{jeśli } -2 < x-6 \end{cases} \quad \text{czyli} \quad f(x) = \begin{cases} -2, & \text{jeśli } x \leqslant 4 \\ x-6, & \text{jeśli } x > 4 \end{cases}$$

Wykres funkcji $f(x) = \max(-2; x-6)$ przedstawia poniższy rysunek.



Dla dowolnej liczby rzeczywistej możemy obliczyć jej część całkowitą (zwaną też cechą) oraz część ułamkową (zwaną też mantysą).

Definicja 2.

1) **Częścią całkowitą** liczby x nazywamy największą liczbę całkowitą, która nie jest większa od x, i oznaczamy ją symbolem $[x]$.
2) **Częścią ułamkową** liczby x nazywamy różnicę między liczbą x, a jej częścią całkowitą, czyli liczbę $x - [x]$.

Na podstawie definicji 2. obliczamy:

1) części całkowite liczb $\frac{1}{3}$; 2; 1,7; $-3\frac{2}{9}$:

$\left[\frac{1}{3}\right] = 0$ $\quad$ $[2] = 2$ $\quad$ $[1{,}7] = 1$ $\quad$ $\left[-3\frac{2}{9}\right] = -4$

2) części ułamkowe liczb $\frac{1}{3}$; 2; 1,7; $-3\frac{2}{9}$:

$\frac{1}{3} - \left[\frac{1}{3}\right] = \frac{1}{3}$ $\quad$ $2 - [2] = 0$ $\quad$ $1{,}7 - [1{,}7] = 0{,}7$ $\quad$ $-3\frac{2}{9} - \left[-3\frac{2}{9}\right] = \frac{7}{9}$

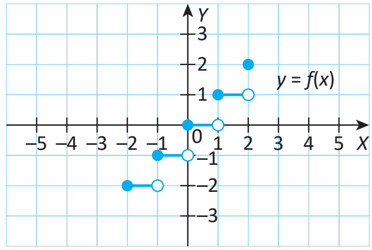
Przykład 5.

Naszkicujemy wykres funkcji $f(x) = [x]$, gdzie $x \in \langle -2, 2\rangle$.

Zauważ, że jeśli k jest liczbą całkowitą, to dla wszystkich liczb rzeczywistych x należących do przedziału $\langle k, k+1)$ część całkowita liczby x jest równa k.

Zatem wzór funkcji f możemy napisać następująco:

$$f(x)=\begin{cases}-2, & \text{jeśli } x\in\langle -2,-1)\\ -1, & \text{jeśli } x\in\langle -1,0)\\ 0, & \text{jeśli } x\in\langle 0,1)\\ 1, & \text{jeśli } x\in\langle 1,2)\\ 2, & \text{jeśli } x=2\end{cases}$$



Wykres funkcji f ilustruje rysunek obok.

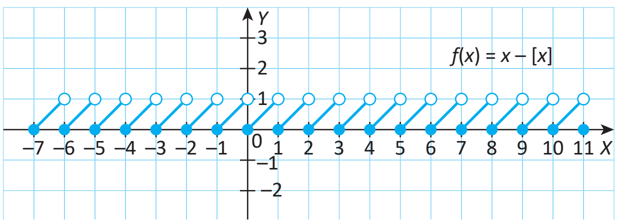
Przykład 6.

Naszkicujemy wykres funkcji $f(x)=x-[x]$, gdzie $x\in\langle -7, 11\rangle$.

Zauważ, że część ułamkowa dowolnej liczby całkowitej jest równa zero. Części ułamkowe pozostałych liczb rzeczywistych należą do przedziału $(0, 1)$. Ponadto:

- jeśli $x\in\langle 0, 1)$, to $[x]=0$ i $f(x)=x$
- jeśli $x\in\langle 1, 2)$, to $[x]=1$ i $f(x)=x-1$
- jeśli $x\in\langle -1, 0)$, to $[x]=-1$ i $f(x)=x+1$

Ogólnie, jeśli $k\in \boldsymbol{Z}$ i $x\in\langle k, k+1)$, to $f(x)=x-k$.
W naszym przypadku $k\in\{-7,-6,-5, ..., 8, 9, 10\}$. Zatem wykres funkcji $f(x)=x-[x]$, gdzie $x\in\langle -7, 11)$, przedstawia poniższy rysunek.



