

# Matematyka



## Informator Matura 2022

• sięgnij • zamów • poćwicz • zdaj



OFICyna  
EDUKACYJNA  
KRZYSZTOF PAZDRO

# NASI PRZEDSTAWICIELE

Jeżeli chcielibyście Państwo dowiedzieć się więcej o naszych książkach, to przedstawiciele regionalni Oficyny Edukacyjnej \* Krzysztof Pazdro:

- **przyjadą** do Państwa szkoły, aby przedstawić ofertę wydawnictwa
- **dokonają** wśród grona nauczycieli prezentacji podręczników z jednego lub z kilku przedmiotów
- **porozmawiają** indywidualnie z każdym nauczycielem i pomogą w wyborze podręczników
- **udzielą** szczegółowych informacji na temat konferencji i warsztatów organizowanych przez wydawnictwo
- **przedstawiają** najkorzystniejsze warunki zakupu publikacji Oficyny.

## REGIONY

1

### Lubuski

#### Zachodniopomorski

#### Pomorski (zachód)

Powiaty: bytowski, chojnicki, człuchowski, kartuski, kościerski, lęborski, pucki, Słupsk, słupski, wejherowski, Gdańsk, Gdynia, Sopot

#### Wielkopolski (zachód)

Powiaty: czarnkowsko-trzcianecki, grodziski, międzychodzki, nowotomyski, szamotulski, wolsztyński

**692-403-384**

**[lubuskie@pazdro.com.pl](mailto:lubuskie@pazdro.com.pl)**

2

### Dolnośląski

#### Opolski

#### Śląski

**692-490-546**

**[dolnoslaskie@pazdro.com.pl](mailto:dolnoslaskie@pazdro.com.pl)**

3

### Wielkopolski

#### Łódzki

#### Kujawsko-Pomorski

**694-498-275**

**[wielkopolskie@pazdro.com.pl](mailto:wielkopolskie@pazdro.com.pl)**

4

### Mazowiecki (północ)

Powiaty: ciechanowski, gostyniński, makowski, mławski, ostrołęcki, Ostrołęka, ostrowski, Płock, płocki, płoński, przasnyski, sierpecki, żuromiński

#### Podlaski

#### Warmińsko-Mazurski

#### Pomorski (wschód)

Powiaty: gdański, kwidzyński, malborski, sztumski, nowodworski, starogardzki, tczewski

**694-498-274**

**[mazowieckie@pazdro.com.pl](mailto:mazowieckie@pazdro.com.pl)**

5

### Mazowiecki (centrum)

Powiaty: białobrzezski, garwoliński, grodziski, grójecki, legionowski, łosicki, miński, nowodworski, otwocki, piaseczyński, pruszkowski, pułtuski, Siedlce, siedlecki, sochaczewski, sokołowski, Warszawa, warszawski zachodni, węgrowski, wołomiński, wyszkowski, żyrardowski

#### Lubelski (północ)

Powiaty: bialski, Biała Podlaska, łukowski, parczewski, radzyński

#### Podlaski (południe)

Powiat: siemiatycki

**666-376-451**

**[warszawa@pazdro.com.pl](mailto:warszawa@pazdro.com.pl)**

6

### Lubelski

#### Podkarpacki

#### Świętokrzyski

#### Małopolski

#### Mazowiecki (południe)

Powiaty: koziński, lipski, przysuski, Radom, radomski, szydłowiecki, zwoleniński

**692-490-544**

**[lubelskie@pazdro.com.pl](mailto:lubelskie@pazdro.com.pl)**



Szanowni Państwo,

oto informator o naszych pozycjach wydawniczych z matematyki, które są przeznaczone dla uczniów liceów i techników, przygotowujących się do matury według zasad obowiązujących od roku szkolnego 2014/15.

Wybrane fragmenty książek ilustrują zakres i sposób opracowania treści nauczania, ujętych w podstawie programowej obowiązującej w szkołach od września 2012 r. W poszczególnych pozycjach prezentujemy: okładkę, spis treści, wstęp do książki, przykładowy fragment opracowania treści i odpowiedni fragment odpowiedzi.

Na końcu informatora przedstawiamy trzy pozycje przeznaczone dla uczniów, nauczycieli i dla tych, którzy szczególnie interesują się matematyką oraz współczesnymi narzędziami informatycznymi przydatnymi w jej nauczaniu i zastosowaniu.

Gorąco zachęcamy do korzystania z naszej oferty. Jesteśmy przekonani, że pozycje te pomogą uczniom skutecznie przygotować się do matury i osiągnąć sukces podczas egzaminu.

Wydawca



**OFICyna  
EDUKACYJNA**  
KRZYSZTOF PAZDRO

ul. Kościańska 4, 01-695 Warszawa  
tel. 22 560 81 00, fax 22 560 81 27  
e-mail: [pazdro@pazdro.com.pl](mailto:pazdro@pazdro.com.pl)  
[www.pazdro.com.pl](http://www.pazdro.com.pl)

# Spis treści

|                                                                                                                           |     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Matematyka. Zbiór zadań maturalnych CKE z rozwiązaniami.<br>Lata 2010-2021. Poziom podstawowy ( <b>nowość</b> ) . . . . . | 3   |
| Matematyka. Zbiór zadań maturalnych CKE z rozwiązaniami.<br>Lata 2010-2021. Poziom rozszerzony ( <b>nowość</b> ). . . . . | 13  |
| Matematyka. Zbiór zadań z próbnych arkuszy maturalnych.<br>Poziom podstawowy ( <b>nowość</b> ). . . . .                   | 19  |
| Matematyka. Zbiór zadań z próbnych arkuszy maturalnych.<br>Poziom rozszerzony ( <b>nowość</b> ) . . . . .                 | 29  |
| Matematyka. Twierdzenia i dowody. Zadania z rozwiązaniami<br>do liceów i technik . . . . .                                | 39  |
| Matematyka. Zadania i problemy matematyczne.<br>Zbiór 270 oryginalnych zadań ( <b>nowość</b> ) . . . . .                  | 49  |
| Matematyka. Gruntowne powtórki przedmaturalne.<br>Zakres podstawowy . . . . .                                             | 57  |
| Matematyka. Powtórka przed maturą. Zadania. Zakres podstawowy . . . . .                                                   | 65  |
| Analiza matematyczna dla licealistów i studentów. Repetytorium . . . . .                                                  | 71  |
| Matematyka. Porady i wskazówki, których nie ma w tablicach maturalnych . . . . .                                          | 77  |
| Matematyka. Kompendia maturalne (zakres podstawowy i rozszerzony). . . . .                                                | 83  |
| Matematyka. Przed maturą. Zadania z rozwiązaniami. Zakres podstawowy . . . . .                                            | 91  |
| Matematyka. Zadania powtórkowe przed maturą<br>(zakres podstawowy i rozszerzony). . . . .                                 | 97  |
| Matematyka. Podstawianie zmiennej pomocniczej w równaniach i nie tylko.<br>Zadania z rozwiązaniami . . . . .              | 103 |
| Podróże matematyczne . . . . .                                                                                            | 109 |
| ABC GeoGebry. Poradnik dla początkujących . . . . .                                                                       | 110 |
| Wolfram Alpha. Praktyczny przewodnik po programie dla każdego. . . . .                                                    | 111 |



# MATEMATYKA

## ZBIÓR ZADAŃ MATURALNYCH

Lata 2010–**2021**  
Poziom podstawowy

**Nowość!**



**1320** ZADAŃ  
Centralnej Komisji Egzaminacyjnej  
**Z ROZWIĄZANAMI**

Opracował Ryszard Pagacz



# Spis treści

|                                                   |     |
|---------------------------------------------------|-----|
| <b>Wstęp</b> .....                                | 4   |
| <b>Zadania maturalne</b> .....                    | 5   |
| 1. Liczby. Potęgi .....                           | 5   |
| 2. Logarytmy .....                                | 14  |
| 3. Procenty .....                                 | 18  |
| 4. Wartość bezwzględna .....                      | 23  |
| 5. Równania. Nierówności .....                    | 26  |
| 6. Funkcja liniowa. Proste .....                  | 42  |
| 7. Funkcja kwadratowa .....                       | 59  |
| 8. Wyrażenia algebraiczne. Funkcje. Wykresy ..... | 70  |
| 9. Trygonometria .....                            | 83  |
| 10. Ciągi .....                                   | 92  |
| 11. Planimetria .....                             | 106 |
| 12. Stereometria .....                            | 134 |
| 13. Statystyka .....                              | 157 |
| 14. Kombinatoryka .....                           | 162 |
| 15. Rachunek prawdopodobieństwa .....             | 165 |
| 16. Geometria analityczna .....                   | 173 |
| 17. Dowody (geometria) .....                      | 185 |
| 18. Dowody (algebra) .....                        | 192 |
| 19. Inne .....                                    | 196 |
| <b>Szkice rozwiązań</b> .....                     | 199 |
| 1. Liczby. Potęgi .....                           | 199 |
| 2. Logarytmy .....                                | 203 |
| 3. Procenty .....                                 | 205 |
| 4. Wartość bezwzględna .....                      | 208 |
| 5. Równania. Nierówności .....                    | 209 |
| 6. Funkcja liniowa. Proste .....                  | 217 |
| 7. Funkcja kwadratowa .....                       | 222 |
| 8. Wyrażenia algebraiczne. Funkcje. Wykresy ..... | 226 |
| 9. Trygonometria .....                            | 230 |
| 10. Ciągi .....                                   | 235 |
| 11. Planimetria .....                             | 243 |
| 12. Stereometria .....                            | 256 |
| 13. Statystyka .....                              | 271 |
| 14. Kombinatoryka .....                           | 274 |
| 15. Rachunek prawdopodobieństwa .....             | 276 |
| 16. Geometria analityczna .....                   | 283 |
| 17. Dowody (geometria) .....                      | 293 |
| 18. Dowody (algebra) .....                        | 299 |
| 19. Inne .....                                    | 302 |

## Wstęp

Od roku 2010 matematyka na poziomie podstawowym jest zdawana na maturze jako przedmiot obowiązkowy. Od tej pory upłynęło już 11 lat. Jest to wystarczający czas, by na podstawie przeglądu arkuszy maturalnych zorientować się, jakiego typu zadań i o jakiej skali trudności może spodziewać się na egzaminie przyszły maturzysta.

W tym zbiorze zebrałem wszystkie zadania z lat 2010–2021, które występowały w arkuszach maturalnych CKE na poziomie podstawowym. Zadania zostały jednak podzielone i uporządkowane według rozdziałów, występujących w typowym programie nauczania matematyki w szkole. Obok numeru każdego zadania jest wskazówka, z arkusza której matury dane zadanie pochodzi (miesiąc, rok, nr zadania i liczba punktów). Do wszystkich zadań podałem szkice rozwiązań, również do zadań zamkniętych.

Propozycje rozwiązań tych zadań, sporządzone przez ekspertów CKE, można znaleźć również na stronie [www.cke.edu.pl](http://www.cke.edu.pl).

Ten zbiór zadań może być świetnym materiałem do samodzielnego przygotowania się do egzaminu. Może również być pomocny nauczycielowi w zaplanowaniu cyklu powtórzeń przygotowujących uczniów do matury.

Zadania oznaczone <sup>R</sup>, w związku ze zmianą podstawy programowej, od roku 2015 występują w arkuszach na poziomie rozszerzonym. Przygotowując się tylko do matury na poziomie podstawowym można je pominąć.

