

MATEMATYKA

ZBIÓR ZADAŃ MATURALNYCH

Lata 2010 – 2019
Poziom podstawowy

Uzupełnienie 2019

Zadania z sesji poprawkowej z sierpnia 2019 r.

Opracował Ryszard Pagacz



OFICyna
EDUKACYJNA
KRZYSZTOF PAZDRO

Spis treści

Zadania maturalne	3
1. Liczby. Potęgi	3
2. Logarytmy	3
3. Procenty	3
5. Równania. Nierówności	4
6. Funkcja liniowa. Proste	4
7. Funkcja kwadratowa	5
8. Wyrażenia algebraiczne. Funkcje. Wykresy	5
9. Trygonometria	5
10. Ciągi	5
11. Planimetria	6
12. Stereometria	6
13. Statystyka	8
14. Kombinatoryka	8
15. Rachunek prawdopodobieństwa	8
16. Geometria analityczna	8
17. Dowody (geometria)	9
18. Dowody (algebra)	10
Szkice rozwiązań	11
1. Liczby. Potęgi	11
2. Logarytmy	11
3. Procenty	11
5. Równania. Nierówności	12
6. Funkcja liniowa. Proste	12
7. Funkcja kwadratowa	13
8. Wyrażenia algebraiczne. Funkcje. Wykresy	13
9. Trygonometria	13
10. Ciągi	13
11. Planimetria	14
12. Stereometria	15
13. Statystyka	15
14. Kombinatoryka	15
15. Rachunek prawdopodobieństwa	16
16. Geometria analityczna	16
17. Dowody (geometria)	17
18. Dowody (algebra)	17

ZADANIA MATURALNE

1. Liczby. Potęgi

Zadanie 1.58. [matura, sierpień 2019, zadanie 2. (1 pkt)]

Kwadrat liczby $8 - 3\sqrt{7}$ jest równy

- A. $127 + 48\sqrt{7}$ B. $127 - 48\sqrt{7}$ C. $1 - 48\sqrt{7}$ D. $1 + 48\sqrt{7}$

Zadanie 1.59. [matura, sierpień 2019, zadanie 9. (1 pkt)]

Liczbą większą od 5 jest

- A. $\left(\frac{1}{25}\right)^{\frac{1}{2}}$ B. $\left(\frac{1}{25}\right)^{\frac{1}{5}}$ C. $125^{\frac{2}{3}}$ D. $125^{\frac{1}{3}}$

2. Logarytmy

Zadanie 2.31. [matura, sierpień 2019, zadanie 1. (1 pkt)]

Liczba $\log_{\sqrt{7}} 7$ jest równa

- A. 2 B. 7 C. $\sqrt{7}$ D. $\frac{1}{2}$

3. Procenty

Zadanie 3.32. [matura, sierpień 2019, zadanie 3. (1 pkt)]

Jeżeli 75% liczby a jest równe 177 i 59% liczby b jest równe 177, to

- A. $b - a = 26$ B. $b - a = 64$ C. $a - b = 26$ D. $a - b = 64$

5. Równania. Nierówności

Zadanie 5.111. [matura, sierpień 2019, zadanie 4. (1 pkt)]

Równanie $x(5x + 1) = 5x + 1$ ma dokładnie

A. jedno rozwiązanie: $x = 1$.

B. dwa rozwiązania: $x = 1$ i $x = -1$.

C. dwa rozwiązania: $x = -\frac{1}{5}$ i $x = 1$.

D. dwa rozwiązania: $x = \frac{1}{5}$ i $x = -1$.

Zadanie 5.112. [matura, sierpień 2019, zadanie 6. (1 pkt)]

Równanie $\frac{(x-2)(x+4)}{(x-4)^2} = 0$ ma dokładnie

A. jedno rozwiązanie: $x = 2$.

B. jedno rozwiązanie: $x = -2$.

C. dwa rozwiązania: $x = 2$ i $x = -4$.

D. dwa rozwiązania: $x = -2$ i $x = 4$.

Zadanie 5.113. [matura, sierpień 2019, zadanie 26. (2 pkt)]

Rozwiąż równanie $(x^2 - 16)(x^3 - 1) = 0$.

Zadanie 5.114. [matura, sierpień 2019, zadanie 27. (2 pkt)]

Rozwiąż nierówność $2x^2 - 5x + 3 \leq 0$.

