MATEMATYKA

Porady i wskazówki

których nie ma w tablicach maturalnych

z przykładami ich zastosowania

Tomasz Grębski

Spis treści

Wstęp

Podczas nauki matematyki uczniowie często korzystają z tzw. tablic maturalnych, czyli „Wybranych wzorów matematycznych" opracowanych przez Centralną Komisję Egzaminacyjną. Wielu uczniów, a w szczególności maturzystów, podczas wprowadzania różnych zagadnień matematycznych pyta mnie: *czy to jest w tablicach maturalnych?* Jeśli okazuje się, że jest, to widzę w ich oczach spokój, ale jeśli odpowiadam, że nie ma, to widzę pewne przerażenie, szczególnie kiedy podkreślam, że to bardzo ważne zagadnienie maturalne. Wtedy uczniowie znowu pytają, czy mogę im podać te ważne rzeczy, których nie ma w tablicach maturalnych, a które są szczególnie ważne i często bywają na maturze.

Książka *Porady i wskazówki, których nie ma w tablicach maturalnych* jest właśnie odpowiedzią na takie pytanie, kierowaną zwłaszcza do maturzystów, aby mogli lepiej przygotować się do egzaminu. Powstała ona na podstawie mojego wieloletniego doświadczenia w nauczaniu matematyki, jak również wieloletniego doświadczenia w sprawdzaniu prac maturalnych (jako egzaminatora i weryfikatora). Książka zawiera bardzo przydatne porady i wskazówki – i co ważne – wraz z przykładami ich zastosowania. Każdy maturzysta powinien je znać i umieć zastosować, jednak wiemy (myślę, że zgodzą się tu ze mną inni nauczyciele), że spora część uczniów ich nie pamięta, a nawet niektórych nie zna. Wskazówki podzielone są tematycznie, aby łatwiej było znaleźć potrzebą poradę i przykład.

A zatem zachęcam do poczytania *Porad i wskazówek...*, życzę przyjemnej i owocnej pracy, a przede wszystkim powodzenia na maturze!

Tomasz Grębski

Symbole używane w książce

Symbol	Znaczenie symbolu
$p \vee q$	alternatywa (p lub q)
$p \wedge q$	koniunkcja (p i q)
$p \Rightarrow q$	implikacja (jeśli p, to q)
$p \Leftrightarrow q$	równoważność (p zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi q)
$a \in A$	należenie elementu do zbioru (a należy do A)
$A \cup B$	suma zbiorów A, B
$\boldsymbol{R}$	zbiór liczb rzeczywistych
$\boldsymbol{N}$	zbiór liczb naturalnych
$\boldsymbol{C}$	zbiór liczb całkowitych
$\emptyset$	zbiór pusty
D	dziedzina
Δ	wyróżnik trójmianu kwadratowego – „delta”
$\lim\limits_{n \to \infty} a_n$	granica ciągu (a_n)
$n!$	silnia liczby n (n silnia)

I. Liczby rzeczywiste, zbiory, wyrażenia algebraiczne

WSKAZÓWKA 1.

Bardzo ważny wzór z wykorzystaniem wartości bezwzględnej: $\sqrt{x^2} = |x|$.

Wzoru tego nie wolno mylić ze wzorem: $\left(\sqrt{x}\right)^2 = x$.

Przykład 1.

Rozwiąż równanie: $x^2 - 9 = 0$.

Rozwiązanie:

$x^2 - 9 = 0$

$x^2 = 9$ pierwiastkujemy stronami (obie strony są nieujemne)

$\sqrt{x^2} = \sqrt{9}$

$|x| = 3$

$x \in \{-3, 3\}$.

Przykład 2.

Uprość wyrażenie: $\sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$.