Lata 2020–2021 przejdą do historii m.in. z powodu COVID-19 i zdalnego nauczania. Sesja maturalna 2020 też była wyjątkowa, ponieważ odbyła się z miesięcznym przesunięciem. Egzamin maturalny w 2021 został przeprowadzony na podstawie nieco zmodyfikowanych podstaw programowych. Mimo trudności, do zbioru zadań załączono zadania pochodzące z arkuszy maturalnych w terminach dodatkowych (lipiec 2020 i czerwiec 2021), z arkuszy matury poprawkowej (wrzesień 2020) oraz z arkuszy diagnostycznych (2014 i 2021).

Mam nadzieję, że ten bardzo bogaty materiał pozwoli uczniom skutecznie przygotować się do egzaminu.

*Autor*

# ZADANIA MATURALNE

## 1. Liczby. Potęgi

**Zadanie 1.1.** [matura, maj 2010, zad. 3. (1 pkt)]

Liczba  $\left(\frac{2^{-2} \cdot 3^{-1}}{2^{-1} \cdot 3^{-2}}\right)^0$  jest równa

- A. 1                      B. 4                      C. 9                      D. 36

**Zadanie 1.2.** [matura, sierpień 2010, zad. 2. (1 pkt)]

Iloczyn  $81^2 \cdot 9^4$  jest równy

- A.  $3^4$                       B.  $3^0$                       C.  $3^{16}$                       D.  $3^{14}$

**Zadanie 1.3.** [matura, sierpień 2010, zad. 6. (1 pkt)]

Kwadrat liczby  $x = 2 - \sqrt{3}$  jest równy

- A.  $7 - 4\sqrt{3}$                       B.  $7 + 4\sqrt{3}$                       C. 1                      D. 7

**Zadanie 1.4.** [matura, czerwiec 2011, zad. 1. (1 pkt)]

Liczbę  $\sqrt{20}$  można przedstawić w postaci

- A.  $5\sqrt{2}$                       B.  $5\sqrt{4}$                       C.  $4\sqrt{5}$                       D.  $2\sqrt{5}$

**Zadanie 1.5.** [matura, czerwiec 2011, zad. 2. (1 pkt)]

Potęga  $\left(\frac{a}{b}\right)^{-5}$  (gdzie  $a$  i  $b$  są różne od zera) jest równa

- A.  $-5 \cdot \frac{a}{b}$                       B.  $\left(\frac{b}{a}\right)^5$                       C.  $\frac{b^5}{a}$                       D.  $-\left(\frac{a}{b}\right)^5$

**Zadanie 1.6.** [matura, sierpień 2011, zad. 7. (1 pkt)]

Dla pewnych liczb  $a$  i  $b$  zachodzą równości:  $a^2 - b^2 = 200$  i  $a + b = 8$ . Dla tych liczb  $a$  i  $b$  wartość wyrażenia  $a - b$  jest równa

- A. 25                      B. 16                      C. 10                      D. 2

**Zadanie 1.7.** [matura, maj 2012, zad. 2. (1 pkt)]

Liczba  $\sqrt[3]{(-8)^{-1}} \cdot 16^{\frac{3}{4}}$  jest równa

- A. -8                      B. -4                      C. 2                      D. 4

**Zadanie 1.8.** [matura, maj 2012, zad. 3. (1 pkt)]

Liczba  $(3 - \sqrt{2})^2 + 4(2 - \sqrt{2})$  jest równa

- A.  $19 - 10\sqrt{2}$       B.  $17 - 4\sqrt{2}$       C.  $15 + 14\sqrt{2}$       D.  $19 + 6\sqrt{2}$

**Zadanie 1.9.** [matura, czerwiec 2012, zad. 1. (1 pkt)]

Ułamek  $\frac{\sqrt{5} + 2}{\sqrt{5} - 2}$  jest równy

- A. 1      B. -1      C.  $7 + 4\sqrt{5}$       D.  $9 + 4\sqrt{5}$

**Zadanie 1.10.** [matura, czerwiec 2012, zad. 21. (1 pkt)]

Równość  $(a + 2\sqrt{2})^2 = a^2 + 28\sqrt{2} + 8$  zachodzi dla

- A.  $a = 14$       B.  $a = 7\sqrt{2}$       C.  $a = 7$       D.  $a = 2\sqrt{2}$

**Zadanie 1.11.** [matura, sierpień 2012, zad. 2. (1 pkt)]

Iloczyn  $9^{-5} \cdot 3^8$  jest równy

- A.  $3^{-4}$       B.  $3^{-9}$       C.  $9^{-1}$       D.  $9^{-9}$

**Zadanie 1.12.** [matura, sierpień 2012, zad. 4. (1 pkt)]

Liczba  $(2 - 3\sqrt{2})^2$  jest równa

- A. -14      B. 22      C.  $-14 - 12\sqrt{2}$       D.  $22 - 12\sqrt{2}$

**Zadanie 1.13.** [matura, maj 2013, zad. 23. (1 pkt)]

Liczba  $\frac{\sqrt{50} - \sqrt{18}}{\sqrt{2}}$  jest równa

- A.  $2\sqrt{2}$       B. 2      C. 4      D.  $\sqrt{10} - \sqrt{6}$

**Zadanie 1.14.** [matura, czerwiec 2013, zad. 1. (1 pkt)]

Liczba  $(\sqrt[3]{16} \cdot 4^{-2})^3$  jest równa

- A. 4      B.  $4^{-4}$       C.  $4^{-8}$       D.  $4^{-12}$

**Zadanie 1.15.** [matura, sierpień 2013, zad. 3. (1 pkt)]

Liczba  $\frac{5^3 \cdot 25}{\sqrt{5}}$  jest równa

- A.  $5^5\sqrt{5}$       B.  $5^4\sqrt{5}$       C.  $5^3\sqrt{5}$       D.  $5^6\sqrt{5}$

**Zadanie 1.16.** [matura, sierpień 2013, zad. 6. (1 pkt)]

Liczby rzeczywiste  $a, b, c$  spełniają warunki  $a + b = 3$ ,  $b + c = 4$  i  $c + a = 5$ .

Wtedy suma  $a + b + c$  jest równa

- A. 20                      B. 6                      C. 4                      D. 1

**Zadanie 1.17.** [matura, maj 2014, zad. 3. (1 pkt)]

Wartość wyrażenia  $\frac{2}{\sqrt{3}-1} - \frac{2}{\sqrt{3}+1}$  jest równa

- A. -2                      B.  $-2\sqrt{3}$                       C. 2                      D.  $2\sqrt{3}$

**Zadanie 1.18.** [matura, maj 2014, zad. 21. (1 pkt)]

Liczba  $\left( \frac{1}{\left( \sqrt[3]{729} + \sqrt[4]{256} + 2 \right)^0} \right)^{-2}$  jest równa

- A.  $\frac{1}{225}$                       B.  $\frac{1}{15}$                       C. 1                      D. 15

**Zadanie 1.19.** [matura, czerwiec 2014, zad. 8. (1 pkt)]

Liczba  $\frac{3^{27} + 3^{26}}{3^{26} + 3^{25}}$  jest równa

- A. 1                      B. 3                      C. 6                      D. 9

**Zadanie 1.20.** [matura, sierpień 2014, zad. 2 (1 pkt)]

Liczba  $\frac{1}{2} \cdot 2^{2014}$  jest równa

- A.  $2^{2013}$                       B.  $2^{2012}$                       C.  $2^{1007}$                       D.  $1^{2014}$

**Zadanie 1.21.** [matura, sierpień 2014, zad. 4 (1 pkt)]

Liczba  $\left( \sqrt{5} - \sqrt{3} \right)^2 + 2\sqrt{15}$  jest równa

- A.  $2 + 2\sqrt{15}$                       B. 8                      C.  $2 + 4\sqrt{15}$                       D. 2

**Zadanie 1.22.** [matura, maj 2015, zad. 4. (1 pkt)]

Równość  $\frac{m}{5-\sqrt{5}} = \frac{5+\sqrt{5}}{5}$  zachodzi dla

- A.  $m = 5$                       B.  $m = 4$                       C.  $m = 1$                       D.  $m = -5$

**Zadanie 1.23.** [matura, maj 2015, zad. 3 swe. (1 pkt)]

Liczba  $2^{\frac{4}{3}} \cdot \sqrt[3]{2^5}$  jest równa

- A.  $2^{\frac{20}{3}}$                       B. 2                      C.  $2^{\frac{4}{5}}$                       D.  $2^3$

**Zadanie 1.24.** [matura, czerwiec 2015, zad. 1. (1 pkt)]

Liczba  $2\sqrt{18} - \sqrt{32}$  jest równa

- A.  $2^{-\frac{3}{2}}$                       B.  $2^{-\frac{1}{2}}$                       C.  $2^{\frac{1}{2}}$                       D.  $2^{\frac{3}{2}}$

**Zadanie 1.25.** [matura, czerwiec 2015, zad. 2. (1 pkt)]

Wartość wyrażenia  $\frac{\sqrt[5]{-32} \cdot 2^{-1}}{4} \cdot 2^2$  jest równa

- A.  $-\frac{1}{2}$                       B.  $\frac{1}{2}$                       C. 1                      D. -1

**Zadanie 1.26.** [matura, czerwiec 2015, zad. 1 swe. (1 pkt)]

Liczba  $\frac{(0,2)^3}{\sqrt[4]{25^{-3}}}$  jest równa

- A.  $\sqrt{5^3}$                       B.  $\frac{1}{\sqrt{5^3}}$                       C.  $\sqrt[3]{5^2}$                       D.  $\frac{1}{\sqrt[3]{5^2}}$

**Zadanie 1.27.** [matura, czerwiec 2015, zad. 4 swe. (1 pkt)]

Liczba  $17^3 + m^3$  jest podzielna przez 19 dla

- A.  $m = -8$                       B.  $m = -2$                       C.  $m = 2$                       D.  $m = 8$

**Zadanie 1.28.** [matura, sierpień 2015, zad. 1. (1 pkt)]

Jeśli  $a = \frac{3}{2}$  i  $b = 2$ , to wartość wyrażenia  $\frac{a \cdot b}{a + b}$  jest równa

- A.  $\frac{2}{3}$                       B. 1                      C.  $\frac{6}{7}$                       D.  $\frac{27}{6}$

**Zadanie 1.29.** [matura, sierpień 2015, zad. 3. (1 pkt)]

Liczba  $\frac{9^5 \cdot 5^9}{45^5}$  jest równa

- A.  $45^{40}$                       B.  $45^9$                       C.  $9^4$                       D.  $5^4$

**Zadanie 1.30.** [matura, sierpień 2015, zad. 4. (1 pkt)]

Liczba  $\sqrt{\frac{9}{7}} + \sqrt{\frac{7}{9}}$  jest równa

- A.  $\sqrt{\frac{16}{63}}$                       B.  $\frac{16}{3\sqrt{7}}$                       C. 1                      D.  $\frac{3 + \sqrt{7}}{3\sqrt{7}}$