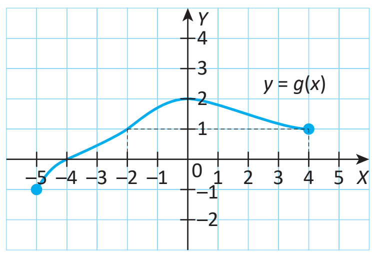
Przykład 7.

Na rysunku obok przedstawiony jest wykres funkcji

$y=g(x)$, gdzie $x\in\langle -5, 4\rangle$.

Naszkicujemy wykres funkcji

$f(x)=[g(x)]$.



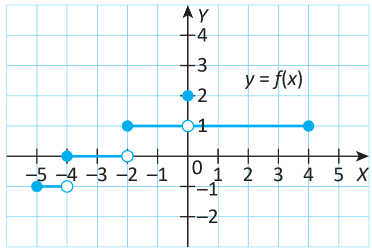
Funkcja f każdej liczbie rzeczywistej x należącej do przedziału $\langle -5, 4\rangle$ przyporządkowuje część całkowitą liczby, która jest wartością funkcji g dla argumentu x.

Z wykresu funkcji f odczytujemy:

jeśli $x \in \langle -5, -4)$, to $g(x) \in \langle -1, 0)$, wówczas $[g(x)] = -1$
jeśli $x \in \langle -4, -2)$, to $g(x) \in \langle 0, 1)$, wówczas $[g(x)] = 0$
jeśli $x \in \langle -2, 0) \cup (0, 4 \rangle$, to $g(x) \in \langle 1, 2)$, wówczas $[g(x)] = 1$
$g(0) = 2$, zatem $[g(0)] = 2$.

Poniżej mamy wzór funkcji f oraz jej wykres.

$$f(x) = \begin{cases} -1, \text{ jeśli } x \in \langle -5, -4) \\ 0, \text{ jeśli } x \in \langle -4, -2) \\ 1, \text{ jeśli } x \in \langle -2, 0) \cup (0, 4 \rangle \\ 2, \text{ jeśli } x = 0 \end{cases}$$



Sprawdź, czy rozumiesz

1. Naszkicuj wykres funkcji f, jeśli:

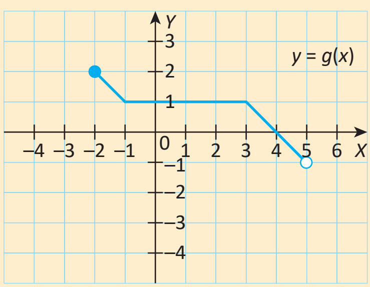
   a) $f(x) = \operatorname{sgn}(-4x)$
   b) $f(x) = \operatorname{sgn}\left(-\frac{1}{3}x + 2\right)$
   c) $f(x) = \operatorname{sgn}(x + 1)$
   d) $f(x) = \operatorname{sgn}(2x + 10)$

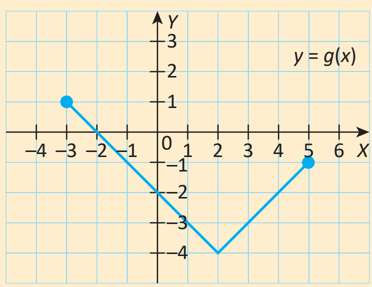
2. Korzystając z definicji wartości bezwzględnej naszkicuj wykresy funkcji:
   a) $y = |1 - x|$
   b) $y = |x + 4| - 2$
   c) $y = -2|x + 1|$

3. Naszkicuj wykres funkcji f, jeśli:
   a) $f(x) = \max(3, x - 1)$
   b) $f(x) = \min(x + 5, -x + 3)$
   c) $f(x) = \min\left(\frac{1}{2}x - 2\frac{1}{2}, \frac{3x}{2} + \frac{1}{2}\right)$
   d) $f(x) = \max(-2x + 4, x - 2)$

4. Naszkicuj wykres funkcji f, jeśli:
   a) $f(x) = [-x]$, gdzie $x \in \langle -3, 2 \rangle$
   b) $f(x) = [x] - 1$, gdzie $x \in (-4, 4)$

5. Na poniższym rysunku przedstawiony jest wykres funkcji $y = g(x)$. Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = [g(x)]$, jeśli:
   a) $D_g = \langle -2, 5)$
   b) $D_g = \langle -3, 5 \rangle$





Sprawdź, czy umiesz – powtórzenie do rozdziału 4.