Rozwiązanie:

$$\sqrt{7 - 4\sqrt{3}} = \sqrt{\left(2 - \sqrt{3}\right)^2} = \left|2 - \sqrt{3}\right| = 2 - \sqrt{3}$$

Wyjaśnienie, jak „zobaczyć” wzór skróconego mnożenia:

$7 - 4\sqrt{3} = a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$

$2ab = 4\sqrt{3}$ i $a^2 + b^2 = 7$

$ab = 2\sqrt{3} \Rightarrow a = 2,\ b = \sqrt{3}$

Sprawdzamy, czy $a = 2,\ b = \sqrt{3}$ spełniają równanie: $a^2 + b^2 = 7$. Okazuje się, że spełniają. Zatem $7 - 4\sqrt{3} = \left(2 - \sqrt{3}\right)^2$.

Przykład 3.

Rozwiąż równanie: $\sqrt{x + 1} = 3$.

Rozwiązanie:

$\sqrt{x + 1} = 3$

D: $x + 1 \geq 0 \Rightarrow x \in \langle -1, +\infty)$

$\sqrt{x + 1} = 3$ podnosimy obustronnie do kwadratu (obie strony są nieujemne)

$\left(\sqrt{x + 1}\right)^2 = 3^2$

$x + 1 = 9$

$x = 8$ i $x \in \langle -1, +\infty)$

Zatem $x = 8$.

WSKAZÓWKA 2.

Wiemy, że odejmowanie nie jest przemienne, ale gdy odejmowanie jest podniesione do kwadratu lub gdy jest w wartości bezwzględnej, to jest przemienne.

$(a-b)^2=(b-a)^2$

$|a-b|=|b-a|$

Często spotykamy się również z podniesieniem do kwadratu wyrażenia typu: $(-a-b)^2$. Który wzór skróconego mnożenia zastosować? Oto wskazówka:

$(-a-b)^2=(a+b)^2$

Przykład 1.

$\frac{(x-2)^2}{(2-x)^2}=1$

Przykład 2.

$\frac{|x-9|}{|9-x|}=1$

Przykład 3.

$(-x-3)^2=[-(x+3)]^2=(x+3)^2$

WSKAZÓWKA 3.

Błąd bezwzględny i względny.

Oznaczmy:

r – wielkość rzeczywista,

p – wielkość przybliżona.

Błąd bezwzględny: $BB=|r-p|$

Błąd względny: $BW=\frac{|r-p|}{|r|}$

Błąd względny procentowy: $BW\%=\frac{|r-p|}{|r|}\cdot 100\%$

Przykład 1.

Rzeczywista wysokość drzewa wynosi 5,6 m. Jacek oszacował wysokość drzewa i otrzymał wynik 5,4 m. Oblicz błąd bezwzględny, błąd względny oraz błąd względny procentowy pomiaru Jacka.

Rozwiązanie:

Oznaczmy:

r = 5,6 m

p = 5,4 m

$BB=|r-p|=|5{,}6-5{,}4|=0{,}2$ m

$$BW = \frac{|r-p|}{|r|} = \frac{|5{,}6-5{,}4|}{|5{,}6|} = 0{,}0357$$

$$BW\% = \frac{|r-p|}{|r|} \cdot 100\% = \frac{|5{,}6-5{,}4|}{|5{,}6|} \cdot 100\% = 0{,}0357 \cdot 100\% = 3{,}57\%.$$

Przykład 2.

Wyznacz liczbę x jeżeli wiadomo, że przybliżenie z nadmiarem tej liczby wynosi 15,2, a błąd względny tego przybliżenia jest równy 0,02.

Rozwiązanie:

Oznaczmy:

$r = x$

$p = 15{,}2$

BW = 0,02

Podstawiamy do wzoru:

$$0{,}02 = \frac{|x-15{,}2|}{|x|} \quad /\cdot |x|$$

$$|0{,}02x| = |x - 15{,}2|$$

Korzystamy z własności wartości bezwzględnej: jeśli $|a| = |b|$, to $a = b$ lub $a = -b$.

$0{,}02x = x - 15{,}2$ lub $0{,}02x = -x + 15{,}2$

$x = 15{,}51$ lub $x = 14{,}9$

Ponieważ przybliżenie było z nadmiarem, to szukana liczba $x = 14{,}9$.