# Szkice rozwiązań

## 1. Liczby. Potęgi

### Zadania zamknięte

| Zad.        | Rozwiązanie                                                                                                                                | Odp.     |
|-------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|
| <b>1.1</b>  | $\left(\frac{2^{-2} \cdot 3^{-1}}{2^{-1} \cdot 3^{-2}}\right)^0 = 1$                                                                       | <b>A</b> |
| <b>1.2</b>  | $81^2 \cdot 9^4 = (3^4)^2 \cdot (3^2)^4 = 3^8 \cdot 3^8 = 3^{16}$                                                                          | <b>C</b> |
| <b>1.3</b>  | $(2 - \sqrt{3})^2 = 4 - 4\sqrt{3} + 3 = 7 - 4\sqrt{3}$                                                                                     | <b>A</b> |
| <b>1.4</b>  | $\sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} = 2\sqrt{5}$                                                                                                 | <b>D</b> |
| <b>1.5</b>  | $\left(\frac{a}{b}\right)^{-5} = \left(\frac{b}{a}\right)^5$                                                                               | <b>B</b> |
| <b>1.6</b>  | $(a - b)(a + b) = 200, (a - b) \cdot 8 = 200, a - b = 25$                                                                                  | <b>A</b> |
| <b>1.7</b>  | $\sqrt[3]{(-8)^{-1}} \cdot 16^{\frac{3}{4}} = -\frac{1}{2} \cdot 8 = -4$                                                                   | <b>B</b> |
| <b>1.8</b>  | $(3 - \sqrt{2})^2 + 4(2 - \sqrt{2}) = 9 - 6\sqrt{2} + 2 + 8 - 4\sqrt{2} = 19 - 10\sqrt{2}$                                                 | <b>A</b> |
| <b>1.9</b>  | $\frac{\sqrt{5} + 2}{\sqrt{5} - 2} = \frac{(\sqrt{5} + 2)(\sqrt{5} + 2)}{(\sqrt{5} - 2)(\sqrt{5} + 2)} = (\sqrt{5} + 2)^2 = 9 + 4\sqrt{5}$ | <b>D</b> |
| <b>1.10</b> | $(a + 2\sqrt{2})^2 = a^2 + 4a\sqrt{2} + 8, 4a = 28, a = 7$                                                                                 | <b>C</b> |
| <b>1.11</b> | $9^{-5} \cdot 3^8 = 9^{-5} \cdot 9^4 = 9^{-1}$                                                                                             | <b>C</b> |
| <b>1.12</b> | $(2 - 3\sqrt{2})^2 = 4 - 12\sqrt{2} + 18 = 22 - 12\sqrt{2}$                                                                                | <b>D</b> |
| <b>1.13</b> | $\frac{\sqrt{50} - \sqrt{18}}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2} - 3\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2$                         | <b>B</b> |
| <b>1.14</b> | $(\sqrt[3]{16} \cdot 4^{-2})^3 = 4^2 \cdot 4^{-6} = 4^{-4}$                                                                                | <b>B</b> |



|      |                                                                                                                                                    |   |
|------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|
| 1.15 | $\frac{5^3 \cdot 25}{\sqrt{5}} = \frac{5^3 \cdot 5^2 \cdot \sqrt{5}}{5} = 5^4 \sqrt{5}$                                                            | B |
| 1.16 | $2(a + b + c) = 3 + 4 + 5, a + b + c = 6$                                                                                                          | B |
| 1.17 | $\frac{2}{\sqrt{3}-1} - \frac{2}{\sqrt{3}+1} = \sqrt{3} + 1 - (\sqrt{3} - 1) = 2$                                                                  | C |
| 1.18 | $\left( \frac{1}{\left( \sqrt[3]{729} + \sqrt[4]{256} + 2 \right)^0} \right)^{-2} = \left( \frac{1}{1} \right)^{-2} = 1$                           | C |
| 1.19 | $\frac{3^{27} + 3^{26}}{3^{26} + 3^{25}} = \frac{3^{26}(3 + 1)}{3^{25}(3 + 1)} = 3$                                                                | B |
| 1.20 | $\frac{1}{2} \cdot 2^{2014} = 2^{-1} \cdot 2^{2014} = 2^{2013}$                                                                                    | A |
| 1.21 | $\left( \sqrt{5} - \sqrt{3} \right)^2 + 2\sqrt{15} = 5 - 2\sqrt{15} + 3 + 2\sqrt{15} = 8$                                                          | B |
| 1.22 | $m = \frac{(5 + \sqrt{5})(5 - \sqrt{5})}{5} = \frac{20}{5} = 4$                                                                                    | B |
| 1.23 | $2^{\frac{4}{3}} \cdot \sqrt[3]{2^5} = 2^{\frac{4}{3}} \cdot 2^{\frac{5}{3}} = 2^3$                                                                | D |
| 1.24 | $2\sqrt{18} - \sqrt{32} = 2\sqrt{9 \cdot 2} - \sqrt{16 \cdot 2} = 6\sqrt{2} - 4\sqrt{2} = 2\sqrt{2} = 2^1 \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{3}{2}}$ | D |
| 1.25 | $\frac{\sqrt[5]{-32} \cdot 2^{-1}}{4} \cdot 2^2 = -2 \cdot 2^{-1} = -1$                                                                            | D |
| 1.26 | $\frac{(0,2)^3}{\sqrt[4]{25^{-3}}} = \frac{5^{-3}}{5^{-\frac{6}{4}}} = 5^{-3+\frac{3}{2}} = 5^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5^3}}$               | B |
| 1.27 | $17^3 + m^3 = (17 + m)(17^2 - 17m + m^2), m = 2$                                                                                                   | C |
| 1.28 | $\frac{a \cdot b}{a + b} = \frac{3}{\frac{3}{2} + 2} = \frac{6}{7}$                                                                                | C |
| 1.29 | $\frac{9^5 \cdot 5^9}{45^5} = \frac{9^5 \cdot 5^9}{9^5 \cdot 5^5} = 5^4$                                                                           | D |

|      |                                                                                                                                                      |   |
|------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|
| 1.30 | $\sqrt{\frac{9}{7}} + \sqrt{\frac{7}{9}} = \frac{3}{\sqrt{7}} + \frac{\sqrt{7}}{3} = \frac{16}{3\sqrt{7}}$                                           | B |
| 1.31 | $\frac{a+b}{a \cdot b} = \frac{\frac{2}{3} + \frac{1}{2}}{\frac{1}{3}} = \frac{7}{6} \cdot 3 = \frac{7}{2}$                                          | A |
| 1.32 | $\frac{5^{12} \cdot 9^5}{15^{10}} = \frac{5^{12} \cdot 3^{10}}{5^{10} \cdot 3^{10}} = 5^2 = 25$                                                      | A |
| 1.33 | $\frac{2}{7} = 0,(285714)$                                                                                                                           | D |
| 1.34 | $\frac{a^{-2,6}}{a^{1,3}} = a^{-3,9}$                                                                                                                | A |
| 1.35 | $\frac{7^6 \cdot 6^7}{42^6} = \frac{7^6 \cdot 6^7}{7^6 \cdot 6^6} = 6$                                                                               | C |
| 1.36 | $\sqrt[3]{3\sqrt{3}} = \left(3 \cdot 3^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(3^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$ | D |
| 1.37 | $50001^2 - 49999^2 = (50001 - 49999) \cdot (50001 + 49999) = 200\,000$                                                                               | B |
| 1.38 | $5t = 5\,000\,000\text{ g} = 10\,000\,000 \cdot 0,5 = 10^7 \cdot 0,5$                                                                                | B |
| 1.39 | $37 + 38 + 39 + 40 + 41 = 195$                                                                                                                       | A |
| 1.40 | $\frac{4^5 \cdot 5^4}{20^4} = \frac{4^5 \cdot 5^4}{4^4 \cdot 5^4} = 4$                                                                               | D |
| 1.41 | $5^8 \cdot 16^{-2} = 5^8 \cdot 2^{-8} = \left(\frac{5}{2}\right)^8$                                                                                  | A |
| 1.42 | $\sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{27 \cdot 2} - \sqrt[3]{2} = 3\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{2} = 2\sqrt[3]{2}$                                        | C |
| 1.43 | $(-\sqrt{2} - 2)^2 = (2 + \sqrt{2})^2$                                                                                                               | C |
| 1.44 | $16^{24} + 16^{24} + 16^{24} + 16^{24} = 4 \cdot 16^{24} = 4^{49}$                                                                                   | D |
| 1.45 | $a^b - b^a = (-2)^3 - 3^{-2} = -8 - \frac{1}{9} = -\frac{73}{9}$                                                                                     | C |
| 1.46 | $9^9 \cdot 81^2 = 9^9 \cdot 9^4 = 9^{13}$                                                                                                            | C |

MATEMATYKA

# ZBIÓR ZADAŃ MATURALNYCH

Lata 2010–**2021**  
Poziom rozszerzony

**Nowość!**



**431** ZADAŃ

Centralnej Komisji Egzaminacyjnej  
**Z ROZWIĄZANIAMI**

Opracował Ryszard Pagacz



# Spis treści

|                                       |     |
|---------------------------------------|-----|
| <b>Wstęp</b> .....                    | 4   |
| <b>Zadania maturalne</b> .....        | 5   |
| 1. Funkcja kwadratowa .....           | 5   |
| 2. Wielomiany .....                   | 8   |
| 3. Trygonometria .....                | 12  |
| 4. Wartość bezwzględna .....          | 16  |
| 5. Planimetria .....                  | 20  |
| 6. Stereometria .....                 | 24  |
| 7. Geometria analityczna .....        | 29  |
| 8. Ciągi .....                        | 33  |
| 9. Kombinatoryka .....                | 39  |
| 10. Rachunek prawdopodobieństwa ..... | 40  |
| 11. Dowody (geometria) .....          | 44  |
| 12. Dowody (algebra) .....            | 50  |
| 13. Granice i pochodna .....          | 53  |
| 14. Optymalizacja .....               | 55  |
| 15. Inne .....                        | 60  |
| <b>Szkice rozwiązań</b> .....         | 63  |
| 1. Funkcja kwadratowa .....           | 63  |
| 2. Wielomiany .....                   | 81  |
| 3. Trygonometria .....                | 90  |
| 4. Wartość bezwzględna .....          | 109 |
| 5. Planimetria .....                  | 122 |
| 6. Stereometria .....                 | 139 |
| 7. Geometria analityczna .....        | 156 |
| 8. Ciągi .....                        | 178 |
| 9. Kombinatoryka .....                | 193 |
| 10. Rachunek prawdopodobieństwa ..... | 199 |
| 11. Dowody (geometria) .....          | 211 |
| 12. Dowody (algebra) .....            | 226 |
| 13. Granice i pochodna .....          | 235 |
| 14. Optymalizacja .....               | 242 |
| 15. Inne .....                        | 262 |

## Wstęp

Od roku 2010 matematyka na poziomie rozszerzonym jest zdawana na maturze wyłącznie jako przedmiot dodatkowy. Od tej pory upłynęło już 11 lat. Jest to wystarczający czas, by na podstawie przeglądu arkuszy maturalnych zorientować się, jakiego typu zadań i o jakiej skali trudności może spodziewać się na egzaminie przyszły maturzysta.

W tym zbiorze zebrałem wszystkie zadania z lat 2010–2021, które występowały w arkuszach maturalnych CKE na poziomie rozszerzonym. Są tu zadania pochodzące z matur w terminach głównych i dodatkowych oraz z diagnozy przedmaturalnej z lat 2020–2021. Zadania zostały jednak podzielone i uporządkowane według rozdziałów, występujących w typowym programie nauczania matematyki w szkole. Obok numeru każdego zadania jest wskazówka, z arkusza której matury dane zadanie pochodzi (miesiąc, rok, nr zadania i liczba punktów).

Przy niektórych zadaniach umieściłem skrót *swe*. W ten sposób oznaczyłem zadania występujące w arkuszach maturalnych od roku 2015. Są one oparte na *standardach wymagań egzaminacyjnych*, a nie na podstawie programowej z matematyki z roku 2012. Od 2015 roku arkusze takie były dedykowane absolwentom techników oraz poprawiającym wyniki lub zdającym egzamin maturalny z matematyki po raz kolejny.