Test

1. Wielkości x i y podane w tabelce poniżej są wprost proporcjonalne.

x	a	2,5	3,2
y	8	16	b

Zatem iloczyn $a \cdot b$ jest równy:
A. 25,6 B. 26,5 C. 22 D. 24

2. Kolarz pokonuje drogę 40 m w 3 sekundy. Ile kilometrów przejedzie w czasie 15 minut, jadąc z tą samą prędkością?
A. 6 B. 8 C. 10 D. 12

3. Do wykresu proporcjonalności prostej należy punkt $(-2, 8)$. Zatem tę funkcję opisuje wzór:
a) $y = 8$ B. $y = -2x + 4$ C. $y = -4x$ D. $y = 8x - 8$

4. Wartość funkcji $f(x) = \left(3 - 2\sqrt{2}\right)x + 12\sqrt{2}$ dla argumentu $\frac{1}{3+2\sqrt{2}}$ jest liczbą:
A. pierwszą B. złożoną C. niewymierną D. ujemną

5. Liczba 11 jest wartością funkcji liniowej $f(x) = \sqrt{2}x + 3$ dla argumentu:
A. $2\sqrt{2}$ B. $\sqrt{32}$ C. $\frac{6}{\sqrt{2}}$ D. $11\sqrt{2} + 3$

6. Wykres funkcji liniowej $f(x) = 4 - 8m + (m - 3)x$ przecina oś OY w punkcie $P(0, 6)$, jeśli:
A. $m = 9$ B. $m = 4$ C. $m = -0,25$ D. $m = -4$

7. Miejscem zerowym funkcji liniowej $f(x) = -\frac{2}{3}x + 14$ jest liczba:
A. 14 B. 0 C. –21 D. 21

8. Funkcje liniowe $f(x) = 3x - 2k + 6$ oraz $g(x) = \frac{1}{2}x + m - 2$ mają wspólne miejsce zerowe. Wobec tego zachodzi równość:
A. $k + m = 3$ B. $k = 9 - 3m$ C. $k = 2m$ D. $4k + 3m = 18$

9. Dane są funkcje liniowe:
I. $y = -0,5x + 8$ II. $y = (\pi - 4)x$ III. $y = 3 + 0,8x$ IV. $y = 5$
Funkcję rosnącą opisuje wzór:
A. IV B. III C. II D. I

10. Funkcja liniowa $f(x) = (k+1)x + k - 2$ jest stała, jeśli:
A. $k = 0$ B. $k = 1$ C. $k = -1$ D. $k = 2$

11. Do wykresu funkcji liniowej należą punkty $P(-8, 6)$ i $R(2, -10)$. Zatem współczynnik kierunkowy ma wartość:
A. 1,6 B. $\frac{5}{8}$ C. –1,6 D. $-\frac{5}{8}$

12. Funkcja liniowa $f(x) = -3x + 12$ przyjmuje wartości ujemne wtedy i tylko wtedy, gdy:
A. $x < 4$ B. $x > 4$ C. $x < -4$ D. $x > -4$

13. Wykres funkcji $f(x) = 0{,}5x - 3$ nie przechodzi przez jedną z ćwiartek układu współrzędnych. Która to ćwiartka?
A. II B. III C. IV D. I

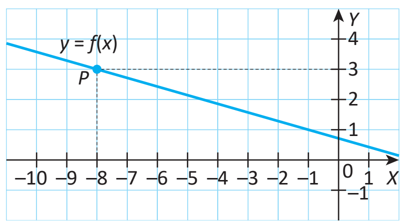
14. Wykres funkcji liniowej $y = ax + b$ przechodzi tylko przez III i IV ćwiartkę układu współrzędnych, jeśli:
A. $a = 0, b < 0$ B. $a = 0, b > 0$ C. $a < 0, b = 0$ D. $a > 0, b = 0$

15. Wykres funkcji liniowej $f(x) = 4x - 5$ jest równoległy do wykresu funkcji $g(x) = (1+m)x + m$ wtedy i tylko wtedy, gdy:
A. $m = 4$ B. $m = -5$ C. $m = 3$ D. $m = 0$

Zadania otwarte

16. Prosta będąca wykresem funkcji liniowej przechodzi przez punkt $A(9, -12)$ i przecina oś OX w punkcie o odciętej równej 5. Oblicz współrzędne punktu, w którym ta prosta przecina oś OY.