WSKAZÓWKA 4.

Nierówności z wartością bezwzględną:

$$|a + b| \le |a| + |b|$$

$$|a - b| \le |a| + |b|$$

$$\big||a| - |b|\big| \le |a + b|$$

$$\big||a| - |b|\big| \le |a - b|$$

WSKAZÓWKA 5.

Zależności między średnimi w matematyce (nierówność Cauchy'ego):

Dla dowolnych liczb dodatnich $a_1, a_2, \dots, a_n$ zachodzą nierówności:

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}} \ge \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \ge \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} \ge \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}$$

$\textit{średnia kwadratowa} \ge \textit{średnia arytmetyczna} \ge \textit{średnia geometryczna} \ge \textit{średnia harmoniczna}$

(równość zachodzi wtedy, gdy $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$)

Przykład 1.

Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich *a, b, c* zachodzi nierówność

$$8abc \le (a+b)(b+c)(c+a).$$

Rozwiązanie:

Korzystamy z zależności między średnią arytmetyczną a średnią geometryczną dla każdej pary liczb:

$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$

$\sqrt{bc} \leq \frac{b+c}{2}$

$\sqrt{ac} \leq \frac{a+c}{2}$

Mnożymy nierówności przez 2:

$2\sqrt{ab} \leq a+b$

$2\sqrt{bc} \leq b+c$

$2\sqrt{ac} \leq a+c$

Mnożymy nierówności stronami:

$8\sqrt{a^2b^2c^2} \leq (a+b)(b+c)(c+a)$

Liczby *a, b, c* są dodatnie, zatem

$8abc \leq (a+b)(b+c)(c+a).$

Przykład 2.

Suma długości wszystkich krawędzi prostopadłościanu wynosi 24. Wyznacz prostopadłościan (długości jego krawędzi) o największej objętości.

Rozwiązanie:

Niech *a, b, c* będą długościami krawędzi prostopadłościanu, zaś przez *V* oznaczmy jego objętość. Mamy zatem:

$4(a+b+c) = 24$

$a+b+c = 6$

Wiemy, że $V = abc$

Wykorzystajmy teraz zależność między średnią arytmetyczną a średnią geometryczną:

$\sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3}$

$$abc \leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3$$

$$V \leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 = \left(\frac{6}{3}\right)^3 = 8$$

Równość ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy $a = b = c = 2$. Zatem największą objętość spośród prostopadłościanów z zadania ma sześcian o krawędzi długości 2.

WSKAZÓWKA 6.

Średnia prędkość – jak ją obliczać?

Uwaga: Nie można liczyć średniej prędkości ze średniej arytmetycznej.

Średnia prędkość to stosunek całej drogi do łącznego czasu jej przebycia.

Przykład 1.
Samochód jechał z miasta *A* do miasta *B* z prędkością 50 km/h, zaś z miasta *B* do miasta *A* z prędkością 40 km/h. Oblicz średnią prędkość samochodu dla całej trasy.
Rozwiązanie:
Korzystamy ze wzoru: $V = \frac{s}{t}$
Prędkość średnia to stosunek całej drogi do całego czasu, czyli $V_{śr.} = \frac{2s}{t_1+t_2}$, gdzie *s* oznacza drogę z miasta *A* do miasta *B*, zaś t_1 i t_2 to czas przejazdu, odpowiednio, z miasta *A* do miasta *B* oraz z *B* do *A*.

$$V_1 = \frac{s}{t_1} \Rightarrow t_1 = \frac{s}{V_1} = \frac{s}{50}$$
$$V_2 = \frac{s}{t_2} \Rightarrow t_2 = \frac{s}{V_2} = \frac{s}{40}$$

Zatem

$$V_{śr.} = \frac{2s}{\frac{s}{50}+\frac{s}{40}} = \frac{2s}{s\left(\frac{1}{50}+\frac{1}{40}\right)} = \frac{2}{\frac{1}{50}+\frac{1}{40}} = 44\frac{4}{9}\left[\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}\right]$$

Można zauważyć, że jest to średnia harmoniczna.