6. Funkcja liniowa. Proste

Zadanie 6.86. [matura, sierpień 2019, zadanie 5. (1 pkt)]

Para liczb $x = 3$ i $y = 1$ jest rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} -x + 12y = a^2 \\ 2x + ay = 9 \end{cases}$ dla

A. $a = \frac{7}{3}$

B. $a = -3$

C. $a = 3$

D. $a = -\frac{7}{3}$

Zadanie 6.87. [matura, sierpień 2019, zadanie 10. (1 pkt)]

Punkt $A = (a, 3)$ leży na prostej określonej równaniem $y = \frac{3}{4}x + 6$. Stąd wynika, że

A. $a = -4$

B. $a = 4$

C. $a = \frac{33}{4}$

D. $a = \frac{39}{4}$

Zadanie 6.88. [matura, sierpień 2019, zadanie 17. (1 pkt)]

Proste o równaniach $y = (4m + 1)x - 19$ oraz $y = (5m - 4)x + 20$ są równoległe, gdy

A. $m = 5$

B. $m = -\frac{1}{4}$

C. $m = \frac{5}{4}$

D. $m = -5$

7. Funkcja kwadratowa

Zadanie 7.51. [matura, sierpień 2019, zadanie 7. (1 pkt)]

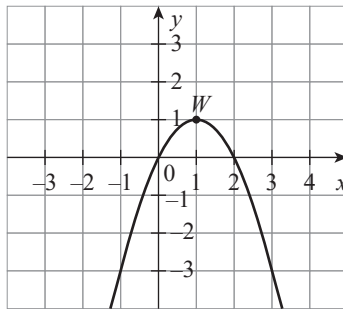
Miejscami zerowymi funkcji kwadratowej f określonej wzorem $f(x) = 9 - (3 - x)^2$ są liczby

- A. 0 oraz 3 B. -6 oraz 6 C. 0 oraz -6 D. 0 oraz 6

8. Wyrażenia algebraiczne. Funkcje. Wykresy

Zadanie 8.58. [matura, sierpień 2019, zadanie 8. (1 pkt)]

Na rysunku przedstawiono fragment paraboli będącej wykresem funkcji kwadratowej g . Wierzchołkiem tej paraboli jest punkt $W = (1, 1)$.



Zbiorem wartości funkcji g jest przedział

- A. $(-\infty, 0)$ B. $\langle 0, 2 \rangle$ C. $\langle 1, +\infty$) D. $(-\infty, 1)$

9. Trygonometria

Zadanie 9.58. [matura, sierpień 2019, zadanie 13. (1 pkt)]

Cosinus kąta ostrego α jest równy $\frac{12}{13}$. Wtedy

- A. $\sin \alpha = \frac{13}{12}$ B. $\sin \alpha = \frac{1}{13}$ C. $\sin \alpha = \frac{5}{13}$ D. $\sin \alpha = \frac{25}{169}$

10. Ciągi

Zadanie 10.91. [matura, sierpień 2019, zadanie 11. (1 pkt)]

W ciągu arytmetycznym (a_n) , określonym dla $n \geq 1$, dane są dwa wyrazy: $a_1 = -11$ i $a_9 = 5$. Suma dziewięciu początkowych wyrazów tego ciągu jest równa

- A. -24 B. -27 C. -16 D. -18

Zadanie 10.92. [matura, sierpień 2019, zadanie 12. (1 pkt)]

Wszystkie wyrazy ciągu geometrycznego (a_n) , określonego dla $n \geq 1$, są liczbami dodatnimi. Drugi wyraz tego ciągu jest równy 162, a piąty wyraz jest równy 48. Oznacza to, że iloraz tego ciągu jest równy

- A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{2}$

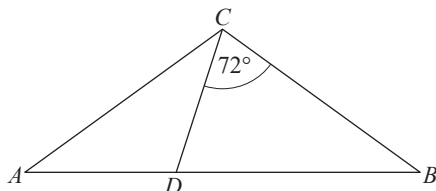
Zadanie 10.93. [matura, sierpień 2019, zadanie 32. (4 pkt)]

W ciągu arytmetycznym $(a_1, a_2, \dots, a_{39}, a_{40})$ suma wyrazów tego ciągu o numerach parzystych jest równa 1340, a suma wyrazów ciągu o numerach nieparzystych jest równa 1400. Wyznacz ostatni wyraz tego ciągu arytmetycznego.