Do wszystkich zadań podałem szkice rozwiązań, również do zadań zamkniętych.

Ten zbiór zadań może być świetnym materiałem do samodzielnego przygotowania się do egzaminu. Może również być pomocny nauczycielowi w zaplanowaniu cyklu powtórzeń przygotowujących uczniów do matury.

Mam nadzieję, że ten bogaty materiał pozwoli uczniom skutecznie przygotować się do egzaminu.

*Autor*

# ZADANIA MATURALNE

## 1. Funkcja kwadratowa

**Zadanie 1.1.** [matura, maj 2010, zad. 6. (5 pkt)]

Wyznacz wszystkie wartości parametru  $m$ , dla których równanie  $x^2 + mx + 2 = 0$  ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste takie, że suma ich kwadratów jest większa od  $2m^2 - 13$ .

**Zadanie 1.2.** [matura, sierpień 2010, zad. 4. (5 pkt)]

Wyznacz wszystkie wartości parametru  $m$ , dla których równanie  $x^2 - (m - 4)x + m^2 - 4m = 0$  ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste, których suma jest mniejsza od  $2m^3 - 3$ .

**Zadanie 1.3.** [matura, sierpień 2010, zad. 5. (4 pkt)]

Narysuj wykres funkcji  $f$  określonej wzorem  $f(x) = x^2 - 4|x|$  i na jego podstawie wyznacz liczbę rozwiązań równania  $f(x) = m$  w zależności od wartości parametru  $m$ .

**Zadanie 1.4.** [matura, maj 2011, zad. 3. (6 pkt)]

Wyznacz wszystkie wartości parametru  $m$ , dla których równanie  $x^2 - 4mx - m^3 + 6m^2 + m - 2 = 0$  ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste  $x_1, x_2$  takie, że  $(x_1 - x_2)^2 < 8(m + 1)$ .

**Zadanie 1.5.** [matura, czerwiec 2011, zad. 2. (5 pkt)]

Wyznacz wszystkie wartości parametru  $m$ , dla których równanie  $2x^2 - (m - 2)x - 3m = 0$  ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste  $x_1, x_2$  spełniające warunek  $x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 \leq 25$ .

**Zadanie 1.6.** [matura, maj 2012, zad. 1. (4 pkt)]

Wyznacz cztery kolejne liczby całkowite takie, że największa z nich jest równa sumie kwadratów trzech pozostałych liczb.

**Zadanie 1.7.** [matura, maj 2012, zad. 4. (6 pkt)]

Oblicz wszystkie wartości parametru  $m$ , dla których równanie  $x^2 - (m + 2)x + m + 4 = 0$  ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste  $x_1, x_2$  takie, że  $x_1^4 + x_2^4 = 4m^3 + 6m^2 - 32m + 12$ .

**Zadanie 1.8.** [matura, czerwiec 2012, zad. 4. (5 pkt)]

Wyznacz wszystkie wartości parametru  $m$ , dla których równanie  $2x^2 + (3 - 2m)x - m + 1 = 0$  ma dwa różne pierwiastki  $x_1, x_2$  takie, że  $|x_1 - x_2| = 3$ .

**Zadanie 1.9.** [matura, maj 2013, zad. 6. (6 pkt)]

Wyznacz wszystkie wartości parametru  $m$ , dla których równanie  $x^2 + 2(1 - m)x + m^2 - m = 0$  ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste  $x_1, x_2$  spełniające warunek  $x_1x_2 \leq 6m \leq x_1^2 + x_2^2$ .

**Zadanie 1.10.** [matura, czerwiec 2013, zad. 2. (5 pkt)]

Wyznacz wszystkie wartości parametru  $m$ , dla których równanie  $(m+1)x^2 - 3mx + m + 1 = 0$  ma dwa różne pierwiastki takie, że ich suma jest nie większa niż 2,5.

**Zadanie 1.11.** [matura, maj 2014, zad. 2. (6 pkt)]

Wyznacz wszystkie wartości parametru  $m$ , dla których funkcja kwadratowa  $f(x) = x^2 - (2m+2)x + 2m + 5$  ma dwa różne pierwiastki  $x_1, x_2$  takie, że suma kwadratów odległości punktów  $A = (x_1, 0)$ ,  $B = (x_2, 0)$  od prostej o równaniu  $x + y + 1 = 0$  jest równa 6.

**Zadanie 1.12.** [matura, czerwiec 2014, zad. 6. (6 pkt)]

Wyznacz wszystkie wartości parametru  $m$ , dla których równanie  $x^2 + (2m-5)x + 2m + 3 = 0$  ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste  $x_1, x_2$  takie, że  $(x_1 + x_2)^2 \geq x_1^2 \cdot x_2^2 \geq x_1^2 + x_2^2$ .

**Zadanie 1.13.** [matura, maj 2015, zad. 7. (2 pkt)]

Liczby  $(-1)$  i  $3$  są miejscami zerowymi funkcji kwadratowej  $f$ . Oblicz  $\frac{f(6)}{f(12)}$ .

**Zadanie 1.14.** [matura, maj 2015, zad. 13. (5 pkt)]

Dany jest trójmian kwadratowy  $f(x) = (m+1)x^2 + 2(m-2)x - m + 4$ . Wyznacz wszystkie wartości parametru  $m$ , dla których trójmian  $f$  ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste  $x_1, x_2$ , spełniające warunek  $x_1^2 - x_2^2 = x_1^4 - x_2^4$ .

**Zadanie 1.15.** [matura, maj 2015, zad. 3 swe. (6 pkt)]

Wyznacz wszystkie wartości parametru  $m$ , dla których równanie  $(m^2 - m)x^2 - x + 1 = 0$  ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste  $x_1, x_2$  takie, że  $\frac{1}{x_1 + x_2} \leq \frac{m}{3} \leq \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ .

**Zadanie 1.16.** [matura, czerwiec 2015, zad. 15. (6 pkt)]

Funkcja  $f$  jest określona wzorem  $f(x) = \frac{m^2 + m - 6}{m - 5}x^2 - 2(m - 2)x + m - 5$  dla każdej liczby rzeczywistej  $x$ . Wyznacz całkowite wartości parametru  $m$ , dla których funkcja  $f$  przyjmuje wartość największą i ma dwa różne miejsca zerowe o jednakowych znakach.

**Zadanie 1.17.** [matura, czerwiec 2015, zad. 1 swe. (6 pkt)]

Wyznacz wszystkie wartości parametru  $m$ , dla których równanie  $x^2 + 2(m-1)x + m^2 + m - 1 = 0$  ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste  $x_1, x_2$  takie, że  $(x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2) = x_1^3 + x_2^3$ .

**Zadanie 1.18.** [matura, maj 2016, zad. 12. (6 pkt)]

Dany jest trójmian kwadratowy  $f(x) = x^2 + 2(m+1)x + 6m + 1$ . Wyznacz wszystkie rzeczywiste wartości parametru  $m$ , dla których ten trójmian ma dwa różne pierwiastki  $x_1, x_2$  tego samego znaku, spełniające warunek  $|x_1 - x_2| < 3$ .

# SZKICE ROZWIĄZAŃ

## 1. Funkcja kwadratowa

### Zadanie 1.1. (5 pkt)

Wyznacz wszystkie wartości parametru  $m$ , dla których równanie  $x^2 + mx + 2 = 0$  ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste takie, że suma ich kwadratów jest większa od  $2m^2 - 13$ .

*Rozwiązanie:*

Rozwiązanie zadania sprowadza się do rozwiązania układu nierówności  $\begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1^2 + x_2^2 > 2m^2 - 13 \end{cases}$ ,

gdzie  $\Delta$  jest wyróżnikiem równania kwadratowego, natomiast  $x_1, x_2$  są pierwiastkami tego równania.

Zatem

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = m^2 - 4$$

$$\begin{cases} m^2 - 8 > 0 \\ m^2 - 4 > 2m^2 - 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 8 > 0 \\ m^2 - 9 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in (-\infty; -2\sqrt{2}) \cup (2\sqrt{2}; +\infty) \\ m \in (-3; 3) \end{cases}.$$

$$\text{Odp. } m \in (-3; -2\sqrt{2}) \cup (2\sqrt{2}; 3).$$

### Zadanie 1.2. (5 pkt)

Wyznacz wszystkie wartości parametru  $m$ , dla których równanie  $x^2 - (m - 4)x + m^2 - 4m = 0$  ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste, których suma jest mniejsza od  $2m^3 - 3$ .

*Rozwiązanie:*

Rozwiązanie zadania sprowadza się do rozwiązania układu nierówności  $\begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1 + x_2 < 2m^3 - 3 \end{cases}$ ,

gdzie  $\Delta$  jest wyróżnikiem równania kwadratowego natomiast  $x_1, x_2$  są pierwiastkami tego równania.

Zatem

$$\Delta = (m - 4)^2 - 4(m^2 - 4m) = -3m^2 + 8m + 16 \quad x_1 + x_2 = m - 4$$

$$\begin{cases} -3m^2 + 8m + 16 > 0 \\ m - 4 < 2m^3 - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m^2 - 8m - 16 < 0 \\ 2m^3 - m + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3m + 4)(m - 4) < 0 \\ (m + 1)(2m^2 - 2m + 1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \in \left(-\frac{4}{3}; 4\right) \\ m \in (-1; +\infty) \end{cases}.$$

$$\text{Odp. } m \in (-1; 4).$$



# MATEMATYKA

## ZBIÓR ZADAŃ

**Nowość!**

z próbnych arkuszy maturalnych

**1000** zadań

Dwa  
nowe arkusze  
na maturę  
**2022**



**POZIOM PODSTAWOWY**



format 205 x 292 mm,  
stron 248

# Spis treści

|             |   |
|-------------|---|
| Wstęp ..... | 5 |
|-------------|---|

## ZADANIA

|                                           |     |
|-------------------------------------------|-----|
| 1. Liczby .....                           | 6   |
| 2. Liczby i wyrażenia algebraiczne .....  | 14  |
| 3. Równania i nierówności .....           | 23  |
| 4. Funkcje .....                          | 32  |
| 5. Ciągi .....                            | 54  |
| 6. Trygonometria .....                    | 62  |
| 7. Planimetria .....                      | 67  |
| 8. Geometria analityczna .....            | 82  |
| 9. Stereometria .....                     | 90  |
| 10. Prawdopodobieństwo i statystyka ..... | 101 |
| 11. Zadania na dowodzenie .....           | 113 |

## Odpowiedzi i rozwiązania

|                                           |     |
|-------------------------------------------|-----|
| 1. Liczby .....                           | 119 |
| 2. Liczby i wyrażenia algebraiczne .....  | 120 |
| 3. Równania i nierówności .....           | 123 |
| 4. Funkcje .....                          | 132 |
| 5. Ciągi .....                            | 140 |
| 6. Trygonometria .....                    | 146 |
| 7. Planimetria .....                      | 149 |
| 8. Geometria analityczna .....            | 156 |
| 9. Stereometria .....                     | 162 |
| 10. Prawdopodobieństwo i statystyka ..... | 173 |
| 11. Zadania na dowodzenie .....           | 181 |

## ARKUSZE PRÓBNE

|                          |     |
|--------------------------|-----|
| Arkusz próbny nr 1 ..... | 198 |
| Arkusz próbny nr 2 ..... | 205 |

|                          |     |
|--------------------------|-----|
| Arkusz próbny nr 3 ..... | 211 |
| Arkusz próbny nr 4 ..... | 217 |
| Arkusz próbny nr 5 ..... | 223 |

## **Odpowiedzi do arkuszy próbnych**

|                          |     |
|--------------------------|-----|
| Arkusz próbny nr 1 ..... | 229 |
| Arkusz próbny nr 2 ..... | 232 |
| Arkusz próbny nr 3 ..... | 236 |
| Arkusz próbny nr 4 ..... | 240 |
| Arkusz próbny nr 5 ..... | 243 |

---

Drodzy Maturzyści!