WSKAZÓWKA 7.

Trochę z teorii liczb – czyli, jak poprawnie zapisywać liczby.
Liczba parzysta: $x = 2n$
Liczba nieparzysta: $x = 2n + 1$
Liczba podzielna przez 5: $x = 5n$
Liczba, która przy dzieleniu przez 7 daje resztę 3: $x = 7n + 3$
Dwie kolejne liczby parzyste: $2n$, $2n + 2$
Dwie kolejne liczby nieparzyste: $2n + 1$, $2n + 3$
(liczba *n* jest liczbą całkowitą)

Przykład 1. *(Źródło: CKE, Matura czerwiec 2012 (PP), zad. 29)*
Uzasadnij, że suma kwadratów trzech kolejnych liczb całkowitych przy dzieleniu przez 3 daje resztę 2.
Rozwiązanie:
n – liczba całkowita

$$n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 = [po\ obliczeniach] = 3n^2 + 6n + 5 =$$
$$= 3n^2 + 6n + 3 + 2 = 3(n^2 + 2n + 1) + 2 = 3k + 2, \qquad \text{gdzie } k \in C$$

c.n.d.

Przykład 2. *(Źródło: CKE, Matura maj 2014 (PP), zad. 28)*
Udowodnij, że każda liczba całkowita *k*, która przy dzieleniu przez 7 daje resztę 2, ma tę własność, że reszta z dzielenia liczby $3k^2$ przez 7 jest równa 5.

<u>*Rozwiązanie*</u>:

$k = 7n + 2$ – liczba całkowita, która przy dzieleniu przez 7 daje resztę 2, gdzie $n \in C$

$3k^2 = 3(7n + 2)^2 = 3(49n^2 + 28n + 4) =$

$= 147n^2 + 84n + 12 = 147n^2 + 84n + 7 + 5$

$= 7(21n^2 + 12n + 1) + 5 = 7m + 5,$ gdzie $m \in C$

c.n.d.

WSKAZÓWKA 8.

Jak szybko obliczać zmiany procentowe?

Przykład 1.

Cena pewnego towaru zmieniała się następująco: najpierw wzrosła o 10%, potem zmalała o 20%, a następnie wzrosła o 5%. Jak zmieniła się ostatecznie cena tego towaru?

<u>*Rozwiązanie:*</u>

Możemy to szybko obliczyć w następujący sposób:

x – cena początkowa

$110\% \cdot 80\% \cdot 105\% x = 1{,}1 \cdot 0{,}8 \cdot 1{,}05x = 0{,}924x = 92{,}4\% x$

$100\% - 92{,}4\% = 7{,}6\%$

A zatem cena zmalała o 7,6%.

WSKAZÓWKA 9.

Jakim procentem liczby *a* jest liczba *b*?

$\frac{b}{a} \cdot 100\%$

Przykład 1.

Jakim procentem liczby 60 jest liczba 25?

<u>*Rozwiązanie:*</u>

$\frac{25}{60} \cdot 100\% = 41\frac{2}{3}\%$

WSKAZÓWKA 10.

O ile procent więcej, o ile procent mniej…

Jeśli liczba *a* jest większa od liczby *b* o 10%, to <u>nieprawdą jest</u>, że liczba *b* jest mniejsza od liczby *a* o 10%.

Przykład.

Zuzia ma 50 pocztówek, a Kasia 75. O ile procent więcej pocztówek ma Kasia niż Zuzia? O ile procent mniej pocztówek ma Zuzia niż Kasia?

<u>*Rozwiązanie:*</u>

<u>I sposób</u> – zadanie rozwiążemy za pomocą proporcji.

Najpierw zajmiemy się pierwszym pytaniem: O ile procent więcej pocztówek ma Kasia niż Zuzia?
W tym przypadku liczba pocztówek Zuzi stanowi 100%.