11. Planimetria

Zadanie 11.117. [matura, sierpień 2019, zadanie 14. (1 pkt)]

Dany jest trójkąt równoramienny ABC , w którym $|AC| = |BC|$. Na podstawie AB tego leży punkt D taki, że $|AD| = |CD|$, $|BC| = |BD|$ oraz $\sphericalangle BCD = 72^\circ$ (zobacz rysunek).



Wynika stąd, że kąt ACD ma miarę

- A. 38° B. 36° C. 42° D. 40°

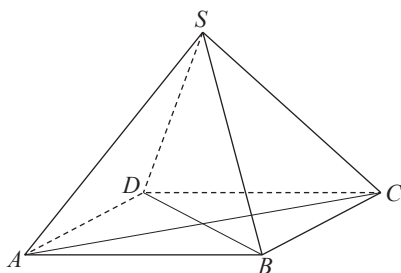
Zadanie 11.118. [matura, sierpień 2019, zadanie 33. (4 pkt)]

Środek okręgu leży w odległości 10 cm od cięciwy tego okręgu. Długość tej cięciwy jest o 22 cm większa od promienia tego okręgu. Oblicz promień tego okręgu.

12. Stereometria

Zadanie 12.111. [matura, sierpień 2019, zadanie 16. (1 pkt)]

Podstawą ostrosłupa prawidłowego czworokątnego $ABCDS$ jest kwadrat $ABCD$ (zobacz rysunek). Wszystkie ściany boczne tego ostrosłupa są trójkątami równobocznymi.



Miara kąta SAC jest równa

A. 60°

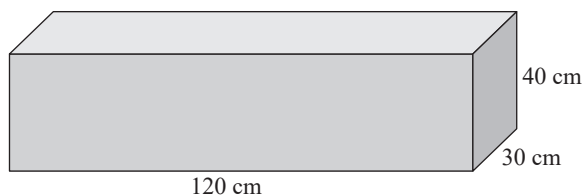
B. 45°

C. 90°

D. 75°

Zadanie 12.112. [matura, sierpień 2019, zadanie 21. (1 pkt)]

Dany jest prostopadłościan o wymiarach $30\text{ cm} \times 40\text{ cm} \times 120\text{ cm}$ (zobacz rysunek), a ponadto dane są cztery odcinki a, b, c, d o długościach – odpowiednio – $119\text{ cm}, 121\text{ cm}, 129\text{ cm}$ i 131 cm .



Przekątna tego prostopadłościanu jest dłuższa

A. tylko od odcinka a .

B. tylko od odcinka a i b .

C. tylko od odcinków a, b i c .

D. od wszystkich czterech danych odcinków.

Zadanie 12.113. [matura, sierpień 2019, zadanie 22. (1 pkt)]

Pole powierzchni całkowitej pewnego stożka jest 3 razy większe od pola powierzchni pewnej kuli. Promień tej kuli jest równy 2 i jest taki sam jak promień podstawy tego stożka. Tworząca tego stożka ma długość równą

A. 12

B. 11

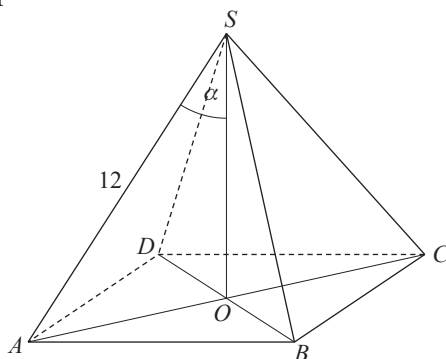
C. 24

D. 22

Zadanie 12.114. [matura, sierpień 2019, zadanie 34. (5 pkt)]

Długość krawędzi bocznej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego $ABCDS$ jest równa 12 (zobacz rysunek). Krawędź boczna tworzy z wysokością ostrosłupa kąt α taki, że $\text{tg } \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

Oblicz objętość tego ostrosłupa.