Oddajemy w Wasze ręce zbiór zadań z próbnych arkuszy maturalnych z matematyki na poziomie podstawowym. Jest on skompilowaną wersją pięciu zestawów próbnych arkuszy maturalnych, wydanych przez Oficynę Pazdro w latach 2015–2019. Zadania są dostosowane do obowiązującej podstawy programowej dla szkół ponadgimnazjalnych.

Zbiór podzielony jest na dwie części:

1. Zadania ułożone tematycznie według głównych działów podstawy programowej z matematyki oraz dodatkowy dział poświęcony zadaniom na dowodzenie.
2. Pięć nowych, próbnych arkuszy maturalnych o narastającym poziomie trudności (każdy arkusz zawiera 25 zadań testowych oraz 9 zadań otwartych).

Do wszystkich zadań dołączyliśmy odpowiedzi, a do zadań otwartych – pełne rozwiązania.

Rozwiązując zaproponowane przez nas zadania, będziecie mieli okazję przypomnieć sobie praktycznie wszystkie wymagania egzaminacyjne oraz zmierzyć się z typami zadań, jakie są na egzaminie maturalnym. Spotkacie się ponadto z różnymi zagadnieniami matematycznymi osadzonymi w różnych kontekstach sytuacyjnych. Takie podejście spowoduje, że nie będziecie zaskoczeni zadaniami na egzaminie maturalnym.

Dołożyliśmy wszelkich starań, aby nowe arkusze były na najwyższym poziomie merytorycznym. W związku z tym są one zróżnicowane pod względem trudności, sposobów sformułowań i zapisów. Dobierając zadania, czerpaliśmy z naszego wieloletniego doświadczenia w nauczaniu matematyki oraz z pracy w zespołach egzaminacyjnych Okręgowej Komisji Egzaminacyjnej we Wrocławiu. Uwzględniliśmy również najnowsze trendy wynikające z analiz zadań proponowanych przez Centralną Komisję Egzaminacyjną od roku 2015.

Zachęcamy Was do korzystania z załączonego zestawu wzorów matematycznych podczas rozwiązywania zebranych zadań.

Jesteśmy przekonani, że samodzielne rozwiązywanie zadań z naszego zbioru przyczyni się do Waszego sukcesu maturalnego.

*Autorzy*

Do zbioru dołączono wkładkę z dwoma nowymi próbnymi arkuszami maturalnymi.

## 6. TRYGNOMETRIA

### Zadania zamknięte

**6.1. (0–1)** Kąt  $\alpha$  jest rozwarty i  $\cos \alpha = -\frac{1}{4}$ . Wtedy

A.  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$

B.  $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{\sqrt{15}}{15}$

C.  $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{15}$

D.  $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{15}}{4}$

**6.2. (0–1)** Podaj miarę kąta wypukłego  $\alpha$  spełniającego warunek:  $2\sqrt{6}\cos \alpha + 3\sqrt{2} = 0$ .

A.  $30^\circ$

B.  $120^\circ$

C.  $60^\circ$

D.  $150^\circ$

**6.3. (0–1)** Jeżeli  $\alpha = 135^\circ$ , to

A.  $\sin \alpha = \cos \alpha$

B.  $\operatorname{tg} \alpha > \cos \alpha$

C.  $\cos \alpha > \sin \alpha$

D.  $\operatorname{tg} \alpha < \cos \alpha$

**6.4. (0–1)** Wartość wyrażenia  $\operatorname{tg}^2 60^\circ - \sin 45^\circ \cos 45^\circ - \sin 60^\circ \operatorname{tg} 30^\circ$  jest równa

A. 2

B. 3

C.  $\frac{3}{2}$

D.  $3 - \frac{\sqrt{3}}{6}$

**6.5. (0–1)** Jeżeli  $\alpha$  jest kątem ostrym i  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , to

A.  $\alpha = 45^\circ$

B.  $\alpha > 45^\circ$

C.  $30^\circ < \alpha < 45^\circ$

D.  $\alpha = 30^\circ$

**6.6. (0–1)** Kąt  $\alpha$  jest rozwarty. Możliwe wartości funkcji trygonometrycznych kąta  $\alpha$  to

A.  $\sin \alpha = \frac{1}{2}$

B.  $\sin \alpha = \frac{1}{3}$

C.  $\sin \alpha = 2$

D.  $\sin \alpha = -\frac{1}{2}$

$\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\cos \alpha = -\frac{1}{2}$

$\cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{4}$

$\operatorname{tg} \alpha = -4$

$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

**6.7. (0–1)** W trójkącie prostokątnym cosinus jednego z kątów ostrych jest równy  $\frac{1}{3}$ .

Wynika stąd, że

A. sinus tego kąta jest równy  $\frac{2}{3}$

B. przeciwprostokątna ma długość 3

C. jedna z przyprostokątnych ma długość 1

D. jedna z przyprostokątnych jest trzy razy krótsza od przeciwprostokątnej

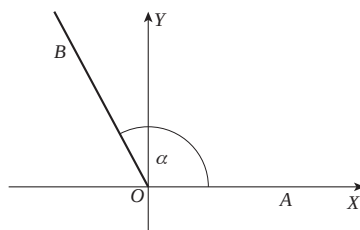
**6.8. (0–1)** Rysunek poniżej przedstawia kąt  $\alpha$  taki, że  $\operatorname{tg} \alpha = -2$ . Który z podanych punktów leży na półprostej  $OB$ ?

A.  $\left(-\frac{3}{2}, 3\right)$

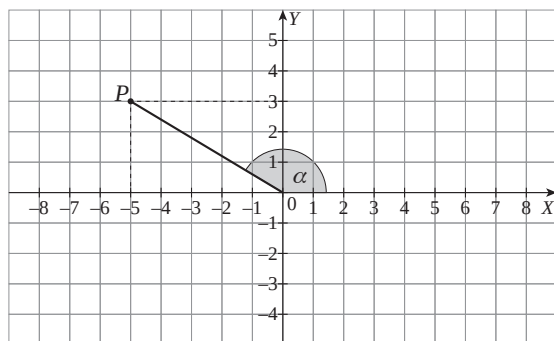
B. (3, 6)

C. (-3, 9)

D.  $(-\sqrt{2}, 2)$



**6.9. (0–1)** Na końcowym ramieniu kąta  $\alpha$  leży punkt  $P = (-5, 3)$  (patrz rysunek).



Wskaż informację nieprawdziwą.

A.  $\sin \alpha = \frac{3}{\sqrt{34}}$

B.  $\cos \alpha = -\frac{5}{\sqrt{34}}$

C.  $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{3}{5}$

D.  $\cos \alpha = \frac{5}{\sqrt{34}}$

**6.10. (0–1)** Kąt  $\alpha$  jest kątem ostrym oraz  $\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{7}{5} \cos \alpha$ . Wobec tego

A.  $\sin \alpha = \frac{3}{7}$

B.  $\sin \alpha = \frac{2}{7}$

C.  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$

D.  $\sin \alpha = \frac{5}{7}$

## 6. TRYGONOMETRIA

### Odpowiedzi

|            |      |      |      |      |      |      |      |      |      |       |
|------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|-------|
| Nr zadania | 6.1. | 6.2. | 6.3. | 6.4. | 6.5. | 6.6. | 6.7. | 6.8. | 6.9. | 6.10. |
| Odpowiedź  | A    | D    | D    | A    | C    | B    | D    | A    | D    | D     |

|            |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Nr zadania | 6.11. | 6.12. | 6.13. | 6.14. | 6.15. | 6.16. | 6.17. | 6.18. | 6.19. | 6.20. |
| Odpowiedź  | C     | B     | D     | B     | C     | D     | A     | C     | A     | B     |

|            |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Nr zadania | 6.21. | 6.22. | 6.23. | 6.24. | 6.25. | 6.26. | 6.27. | 6.28. | 6.29. | 6.30. |
| Odpowiedź  | D     | A     | A     | D     | C     | B     | A     | B     | C     | A     |

|            |       |
|------------|-------|
| Nr zadania | 6.31. |
| Odpowiedź  | C     |

### Szkice rozwiązań zadań otwartych

**6.32. (0-2)** około 137 m

*Rozwiązanie*

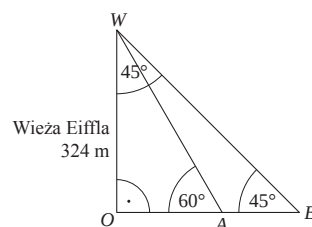
Z własności trójkąta prostokątnego o kątach ostrych  $30^\circ$  i  $60^\circ$

(rysunek obok) mamy  $|OW| = |OA|\sqrt{3}$ , stąd

$$|OA| = \frac{324\sqrt{3}}{3} = 108\sqrt{3}.$$

Podobnie, korzystając z własności trójkąta prostokątnego o kątach ostrych mających miarę  $45^\circ$ , otrzymujemy  $|OB| = |OW| = 324$ .

Zatem  $|AB| = 324 - 108\sqrt{3}$ , po zaokrągleniu do jednej  $|AB| = 137$  (m).



## Arkusz próbny nr 1

### POZIOM PODSTAWOWY

#### Zadania zamknięte

##### Zadanie 1. (0-1)

Wartość wyrażenia  $(x + y)^2 - 4xy$  dla  $x = 2 + \sqrt{2}$  oraz  $y = \sqrt{2} - 3$  jest równa

- A. 13                      B. 25                      C.  $23 + 4\sqrt{2}$                       D. 1

##### Zadanie 2. (0-1)

Liczba  $\frac{27^{27}}{9^9 \cdot 3^3}$  jest równa

- A.  $27^{15}$                       B.  $3^{60}$                       C.  $3^{50}$                       D.  $3^{15}$

##### Zadanie 3. (0-1)

Liczba  $\log_7 8\sqrt{7} - \log_7 8$  jest równa

- A. 7                      B.  $\sqrt{7}$                       C.  $\frac{3}{2}$                       D.  $\frac{1}{2}$

##### Zadanie 4. (0-1)

Pewien towar wskutek gwałtownego wzrostu popytu zdrożał o 250%. Aby przywrócić początkową cenę towaru należałoby teraz obniżyć tę nową cenę o

- A.  $28\frac{4}{7}\%$                       B. 40%                      C. 60%                      D.  $71\frac{3}{7}\%$

##### Zadanie 5. (0-1)

Ile liczb całkowitych dodatnich spełnia nierówność  $\frac{1}{2}(x + 3) - \frac{1}{3}(x - 4) \leq 5$ ?