50 – 100%

75 – x

$$x = \frac{75 \cdot 100\%}{50} = 150\%$$

$$150\% - 100\% = 50\%$$

Odp. Kasia ma o 50% więcej pocztówek niż Zuzia.

Teraz zajmiemy się drugim pytaniem: O ile procent mniej pocztówek ma Zuzia niż Kasia?
W tym przypadku liczba pocztówek Kasi stanowi 100%.

75 – 100%

50 – x

$$x = \frac{50 \cdot 100\%}{75} = 66\frac{2}{3}\%$$

$$100\% - 66\frac{2}{3}\% = 33\frac{1}{3}\%$$

Odp. Zuzia ma o $33\frac{1}{3}\%$ mniej pocztówek niż Kasia.

<u>II sposób</u> – wykorzystamy wskazówkę 9.
Najpierw obliczamy różnicę między liczbą pocztówek.

75 – 50 = 25

Teraz zajmiemy się pierwszym pytaniem: O ile procent więcej pocztówek ma Kasia niż Zuzia?
W tym przypadku należy obliczyć, jakim procentem liczby 50 jest obliczona różnica 25

$$\frac{25}{50} \cdot 100\% = 50\%$$

Odp. Kasia ma o 50% więcej pocztówek niż Zuzia.

Zajmijmy się teraz drugim pytaniem: O ile procent mniej pocztówek ma Zuzia niż Kasia?
W tym przypadku należy obliczyć, jakim procentem liczby 75 jest obliczona różnica 25

$$\frac{25}{75} \cdot 100\% = 33\frac{1}{3}\%$$

Odp. Zuzia ma o $33\frac{1}{3}\%$ mniej pocztówek niż Kasia.

WSKAZÓWKA 11.

Procent składany – najczęściej związany z lokatami bankowymi.
Wprowadźmy oznaczenia:

K – kapitał końcowy,

K_o – kapitał początkowy,

p – roczna stopa procentowa,

n – liczba lat trwania lokaty,
m – liczba okresów kapitalizacji w ciągu roku.

Wzór bez podatku: $K = K_o \cdot \left(1 + \frac{p}{100 \cdot m}\right)^{m \cdot n}$

Wzór z podatkiem 20%: $K = K_o \cdot \left(1 + 0{,}8 \cdot \frac{p}{100 \cdot m}\right)^{m \cdot n}$

Przykład.
Wpłacamy 10 000 zł na dwuletnią lokatę do banku. Roczna stopa procentowa wynosi 4%. Oblicz kapitał po zakończeniu lokaty w przypadku, gdy:
a) odsetki kapitalizowane są co roku,
b) odsetki kapitalizowane są co pół roku,
c) odsetki kapitalizowane są co kwartał.
Uwzględnij 20-procentowy podatek od odsetek.
Rozwiązanie:
a)
K – kapitał końcowy
K_o = 10 000 zł
$p = 4$, $n = 2$, $m = 1$

$K = 10\,000 \cdot \left(1 + 0{,}8 \cdot \frac{4}{100 \cdot 1}\right)^{1 \cdot 2} = 10\,650{,}24$ zł

b)
K – kapitał końcowy
K_o = 10 000 zł
$p = 4$, $n = 2$, $m = 2$

$K = 10\,000 \cdot \left(1 + 0{,}8 \cdot \frac{4}{100 \cdot 2}\right)^{2 \cdot 2} = 10\,655{,}52$ zł

c)
K – kapitał końcowy
K_o = 10 000 zł
$p = 4$, $n = 2$, $m = 4$

$K = 10\,000 \cdot \left(1 + 0{,}8 \cdot \frac{4}{100 \cdot 4}\right)^{4 \cdot 2} = 10\,658{,}21$ zł

WSKAZÓWKA 12.

Rozkład na ułamki proste to przekształcenie ułamka na sumę ułamków o liczniku równym 1.