13. Statystyka

Zadanie 13.29. [matura, sierpień 2019, zadanie 23. (1 pkt)]

Średnia arytmetyczna dziesięciu liczb naturalnych 3, 10, 5, x , x , x , x , 12, 19, 7 jest równa 12. Mediana tych liczb jest równa

- A. 14 B. 12 C. 16 D. x

14. Kombinatoryka

Zadanie 14.20. [matura, sierpień 2019, zadanie 24. (1 pkt)]

Wszystkich liczb naturalnych czterocyfrowych parzystych, w których występują wyłącznie cyfry 1, 2, 3 jest

- A. 54 B. 81 C. 8 D. 27

15. Rachunek prawdopodobieństwa

Zadanie 15.53. [matura, sierpień 2019, zadanie 25. (1 pkt)]

W grupie 60 osób (kobiet i mężczyzn) jest 35 kobiet. Z tej grupy losujemy jedną osobę. Prawdopodobieństwo wylosowania każdej osoby jest takie samo. Prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że wylosujemy mężczyznę, jest równe

- A. $\frac{1}{60}$ B. $\frac{1}{25}$ C. $\frac{7}{12}$ D. $\frac{5}{12}$

Zadanie 15.54. [matura, sierpień 2019, zadanie 30. (2 pkt)]

Ze zbioru wszystkich liczb naturalnych dwucyfrowych losujemy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na tym, że wylosowana liczba ma w zapisie dziesiętnym cyfrę dziesiątek, która należy do zbioru $\{1, 3, 5, 7, 9\}$, i jednocześnie cyfrę jedności, która należy do zbioru $\{0, 2, 4, 6, 8\}$.

16. Geometria analityczna

Zadanie 16.68. [matura, sierpień 2019, zadanie 15. (1 pkt)]

Okrąg, którego środkiem jest punkt $S = (a, 5)$, jest styczny do osi Oy i do prostej o równaniu $y = 2$. Promień tego okręgu jest równy

- A. 3 B. 5 C. 2 D. 4

Zadanie 16.69. [matura, sierpień 2019, zadanie 18. (1 pkt)]

W układzie współrzędnych punkt $S = (40, 40)$ jest środkiem odcinka KL , którego jednym z końców jest punkt $K = (0, 8)$. Zatem

- A. $L = (20, 24)$ B. $L = (-80, -72)$ C. $L = (-40, -24)$ D. $L = (80, 72)$

Zadanie 16.70. [matura, sierpień 2019, zadanie 19. (1 pkt)]

Punkt $P = (-6, -8)$, przekształcono najpierw w symetrii względem osi Ox , a potem w symetrii względem osi Oy . W wyniku tych przekształceń otrzymano punkt Q . Zatem

- A. $Q = (6, 8)$ B. $Q = (-6, -8)$ C. $Q = (8, 6)$ D. $Q = (-8, -6)$

Zadanie 16.71. [matura, sierpień 2019, zadanie 20. (1 pkt)]

W układzie współrzędnych na płaszczyźnie danych jest 5 punktów: $A = (1, 4)$, $B = (-5, -1)$, $C = (-5, 3)$, $D = (6, -4)$, $P = (-30, -76)$. Punkt P należy do tej samej ćwiartki układu współrzędnych co punkt

- A. A B. B C. C D. D

Zadanie 16.72. [matura, sierpień 2019, zadanie 31. (2 pkt)]

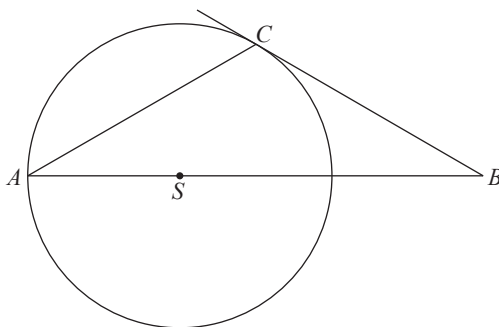
Przekątne rombu $ABCD$ przecinają się w punkcie $S = \left(-\frac{21}{2}, -1\right)$. Punkty A i C leżą na prostej

o równaniu $y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{2}$. Wyznacz równanie prostej BD .

17. Dowody (geometria)

Zadanie 17.25. [matura, sierpień 2019, zadanie 29. (2 pkt)]

Wierzchołki A i C trójkąta ABC leżą na okręgu o promieniu r , a środek S tego okręgu leży na boku AB trójkąta (zobacz rysunek). Prosta BC jest styczna do tego okręgu w punkcie C , a ponadto $|AC| = r\sqrt{3}$. Wykaż, że kąt ACB ma miarę 120° .



18. Dowody (algebra)

Zadanie 18.30. [matura, sierpień 2019, zadanie 28. (2 pkt)]

Wykaż, że dla każdej liczby dodatniej x prawdziwa jest nierówność $x + \frac{1-x}{x} \geq 1$.

SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. Liczby. Potęgi

Zadania zamknięte

Zad.	Rozwiązanie	Odp.
1.58	$(8 - 3\sqrt{7})^2 = 64 - 48\sqrt{7} + 63 = 127 - 48\sqrt{7}$	B
1.59	$125^{\frac{2}{3}} = (\sqrt[3]{125})^2 = 5^2 = 25 > 5$	C

2. Logarytmy

Zadania zamknięte

Zad.	Rozwiązanie	Odp.
2.31	$\log_{\sqrt{7}} 7 = 2$	A

3. Procenty

Zadania zamknięte

Zad.	Rozwiązanie	Odp.
3.32	$a = \frac{177}{0,75} = 236, b = \frac{177}{0,59} = 300, b - a = 300 - 236 = 64$	B

5. Równania. Nierówności

Zadania zamknięte

Zad.	Rozwiązanie	Odp.
5.111	$x(5x + 1) = 5x + 1 \Leftrightarrow x = 1$ lub $5x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ lub $x = -\frac{1}{5}$	C
5.112	$\frac{(x-2)(x+4)}{(x-4)^2} = 0 \Leftrightarrow (x = 2 \text{ lub } x = -4) \text{ i } x \neq 4$	C

Zadania otwarte

5.113. $(x^2 - 16)(x^3 - 1) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 16$ lub $x^3 = 1 \Leftrightarrow x = 4$ lub $x = -4$ lub $x = 1$.
Odp. $x \in \{-4, 1, 4\}$.

5.114. $2x^2 - 5x + 3 \leq 0, \Delta = 1, x_1 = \frac{5-1}{4} = 1, x_2 = \frac{5+1}{4} = \frac{3}{2}$.

Odp. $x \in \left\langle 1; \frac{3}{2} \right\rangle$.

6. Funkcja liniowa. Proste

Zadania zamknięte

Zad.	Rozwiązanie	Odp.
6.86	$\begin{cases} -3 + 12 \cdot 1 = a^2 \\ 2 \cdot 3 + a \cdot 1 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 9 \\ a = 3 \end{cases}$	C
6.87	$3 = \frac{3}{4}a + 6 \Leftrightarrow a = -4$	A
6.88	$4m + 1 = 5m - 4 \Leftrightarrow m = 5$	A

7. Funkcja kwadratowa

Zadania zamknięte

Zad.	Rozwiązanie	Odp.
7.51	$9 - (3 - x)^2 = 0 \Leftrightarrow (3 - x)^2 = 9 \Leftrightarrow x = 0 \text{ lub } x = 6$	D

8. Wyrażenia algebraiczne. Funkcje. Wykresy

Zadania zamknięte

Zad.	Rozwiązanie	Odp.
8.58	$(-\infty, 1)$	D

9. Trygonometria

Zadania zamknięte

Zad.	Rozwiązanie	Odp.
9.58	$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{144}{169}} = \sqrt{\frac{25}{169}} = \frac{5}{13}$	C

10. Ciągi

Zadania zamknięte

Zad.	Rozwiązanie	Odp.
10.91	$S_9 = \frac{a_1 + a_9}{2} \cdot 9 = -3 \cdot 9 = -27$	B
10.92	$q^3 = \frac{a_1 q^4}{a_1 q} = \frac{a_5}{a_2} = \frac{48}{162} = \frac{8}{27} = \left(\frac{2}{3}\right)^3$	A

Zadania otwarte

$$10.93 \quad \begin{cases} \frac{a_1 + a_{39}}{2} \cdot 20 = 1400 \\ \frac{a_2 + a_{40}}{2} \cdot 20 = 1340 \end{cases} \quad \begin{cases} 2a_1 + 38r = 140 \\ 2a_1 + 40r = 134 \end{cases} \quad \begin{cases} r = -3 \\ a_1 = 127 \end{cases}$$

$$\text{Odp. } a_{40} = 127 + 39 \cdot (-3) = 10.$$

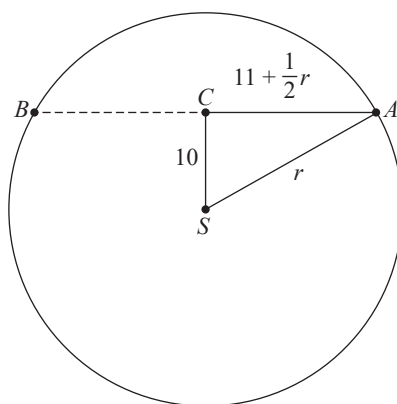
11. Planimetria

Zadania zamknięte

Zad.	Rozwiązanie	Odp.
11.117	$ \sphericalangle CDB = 72^\circ, \sphericalangle ADC = 108^\circ, \sphericalangle ACD = 36^\circ$	B

Zadania otwarte

11.118.