- A. 13                      B. 12                      C. 29                      D. 28

##### Zadanie 6. (0-1)

Iloczyn wszystkich rozwiązań równania  $(x^2 - 9)(x^3 - 8)(x^2 + 2) = 0$  jest równy

- A. 6                      B. -18                      C. 36                      D. 0



# ODPOWIEDZI I SZKICE ROZWIĄZAŃ

## ARKUSZ PRÓBNY NR 1

### Odpowiedzi

|            |    |    |    |    |    |    |    |    |    |     |
|------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|
| Nr zadania | 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. | 7. | 8. | 9. | 10. |
| Odpowiedź  | B  | B  | D  | D  | A  | B  | C  | B  | C  | A   |

|            |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| Nr zadania | 11. | 12. | 13. | 14. | 15. | 16. | 17. | 18. | 19. | 20. |
| Odpowiedź  | D   | B   | B   | B   | D   | A   | A   | D   | C   | B   |

|            |     |     |     |     |     |
|------------|-----|-----|-----|-----|-----|
| Nr zadania | 21. | 22. | 23. | 24. | 25. |
| Odpowiedź  | C   | B   | C   | D   | C   |

### Szkice rozwiązań zadań otwartych

**Zadanie 26.**  $x \in (-\infty, 0) \cup \langle 5, +\infty)$

*Rozwiązanie*

Po równoważnych przekształceniach otrzymujemy kolejno:

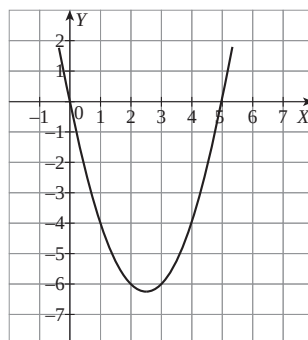
$$2x^2 - 4x \geq x^2 + x$$

$$x^2 - 5x \geq 0$$

$$x(x - 5) \geq 0.$$

Pierwiastkami trójmianu są  $x = 0$  oraz  $x = 5$ .

Zbiór rozwiązań nierówności odczytujemy z wykresu (rysunek obok).



**Zadanie 27.**  $x \in \{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}, 6\}$

*Rozwiązanie*

Równanie jest równoważne alternatywie równań:  $x^4 - 4 = 0$  lub  $x^2 - 6x = 0$ .

Mamy dalej  $x^4 = 4$  lub  $x(x - 6) = 0$ .

Rozwiązaniami pierwszego z równań są liczby  $-\sqrt{2}$  oraz  $\sqrt{2}$ , a drugiego 0 i 6.

### Zadanie 28.

*Rozwiązanie*

Przekształcamy równoważnie wyjściową nierówność.

Po wymnożeniu lewej strony otrzymujemy  $1 + \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + 1 > 4$ , czyli  $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} > 2$ .

Z założenia  $x < 0$  i  $y < 0$ , więc  $x \cdot y > 0$ . Oznacza to, że nasza nierówność jest równoważna nierównościom  $x^2 + y^2 > 2xy$  i dalej  $x^2 + y^2 - 2xy > 0$ ,  $(x - y)^2 > 0$ .

Z racji tego, że  $x \neq y$ , ostatnia nierówność jest prawdziwa.

### Zadanie 29.

*Rozwiązanie*

Ponieważ  $|AB|:|BC| = 6:8$ , więc można przyjąć, że  $|AB| = 3x$  i  $|BC| = 4x$  dla pewnego  $x > 0$ . Zatem z tw. Pitagorasa  $|AC| = 5x$ .

Trójkąty  $ABC$ ,  $BDC$  i  $DEC$  są podobne (z cechy kąt-kąt).

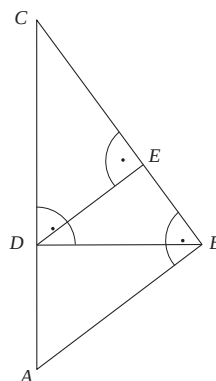
Zatem

$$\frac{|CD|}{|BC|} = \frac{|BC|}{|AC|}, \text{ stąd } |CD| = \frac{|BC|^2}{|AC|} = \frac{16x}{5}$$

oraz

$$\frac{|CE|}{|BC|} = \frac{|CD|}{|AC|}, \text{ więc}$$

$$|CE| = \frac{|CD| \cdot |BC|}{|AC|} = \frac{\frac{16}{5}x \cdot 4x}{5x} = \frac{16}{25} |BC| = 64\% |BC|.$$



### Zadanie 30. $\frac{8}{9}$

*Rozwiązanie*

Wszystkich możliwości jest 36. Zdarzenia elementarne, sprzyjające zdarzeniu A – co najwyżej jeden raz wypadnie ścianka z liczbą mniejszą od dwa, są zaznaczone w tabeli

|   | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 |   |   | X | X | X | v |
| 1 |   |   | X | X | X | X |
| 2 | X | X | X | X | X | X |
| 3 | X | X | X | X | X | X |
| 4 | X | X | X | X | X | X |
| 5 | X | X | X | X | X | X |

Jest ich 32, zatem szukane prawdopodobieństwo jest równe  $P(A) = \frac{32}{36} = \frac{8}{9}$ .

**Uwaga:** Krótszym sposobem rozwiązania jest rozważenie zdarzenia przeciwnego do A, któremu sprzyjają tylko 4 zdarzenia elementarne.

# MATEMATYKA

## ZBIÓR ZADAŃ

**Nowość!**

z próbnych arkuszy maturalnych

**444** zadania

Dwa  
nowe arkusze  
na maturę  
**2022**



**POZIOM ROZSZERZONY**



format 205 x 292 mm,  
stron 304

# Spis treści

|             |   |
|-------------|---|
| Wstęp ..... | 4 |
|-------------|---|

## ZADANIA

|                                              |    |
|----------------------------------------------|----|
| 1. Liczby .....                              | 6  |
| 2. Funkcje kwadratowe .....                  | 8  |
| 3. Wielomiany .....                          | 11 |
| 4. Inne funkcje .....                        | 13 |
| 5. Trygonometria .....                       | 16 |
| 6. Wartość bezwzględna .....                 | 20 |
| 7. Planimetria .....                         | 22 |
| 8. Stereometria .....                        | 27 |
| 9. Geometria analityczna .....               | 31 |
| 10. Ciągi .....                              | 35 |
| 11. Granica ciągu. Szereg geometryczny ..... | 37 |
| 12. Kombinatoryka .....                      | 41 |
| 13. Rachunek prawdopodobieństwa .....        | 43 |
| 14. Dowody geometria .....                   | 47 |
| 15. Dowody algebra .....                     | 51 |
| 16. Granica i ciągłość funkcji .....         | 53 |
| 17. Pochodna .....                           | 54 |
| 18. Optymalizacja .....                      | 58 |
| 19. Inne .....                               | 62 |

## Odpowiedzi i rozwiązania

|                              |     |
|------------------------------|-----|
| 1. Liczby .....              | 64  |
| 2. Funkcje kwadratowe .....  | 68  |
| 3. Wielomiany .....          | 80  |
| 4. Inne funkcje .....        | 85  |
| 5. Trygonometria .....       | 92  |
| 6. Wartość bezwzględna ..... | 105 |
| 7. Planimetria .....         | 110 |
| 8. Stereometria .....        | 132 |

|                                              |     |
|----------------------------------------------|-----|
| 9. Geometria analityczna .....               | 149 |
| 10. Ciągi .....                              | 170 |
| 11. Granica ciągu. Szereg geometryczny ..... | 174 |
| 12. Kombinatoryka .....                      | 183 |
| 13. Rachunek prawdopodobieństwa .....        | 190 |
| 14. Dowody geometria .....                   | 203 |
| 15. Dowody algebra .....                     | 216 |
| 16. Granica i ciągłość funkcji .....         | 223 |
| 17. Pochodna .....                           | 225 |
| 18. Optymalizacja .....                      | 239 |
| 19. Inne .....                               | 263 |

## **ARKUSZE PRÓBNE**

|                          |     |
|--------------------------|-----|
| Arkusz próbny nr 1 ..... | 270 |
| Arkusz próbny nr 2 ..... | 273 |
| Arkusz próbny nr 3 ..... | 275 |

## **Odpowiedzi i szkice rozwiązań do arkuszy próbnych**

|                          |     |
|--------------------------|-----|
| Arkusz próbny nr 1 ..... | 278 |
| Arkusz próbny nr 2 ..... | 284 |
| Arkusz próbny nr 3 ..... | 290 |

---

Drodzy Maturzyści!

Oddajemy w Wasze ręce **zbiór zadań z próbnych arkuszy maturalnych z matematyki na poziomie rozszerzonym**. Jest on skompilowaną wersją pięciu zestawów próbnych arkuszy maturalnych, wydanych przez Oficynę Pazdro w latach 2015–2019. Zadania są dostosowane do obowiązującej podstawy programowej dla szkół ponadgimnazjalnych.

Zbiór podzielony jest na dwie części:

1. **Zadania ułożone w 19 działach tematycznych** (według głównych działów podstawy programowej z matematyki).
2. **Trzy nowe, próbne arkusze maturalne** o narastającym poziomie trudności.

Do wszystkich zadań dołączyliśmy odpowiedzi, a do zadań otwartych – pełne rozwiązania.

Rozwiązując zaproponowane przez nas zadania, będziecie mieli okazję przypomnieć sobie praktycznie wszystkie wymagania egzaminacyjne oraz zmierzyć się z typami zadań, jakie są na egzaminie maturalnym. Spotkacie się ponadto z różnymi zagadnieniami matematycznymi osadzonymi w różnych kontekstach sytuacyjnych. Takie podejście spowoduje, że nie będziecie zaskoczeni zadaniami na egzaminie maturalnym.

Zachęcamy Was do zapoznania się z przykładowymi rozwiązaniami, ale dopiero po własnych próbach rozwiązywania. Nie zniechęcajcie się, jeżeli w pierwszej chwili nie macie pomysłu na rozwiązanie. Pamiętajcie: przyjdzie taki czas, że trzeba będzie pokazać, co się umie... Zatem ćwiccie – ćwiczenie czyni mistrza.

Dołożyliśmy wszelkich starań, aby nowe arkusze były na najwyższym poziomie merytorycznym. W związku z tym są one zróżnicowane pod względem trudności, sposobów sformułowań i zapisów. Dobierając zadania, czerpaliśmy z naszego wieloletniego doświadczenia w nauczaniu matematyki. Uwzględniliśmy również najnowsze trendy wynikające z analiz zadań proponowanych przez Centralną Komisję Egzaminacyjną od roku 2015.

Zachęcamy Was do korzystania z załączonego zestawu wzorów matematycznych podczas rozwiązywania zebranych zadań.

Jesteśmy przekonani, że samodzielne rozwiązywanie zadań z naszego zbioru przyczyni się do Waszego sukcesu maturalnego.

*Autorzy*

Do zbioru dołączono wkładkę z dwoma nowymi próbnymi arkuszami maturalnymi.