Przykład.
Przedstaw wyrażenie $W(x) = \frac{2x-5}{x^2-5x-6}$ w postaci sumy ułamków prostych.
Rozwiązanie:
I sposób:

$W(x) = \frac{2x-5}{x^2-5x-6} = \frac{2x-5}{(x-6)(x+1)} = \frac{A}{x-6} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1)+B(x-6)}{(x-6)(x+1)} =$

$= \frac{Ax+A+Bx-6B}{(x-6)(x+1)} = \frac{(A+B)x+A-6B}{(x-6)(x+1)}$

Porównujemy teraz liczniki

$2x - 5 = (A + B)x + A - 6B$

$\begin{cases} A + B = 2 \\ A - 6B = -5 \end{cases}$

Po rozwiązaniu mamy: $A = 1, B = 1$

Zatem

$$W(x) = \frac{1}{x-6} + \frac{1}{x+1}.$$

<u>II sposób:</u>

$$W(x) = \frac{2x-5}{x^2-5x-6} = \frac{2x-5}{(x-6)(x+1)} =$$

Wyrażenie z licznika rozpisujemy w następujący sposób:

$2x - 5 = (x - 6) + (x + 1)$, mamy zatem

$$= \frac{(x-6)+(x+1)}{(x-6)(x+1)} = \frac{(x-6)}{(x-6)(x+1)} + \frac{(x+1)}{(x-6)(x+1)} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-6}.$$

WSKAZÓWKA 13.

Usuwanie niewymierności z mianownika ułamka.

Przykłady:

a) $\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

b) $\frac{2}{\sqrt[3]{5}} = \frac{2}{\sqrt[3]{5}} \cdot \frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{5}} \cdot \frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{5}} = \frac{2\sqrt[3]{25}}{5}$

c) $\frac{2}{\sqrt{3}+1} = \frac{2}{\sqrt{3}+1} \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1} = \frac{2(\sqrt{3}-1)}{3-1} = \frac{2(\sqrt{3}-1)}{2} = \sqrt{3} - 1$

Wykorzystujemy wzór: $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

d) $\frac{2}{\sqrt[3]{5}+1} = \frac{2}{\sqrt[3]{5}+1} \cdot \frac{\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{5}+1}{\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{5}+1} = \frac{2\left(\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{5}+1\right)}{5+1} = \frac{2\left(\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{5}+1\right)}{6} = \frac{\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{5}+1}{3}$

Wykorzystujemy wzór: $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

e) $\frac{4}{\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{4}+1} = \frac{4}{\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{4}+1} \cdot \frac{\sqrt[3]{4}-1}{\sqrt[3]{4}-1} = \frac{4\left(\sqrt[3]{4}-1\right)}{3}$

Wykorzystujemy wzór: $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

f) $\frac{5}{\sqrt{3}+\sqrt{2}+1} = \frac{5}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})+1} \cdot \frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})-1}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})-1} = \frac{5(\sqrt{3}+\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2-1^2} = \frac{5(\sqrt{3}+\sqrt{2}-1)}{4+2\sqrt{6}} =$

$= \frac{5(\sqrt{3}+\sqrt{2}-1)}{2(\sqrt{6}+2)} \cdot \frac{\sqrt{6}-2}{\sqrt{6}-2} = \frac{5(3\sqrt{2}+2\sqrt{3}-\sqrt{6}-2\sqrt{3}-2\sqrt{2}+2)}{2 \cdot 2} = \frac{5(\sqrt{2}-\sqrt{6}+2)}{4}$

WSKAZÓWKA 14.

Dowodzenie nierówności algebraicznych.
Cel: przekształcić nierówność z *TEZY* w tzw. oczywistą prawdę, np. doprowadzić do nierówności $(w)^2 \geq 0$, która jest zawsze prawdziwa. Podczas przekształceń należy stosować tzw. przekształcenia tożsamościowe.
Wskazówki:

1. likwidować ułamki – mnożyć przez wspólny mianownik (oczywiście mnożyć, pilnując znaku nierówności),
2. likwidować pierwiastki – podnosić obustronnie do kwadratu (jeśli obie strony są nieujemne),
3. przenosić wszystkie wyrażenia na jedną stronę,
4. wyłączać wspólne czynniki przed nawias – doprowadzać do postaci iloczynowej,
5. zauważać wzory skróconego mnożenia.