Wykorzystując twierdzenie Pitagorasa dla trójkąt SAC (patrz rysunek) otrzymujemy:

$$r^2 = 100 + 121 + 11r + \frac{1}{4}r^2$$

$$-\frac{3}{4}r^2 + 11r + 221 = 0.$$

$$\Delta = 784, r_1 = \frac{-11 + 28}{-\frac{3}{2}} < 0, r_2 = \frac{-11 - 28}{-\frac{3}{2}} = 26.$$

Odp. $r = 26$.

12. Stereometria

Zadania zamknięte

Zad.	Rozwiązanie	Odp.
12.111	Trójkąty ABC i ACS są przystające. Stąd $ \sphericalangle SAC = 45^\circ$	B
12.112	$d = \sqrt{120^2 + 30^2 + 40^2} = \sqrt{16900} = 130$	C
12.113	$4\pi + 2\pi l = 3 \cdot 16\pi, l = 22$	D

Zadania otwarte

12.114. $|AO| = \frac{2}{\sqrt{5}}|OS|, |OS|^2 + \frac{4}{5}|OS|^2 = 144, \frac{9}{5}|OS|^2 = 144, |OS| = 4\sqrt{5}, |AO| = 8.$

Odp. $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 16 \cdot 4\sqrt{5} = \frac{512}{3}\sqrt{5}.$

13. Statystyka

Zadania zamknięte

Zad.	Rozwiązanie	Odp.
13.29	$\frac{4x + 56}{10} = 12, x = 16, M = \frac{12 + 16}{2} = 14$	A

14. Kombinatoryka

Zad.	Rozwiązanie						Odp.
14.20	Cyfra	c_t	c_s	c_d	c_j	Ilość liczb	D
	Ilość możliwości	3	3	3	1	$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 1 = 27$	

15. Rachunek prawdopodobieństwa

Zadania zamknięte

Zad.	Rozwiązanie	Odp.
15.53	$ \Omega = 60, A = 25, P(A) = \frac{25}{60} = \frac{5}{12}$	D

Zadania otwarte

15.54. $|\Omega| = 90$.

Cyfra	c_d	c_j	Ilość liczb
Ilość możliwości	5	5	$5 \cdot 5 = 25$

Odp. $P(A) = \frac{25}{90} = \frac{5}{18}$.

16. Geometria analityczna

Zadania zamknięte

Zad.	Rozwiązanie	Odp.
16.68	$r = 5 - 2 = 3$	A
16.69	$\frac{x+0}{2} = 40, \frac{y+8}{2} = 40, L = (80, 72)$	D
16.70	$P = (-6, -8) \rightarrow P' = (-6, 8) \rightarrow Q = (6, 8)$	A
16.71	$P = (-30, -76), x < 0$ i $y < 0$.	B

Zadania otwarte

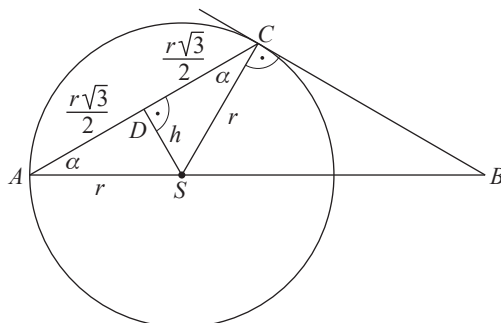
16.72. $BD \perp AC \Rightarrow a = -3$.

Odp. $y = -3 \left(x + \frac{21}{2} \right) - 1 = -3x - \frac{65}{2}$.

17. Dowody (geometria)

Zadania otwarte

17.25



Trójkąt ACS jest równoramienny.

Trójkąt prostokątny DCS jest połową trójkąta równobocznego.

Zatem $|\sphericalangle DCS| = 30^\circ$.

Stąd $|\sphericalangle ACB| = 120^\circ$.

18. Dowody (algebra)

Zadania otwarte

18.30 Założenie $x > 0$.

$$x + \frac{1-x}{x} \geq 1 \Leftrightarrow x^2 + 1 - x \geq x \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 \geq 0.$$

Ostatnia nierówność jest prawdziwa, bo $a^2 \geq 0$, dla $a \in \mathbf{R}$.