## 1. LICZBY

### Zadania zamknięte

**1.1. (0-1)** Wartość wyrażenia  $\frac{x^4 - 8x}{3x^2 + 6x + 12}$ , dla  $x = 3\sqrt{5} + 2$ , jest równa

- A.  $45 + 6\sqrt{5}$       B.  $10 + 6\sqrt{5}$       C.  $3\sqrt{5}$       D.  $15 + 2\sqrt{5}$

**1.2. (0-1)** Liczba  $\sqrt[3]{5\sqrt{2} - 7}$  jest równa

- A.  $1 - \sqrt{2}$       B.  $\sqrt{2} - 1$       C.  $2\sqrt{2} - 1$       D.  $1 - 2\sqrt{2}$

**1.3. (0-1)** Wartość wyrażenia  $\left( \frac{(\sqrt{2} + 1)^3 + (\sqrt{2} - 1)^3}{5} \right)^2$  jest równa

- A.  $2\sqrt{2}$       B.  $\frac{10\sqrt{2} + 14}{25}$       C. 8      D.  $\frac{10\sqrt{2} + 6}{5}$

**1.4. (0-1)** Liczba  $\log_{\sqrt{2}+1}(5\sqrt{2} - 7)$  jest równa

- A. -3      B. -2      C.  $\frac{1}{3}$       D.  $\frac{1}{2}$

**1.5. (0-1)** Liczba  $\sqrt{\left(3^{\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} \log_{\sqrt{3}} 4}\right)^{\sqrt{2}}}$  jest równa

- A. 6      B. 4      C.  $\sqrt{6}$       D.  $2\sqrt{3}$

**1.6. (0-1)** Ile z podanych niżej równości jest prawdziwych

1.  $\log\left(17 + \frac{17}{16}\right) = \log 17 + \log \frac{17}{16},$

2.  $\log\left(\frac{49}{6} - 7\right) = \log \frac{49}{6} - \log 7,$

3.  $\log\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{7}\right) = \log \frac{1}{6} + \log \frac{1}{7}?$

- A. 0      B. dokładnie jedna      C. dokładnie dwie      D. 3

**1.7. (0-1)** Wartość wyrażenia  $2\log_5 3 + \frac{1}{\log_9 2} + \frac{2}{\log_3 4} - \frac{3}{2\log_9 5\sqrt{5}}$  wynosi

A. 0                      B. 1                      C.  $\log_3 5$                       D.  $3\log_2 3$

**1.8. (0-1)** Liczba  $\frac{\log_2 24}{\log_{96} 2} - \frac{\log_2 192}{\log_{12} 2}$  jest równa

A. -6                      B. 3                      C. -3                      D. 6

**1.9. (0-1)** Wartość wyrażenia  $(1,5)^3 \cdot (2,25)^{1,5} \cdot 0,75^{-3} : \left( \left( -\frac{1}{2} \right)^{-2} + \left( -\frac{1}{2} \right)^{-1} - (2^{-1})^{-1} - \left( 2\frac{3}{7} \right)^0 \right)$  jest równa

A. -9                      B. 9                      C. -27                      D. 27

**1.10. (0-1)** Wartością wyrażenia  $3^{\frac{\log 3}{\log 9}} \cdot 6^{\frac{\log 2}{\log 4}}$  jest liczba

A.  $3\sqrt{2}$                       B.  $\log_6 18$                       C.  $\frac{1}{4}\log_6 18$                       D.  $18^{\frac{1}{4}}$

**1.11. (0-1)** O liczbach rzeczywistych dodatnich  $a, b, x$  wiadomo, że  $\log_2 x = a$  i  $\log_3 x = b$ . Wtedy  $\log_6 x$  jest równy

A.  $a + b$                       B.  $\frac{1}{a + b}$                       C.  $ab$                       D.  $\frac{ab}{a + b}$

**1.12. (0-1)** Ile spośród liczb:  $\sin 120^\circ$ ,  $\cos \frac{13\pi}{3}$ ,  $\log_{\sqrt{2}} 2$ ,  $\sqrt{6 + 4\sqrt{2}} - \sqrt{3 + 2\sqrt{2}}$  jest liczbami niewymiernymi?

A. 1                      B. 2                      C. 3                      D. 4

**1.13. (0-1)** O liczbach rzeczywistych  $a, b$  wiadomo, że  $a^2 + b^2 + 13 = 4a + 6b$ . Wtedy  $a + b$  jest równe

A. 23                      B. 5                      C. 13                      D. 3

**1.14. (0-1)** Liczba  $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$  jest równa

A.  $\sqrt[6]{8}$                       B.  $\sqrt[8]{6}$                       C.  $\sqrt[8]{8}$                       D.  $\sqrt[8]{128}$



## ODPOWIEDZI I SZKICE ROZWIĄZAŃ

## 1. LICZBY

Odpowiedzi

|            |      |      |      |      |      |      |      |      |      |       |
|------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|-------|
| Nr zadania | 1.1. | 1.2. | 1.3. | 1.4. | 1.5. | 1.6. | 1.7. | 1.8. | 1.9. | 1.10. |
| Odpowiedź  | D    | B    | C    | A    | A    | D    | D    | B    | C    | A     |

|            |       |       |       |       |
|------------|-------|-------|-------|-------|
| Nr zadania | 1.11. | 1.12. | 1.13. | 1.14. |
| Odpowiedź  | D     | A     | B     | D     |

1.15. 204

1.16. 333

1.17.  $\log_{\frac{x}{y}} x = \frac{2}{3}$

1.18.  $3\sqrt{5}$

1.19.  $B > A$

Szkice rozwiązań

1.1. (0-1) D

Rozwiązanie

$$\frac{x^4 - 8x}{3x^2 + 6x + 12} = \frac{x(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{3(x^2 + 2x + 4)} = \frac{x(x-2)}{3} = \frac{(3\sqrt{5} + 2)3\sqrt{5}}{3} = 15 + 2\sqrt{5}$$

1.2. (0-1) B

Rozwiązanie

$$\sqrt[3]{5\sqrt{2} - 7} = \sqrt[3]{(\sqrt{2} - 1)^3} = \sqrt{2} - 1$$

# Arkusz próbny nr 1 POZIOM ROZSZERZONY

## Zadania zamknięte

### Zadanie 1. (0-1)

Liczba  $\frac{\log_3 45}{\log_{15} 3} - \frac{\log_3 5}{\log_{135} 3}$  jest równa

- A. 2                      B.  $\log_3 5$                       C. 1                      D.  $\log_5 3$

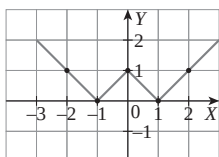
### Zadanie 2. (0-1)

Liczba  $\frac{1}{\operatorname{tg} 75^\circ} - \operatorname{tg} 75^\circ$  jest równa

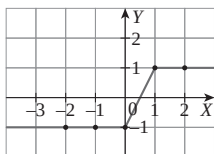
- A.  $\sqrt{3}$                       B.  $-\sqrt{3}$                       C.  $2\sqrt{3}$                       D.  $-2\sqrt{3}$

### Zadanie 3. (0-1)

Na rysunku 1. przedstawiono fragment wykresu funkcji  $y = f(x)$ ,



natomiast na rysunku 2. przedstawiono fragment wykresu funkcji  $y = g(x)$ .



Wtedy

- A.  $f(x) = ||x| + 1|$  i  $g(x) = |x| - |x - 1|$                       B.  $f(x) = ||x| - 1|$  i  $g(x) = |x| - |x + 1|$   
C.  $f(x) = ||x| - 1|$  i  $g(x) = |x| - |x - 1|$                       D.  $f(x) = ||x| + 1|$  i  $g(x) = |x| - |x + 1|$

### Zadanie 4. (0-1)

Zdarzenia losowe  $A$  i  $B$  zawarte w  $\Omega$  są takie, że prawdopodobieństwa warunkowe

$$P(A|B) = \frac{1}{4} \text{ oraz } P(B|A) = \frac{1}{3}. \text{ Wynika stąd, że}$$

- A.  $P(A) = P(B)$       B.  $4P(A) = 3P(B)$       C.  $3P(A) = 4P(B)$       D.  $P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{12}$

## Zadania otwarte

### Zadanie 5. (0-2)

Dane są dwa ciągi:

$$a_n = \frac{4n^3 + 1}{5n^3 + n^2 - n + 1} \text{ i } b_n = \frac{n^2 - 1}{7n^2 + 6n - 1}$$

Oblicz granicę  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n)$ .

Wpisz w poniższe kratki – od lewej do prawej – kolejno pierwszą, drugą i trzecią cyfrę po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

|  |  |  |
|--|--|--|
|  |  |  |
|--|--|--|

### Zadanie 6. (0-3)

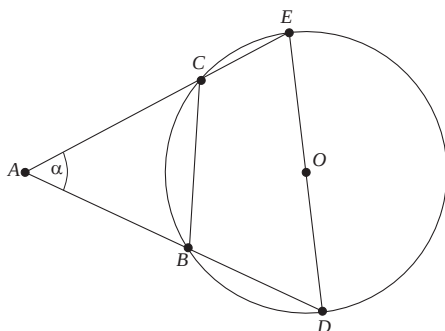
Wyznacz równanie stycznej do hiperboli o równaniu  $y = \frac{2x-1}{x-2}$  w punkcie  $P = (3, 5)$ .

### Zadanie 7. (0-3)

Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych  $a$  i  $b$  prawdziwa jest nierówność  $a^2 + b^2 + 5 > ab + a + 3b$ .

### Zadanie 8. (0-3)

Przy oznaczeniu takim jak na rysunku, udowodnij, że  $\frac{|BC|}{|DE|} = \cos \alpha$ , gdzie  $DE$  jest średnicą okręgu.



## ODPOWIEDZI I SZKICE ROZWIĄZAŃ DO ARKUSZY PRÓBNYCH

### ARKUSZ NR 1

#### Odpowiedzi i szkice rozwiązań

##### **Zadanie 1. A.**

*Rozwiązanie*

$$\frac{\log_3 45}{\log_{15} 3} - \frac{\log_3 5}{\log_{135} 3} = \frac{2 + \log_3 5}{\frac{1}{1 + \log_3 5}} - \frac{\log_3 5}{\frac{1}{3 + \log_3 5}} =$$

$$= (2 + \log_3 5)(1 + \log_3 5) - \log_3 5(3 + \log_3 5) = 2$$

##### **Zadanie 2. D.**

*Rozwiązanie*

$$\frac{1}{\operatorname{tg} 75^\circ} - \operatorname{tg} 75^\circ = \frac{\cos 75^\circ}{\sin 75^\circ} - \frac{\sin 75^\circ}{\cos 75^\circ} = \frac{\cos^2 75^\circ - \sin^2 75^\circ}{\sin 75^\circ \cos 75^\circ} = \frac{2 \cos 150^\circ}{\sin 150^\circ} = \frac{-2 \sin 60^\circ}{\cos 60^\circ} =$$

$$= -2 \operatorname{tg} 60^\circ = -2\sqrt{3}$$

##### **Zadanie 3. C.**

*Rozwiązanie*

$$f(1) = 0 \Rightarrow f(x) = ||x| - 1|$$

$$g(-1) = -1 \Rightarrow g(x) = |x| - |x - 1|$$

##### **Zadanie 4. B.**

*Rozwiązanie*

$$\frac{1}{4} = P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{4} P(B)$$

$$\frac{1}{3} = P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{3} P(A)$$

$$\text{Zatem } \frac{1}{4} P(B) = \frac{1}{3} P(A) \Rightarrow 4P(A) = 3P(B)$$

# Matematyka

## **TWIERDZENIA I DOWODY**

Zadania z rozwiązaniami  
do liceów i techników

Ryszard Pagacz  
Janusz Karkut  
Tomasz Szwed



format 165 x 235 mm,  
stron 336

## Spis treści

|                                                                                                    |            |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>ROZDZIAŁ 1</b>                                                                                  | <b>7</b>   |
| 1.1. LICZBY PIERWSZE                                                                               | 7          |
| 1.2. NIEWYMIERNOŚĆ LICZB                                                                           | 12         |
| 1.3. PIERWIĄSTKI TRÓJMIANU KWADRATOWEGO                                                            | 17         |
| 1.4. PODSTAWOWE WŁASNOŚCI POTĘG I LOGARYTMÓW                                                       | 24         |
| 1.5. DZIELENIE WIELOMIANÓW                                                                         | 36         |
| 1.6. CIĄG ARYTMETYCZNY ORAZ CIĄG GEOMETRYCZNY                                                      | 43         |
| 1.7. TWIERDZENIA O KĄTACH W OKRĘGU                                                                 | 59         |
| 1.8. TWIERDZENIE O ODCINKACH W TRÓJKĄCIE PROSTOKĄTNYM                                              | 70         |
| 1.9. TWIERDZENIE O DWUSIECZNEJ                                                                     | 84         |
| 1.10. WZORY NA POLE TRÓJKĄTA                                                                       | 92         |
| 1.11. TWIERDZENIE SINUSÓW                                                                          | 99         |
| 1.12. TWIERDZENIE COSINUSÓW ( <i>Carnota</i> )<br>I TWIERDZENIE ODWROTNE DO TWIERDZENIA PITAGORASA | 105        |
| <b>ROZDZIAŁ 2</b>                                                                                  | <b>120</b> |
| 2. ROZWIĄZANIA DO ROZDZIAŁU 1                                                                      | 120        |
| 2.1. Liczby pierwsze                                                                               | 120        |
| 2.2. Niewymierność liczb                                                                           | 122        |
| 2.3. Pierwiastki trójmianu kwadratowego                                                            | 124        |
| 2.4. Podstawowe własności potęg i logarytmów                                                       | 126        |
| 2.5. Dzielenie wielomianów                                                                         | 130        |
| 2.6. Ciąg arytmetyczny oraz ciąg geometryczny                                                      | 132        |
| 2.7. Twierdzenie o kątach w okręgu                                                                 | 141        |
| 2.8. Twierdzenie o odcinkach w trójkącie prostokątnym                                              | 144        |