Przykład *(Źródło: CKE, Matura sierpień 2010 (PR), zad. 6)*

Wykaż, że nierówność $\sqrt[4]{\frac{a^4+b^4}{2}} \geq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ jest spełniona przez wszystkie liczby rzeczywiste a i b.

Rozwiązanie:

Założenie: $a, b \in \boldsymbol{R}$

Teza: $\sqrt[4]{\frac{a^4+b^4}{2}} \geq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$

Dowód:

$$\sqrt[4]{\frac{a^4+b^4}{2}} \geq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \quad /\,(\,)^4$$

$$\frac{a^4+b^4}{2} \geq \left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)^2$$

$$\frac{a^4+b^4}{2} \geq \frac{a^4+2a^2b^2+b^4}{4} \quad /\cdot 4$$

$2a^4 + 2b^4 \geq a^4 + 2a^2b^2 + b^4$ przenosimy wszystko na lewą stronę

$a^4 - 2a^2b^2 + b^4 \geq 0$ zauważamy wzór skróconego mnożenia

$(a^2 - b^2)^2 \geq 0$

Kwadrat dowolnego wyrażenia jest nieujemny, zatem powyższa nierówność jest zawsze prawdziwa.

WSKAZÓWKA 15.

Działania na pierwiastkach – dwa wzory:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m\cdot n]{a}$$

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[m\cdot n]{a^m b^n}$$

Przykłady:

$\sqrt[4]{\sqrt[5]{7}} = \sqrt[20]{7}$

$\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[4]{3} = \sqrt[12]{2^4 3^3}$

WSKAZÓWKA 16.

Kilka dodatkowych wzorów skróconego mnożenia:

$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$

$(a-b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc + 2ac$

$(a+b-c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2bc - 2ac$

$(a-b-c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2bc - 2ac$

$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b) + 6abc$

WSKAZÓWKA 17.

Liczba przeciwna i liczba odwrotna.

Dana liczba	Liczba przeciwna	Liczba odwrotna
$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{-x}$	$\boldsymbol{\frac{1}{x}}$
5	– 5	$\frac{1}{5}$
$-\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{4}{3}$
$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

WSKAZÓWKA 18.

NWD – największy wspólny dzielnik.

NWW – najmniejsza wspólna wielokrotność.

Jak wyznaczyć *NWD* i *NWW*? Pokażemy to na przykładzie.

Przykład.

Wyznacz *NWD* i *NWW* liczb 72 i 60.

Rozkładamy liczby na czynniki pierwsze:

72	2	**60**	2
36	2	30	2
18	2	15	3
9	3	5	5
3	3	1	
1			

Zaznaczamy elementy (czynniki) powtarzające się w obu liczbach (szarą czcionką).

NWD jest iloczynem czynników powtarzających się, czyli
$NWD\ (72, 60) = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$
NWW jest iloczynem jednej liczby i czynników nie powtarzających się z drugiej liczby, czyli
$NWW\ (72, 60) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 72 \cdot 5 = 60 \cdot 2 \cdot 3 = 360$

WSKAZÓWKA 19.

Twierdzenie:
$NWD\ (a, b) \cdot NWW\ (a, b) = a \cdot b$

Przykład.
$NWD\ (72, 60) \cdot NWW\ (72, 60) = 12 \cdot 360 = 72 \cdot 60$

WSKAZÓWKA 20.

Jednostki:
1 km = 1000 m = 10 000 dm = 100 000 cm = 1 000 000 mm
1 km^2 = 1 000 000 m^2 = 100 000 000 dm^2 = 10 000 000 000 cm^2
1 ha = 10 000 m^2
1 ha = 100 a
1 a = 100 m^2
1 kg = 100 dag = 1000 g
1 t = 1000 kg (1 tona = 1000 kg)
1 l = 1 dm^3 = 1 000 cm^3 (1 litr = 1 dm^3)