17. Na rysunku obok przedstawiony jest wykres funkcji liniowej $f(x) = (k+2) \cdot (x-3)$ i punkt P należący do tego wykresu. Wyznacz współrzędne punktu przecięcia się wykresu z osią OY.



18. Napisz wzór funkcji liniowej, wiedząc, że do jej wykresu należy punkt $A(84, -34)$ oraz że przyjmuje ona wartości dodatnie wtedy i tylko wtedy, gdy $x \in (-\infty, 16)$.

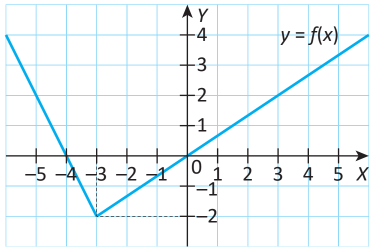
19. Funkcje $f(x) = -\frac{2}{3}x + 3\frac{1}{3}$ oraz $g(x) = (x-a)^2 - a^2$ określone w zbiorze $\boldsymbol{R}$ mają wspólne miejsce zerowe. Oblicz a.

20. Wyznacz zbiór tych wszystkich argumentów, dla których funkcje: $f(x) = -2{,}5x + 7{,}5$ oraz $g(x) = \frac{1}{3}x + 2$ przyjmują jednocześnie wartości nieujemne.

21. Funkcja f jest określona wzorem $f(x)=\begin{cases} x+2, & \text{jeśli } x\in\langle -1,3) \\ -\frac{4}{3}x+10, & \text{jeśli } x\in\langle 3,9\rangle \end{cases}$

a) Sprawdź, czy liczba $16^{\frac{3}{4}}$ należy do dziedziny funkcji f.
b) Oblicz wartość wyrażenia $f(6)-f(0)$.
c) Oblicz miejsca zerowe funkcji f.
d) Sporządź wykres funkcji f.
e) Podaj maksymalne przedziały monotoniczności funkcji f.
f) Podaj najmniejszą oraz największą wartość funkcji f.

22. Wykres funkcji f (rysunek obok) jest sumą dwóch półprostych. Korzystając z danych na rysunku:
a) wyznacz zbiór argumentów, dla których wartości funkcji są nie większe niż 2;
b) podaj zbiór wartości funkcji f;
c) wyznacz wzór funkcji f.



23. Wyznacz wszystkie wartości m, dla których wykres funkcji liniowej określonej wzorem $f(x) = (5-2m)x + 20 - 4m$ przechodzi przez I, II i IV ćwiartkę układu współrzędnych.

24. Wyznacz wszystkie wartości m, dla których funkcja liniowa $f(x) = (1+m)x + 2m$ jest malejąca, a jej wykres przecina oś OY powyżej punktu $P(0, -8)$.

25. Wyznacz wszystkie wartości m tak, aby funkcja $f(x) = (4-m)x + 12$ była rosnąca i jednocześnie miejsce zerowe funkcji $g(x)=2x-\frac{3m+5}{2}$ było liczbą większą od 2.

D 26. Wykaż, że dla dowolnej liczby rzeczywistej a, wartość funkcji liniowej $f(x) = (a-4)x + 4$ w punkcie a jest liczbą nieujemną.

27. Napisz wzór funkcji liniowej, której wykres jest równoległy do wykresu funkcji $f(x) = 1 - 2x$ i przecina oś odciętych w punkcie o współrzędnych $(\sqrt{3},0)$.

28. Wykres funkcji liniowej $f(x) = (3k+2)x - 2k$ jest równoległy do wykresu funkcji liniowej $g(x) = (1+2k)x - 3$.
a) Oblicz k.
b) Dla wyznaczonej wartości k naszkicuj wykresy obu funkcji w jednym układzie współrzędnych.

29. Kolarz znajduje się w odległości 140 km od mety, do której zbliża się ze stałą prędkością. Za 4 godziny przekroczy linię mety. Napisz wzór funkcji opisującej odległość kolarza od mety [km] w zależności od czasu t [h]. Podaj dziedzinę funkcji. Naszkicuj wykres tej funkcji.