|                                                                                       |            |
|---------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 2.9. Twierdzenie o dwusiecznej .....                                                  | 151        |
| 2.10. Wzory na pole trójkąta .....                                                    | 159        |
| 2.11. Twierdzenie sinusów .....                                                       | 166        |
| 2.12. Twierdzenie cosinusów i twierdzenie odwrotne<br>do twierdzenia Pitagorasa ..... | 173        |
| <b>ROZDZIAŁ 3 .....</b>                                                               | <b>181</b> |
| 3.1. KOMBINATORYKA .....                                                              | 181        |
| 3.2. DWUMIAN NEWTONA I INNE WZORY SKRÓCONEGO MNOŻENIA .....                           | 186        |
| 3.3. WZORY VIETE'A .....                                                              | 195        |
| 3.4. WZORY TRYGNOMETRYCZNE .....                                                      | 204        |
| 3.5. PUNKTY SZCZEGÓLNE TRÓJKĄTA .....                                                 | 216        |
| 3.6. CZWOROKĄT WPISANY W OKRĄG .....                                                  | 236        |
| 3.7. CZWOROKĄT OPISANY NA OKRĘGU .....                                                | 249        |
| 3.8. TWIERDZENIE O PROSTEJ PROSTOPADŁEJ DO PŁASZCZYZNY .....                          | 253        |
| 3.9. TWIERDZENIE O TRZECH PROSTYCH PROSTOPADŁYCH .....                                | 259        |
| <b>ROZDZIAŁ 4 .....</b>                                                               | <b>263</b> |
| 4. ROZWIĄZANIA DO ROZDZIAŁU 3 .....                                                   | 263        |
| 4.1. Kombinatoryka .....                                                              | 263        |
| 4.2. Dwumian Newtona i inne wzory skróconego mnożenia .....                           | 269        |
| 4.3. Wzory Viete'a .....                                                              | 274        |
| 4.4. Wzory trygonometryczne .....                                                     | 277        |
| 4.5. Punkty szczególne trójkąta .....                                                 | 281        |
| 4.6. Czworokąt wpisany w okrąg .....                                                  | 292        |
| 4.7. Czworokąt opisany na okręgu .....                                                | 301        |
| 4.8. Twierdzenie o prostej prostopadłej do płaszczyzny .....                          | 308        |
| 4.9. Twierdzenie o trzech prostych prostopadłych .....                                | 310        |
| <b>ROZDZIAŁ 5 .....</b>                                                               | <b>314</b> |
| 5. UZUPEŁNIENIE .....                                                                 | 314        |

Publikacja „**Matematyka. Twierdzenia i dowody. Zadania z rozwiązaniami do liceów i techników**” jest zgodna z podstawą programową MEN, która obowiązuje w tych szkołach od września 2019 roku (rozporządzenie MEN z dnia 30 stycznia 2018 roku w sprawie podstawy programowej kształcenia ogólnego dla liceum ogólnokształcącego, technikum oraz branżowej szkoły II stopnia, DzU 2018, poz. 467). Zamieściliśmy w niej dowody wszystkich twierdzeń matematycznych wymienionych w tym rozporządzeniu. Bardzo często dowody pokazujemy w kilku wariantach. Mamy nadzieję, że każdy uczeń odnajdzie sposób przeprowadzenia dowodu właściwy dla siebie i swoich umiejętności.

Zachęcamy do korzystania z tej książki zarówno uczniów, jak i nauczycieli, niekoniecznie związanych z nowym liceum i technikum. Polecamy ją wszystkim zainteresowanym matematyką. Dla nauczycieli matematyki czytanie i dogłębna analiza dowodów oraz rozwiązywanie załączonych zadań na dowodzenie będzie okazją do doskonalenia swojego warsztatu pracy oraz poszerzenia możliwości rozwiązywania trudnych zadań. Prezentowany materiał pozwoli uczniom lepiej zrozumieć matematykę i solidniej przygotować się do studiowania jej na wyższym etapie edukacyjnym.

Podsumowując, książka „**Twierdzenia i dowody...**” to:

- zestaw najważniejszych twierdzeń matematyki w liceum i technikum wraz z dowodami,
- możliwość prześledzenia różnych sposobów dowodzenia twierdzeń,
- inspiracja dla ucznia do samodzielnego dowodzenia twierdzeń,
- wsparcie metodyczne dla nauczyciela w trudnej sztuce nauczania dowodzenia,
- bogate źródło trudnych i oryginalnych zadań dla ucznia wraz z rozwiązaniami,
- znakomity materiał do kształtowania umiejętności rozumowania i myślenia matematycznego,
- wsparcie realizacji podstawy programowej z matematyki,
- skuteczne przygotowanie uczniów do egzaminu maturalnego, również od 2023 roku.

Życzymy naszym Czytelnikom dobrej i twórczej pracy.

Autorzy



## 1.9. TWIERDZENIE O DWUSIECZNEJ

### **Podstawa programowa**

#### 9. Twierdzenie o dwusiecznej:

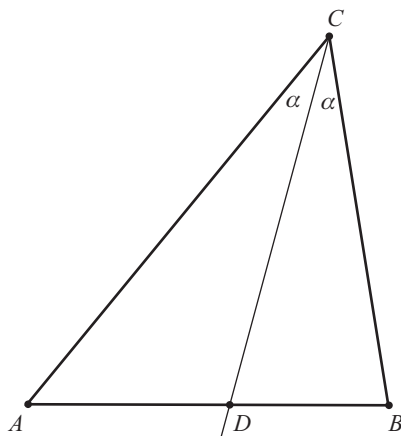
*Jeśli prosta  $CD$  jest dwusieczną kąta  $ACB$  w trójkącie  $ABC$  i punkt  $D$*

*leży na boku  $AB$ , to  $\frac{|AD|}{|BD|} = \frac{|AC|}{|BC|}$ .*

Twierdzenie to możemy zapisać również w postaci:

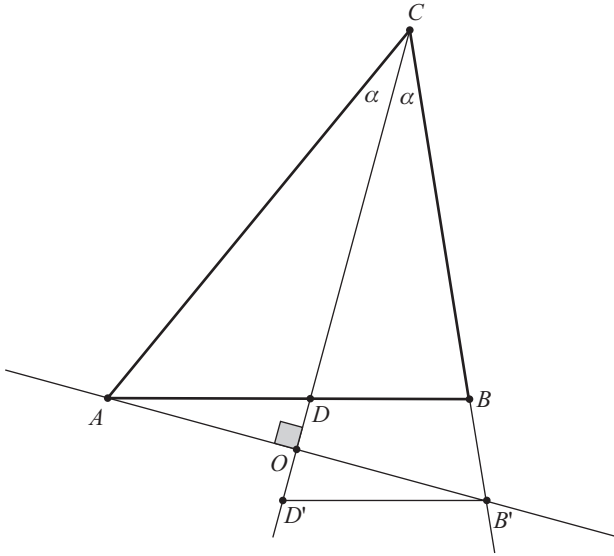
### **Twierdzenie P9.1.**

Dwusieczna kąta wewnętrznego w trójkącie dzieli przeciwległy bok na odcinki proporcjonalnie do boków przyległych.



Przy przyjętych oznaczeniach treść twierdzenia wyraża proporcja:

$$\frac{|AD|}{|DB|} = \frac{|AC|}{|BC|}.$$

**Dowód 1.**

Zakładamy, że  $|AC| \neq |BC|$ . W przypadku, gdy  $|AC| = |BC|$  trójkąt  $ABC$  jest równoramienny, wtedy  $|AD| = |DB|$  i teza jest oczywista.

Z punktu  $A$  prowadzimy prostą prostopadłą do dwusiecznej  $CD$ . Prosta ta przecina dwusieczną w punkcie  $O$ , natomiast prostą  $BC$  w punkcie  $B'$ .

Ponieważ w trójkącie  $AB'C$  dwusieczna jest prostopadłą do podstawy  $AB'$ , więc trójkąt  $AB'C$  jest trójkątem równoramiennym, zatem

$$|AO| = |OB'| \text{ i } |AC| = |B'C|.$$

Poprowadźmy jeszcze przez punkt  $B'$  prostą równoległą do boku  $AB$ . Przecina ona prostą  $CD$  w punkcie  $D'$ . Trójkąty  $ADO$  i  $B'D'O$  są przystające (kbk), więc  $|D'B'| = |AD|$ .

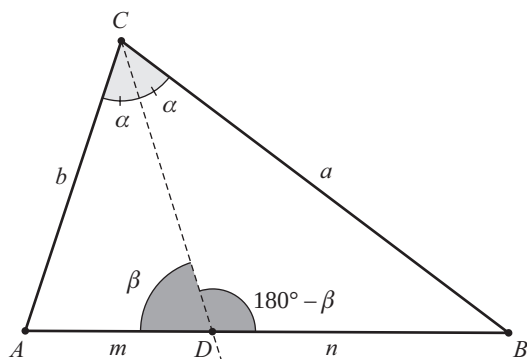
Z podobieństwa trójkątów  $DBC$  i  $D'B'C$  wynika, że

$$\frac{|D'B'|}{|DB|} = \frac{|B'C|}{|BC|},$$

czyli

$$\frac{|AD|}{|DB|} = \frac{|AC|}{|BC|},$$

co należało wykazać.

**Dowód 2.**

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.

Z twierdzenia sinusów zastosowanego do trójkątów  $ADC$  i  $DBC$  wynika, że

$$\frac{m}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}$$

oraz

$$\frac{n}{\sin \alpha} = \frac{a}{\sin(180^\circ + \beta)} = \frac{a}{\sin \beta}.$$

Dzieląc stronami równości

$$\frac{m}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} \text{ i } \frac{n}{\sin \alpha} = \frac{a}{\sin \beta},$$

otrzymujemy tezę:

$$\frac{m}{n} = \frac{b}{a},$$

co kończy dowód.

**Dowód 3.**

Oznaczenia takie jak w dowodzie 2.

Ponieważ stosunek pól trójkątów o równej wysokości równy jest stosunkowi długości ich podstaw, więc

$$\frac{P_{ADC}}{P_{DBC}} = \frac{m}{n}.$$

Z drugiej strony, mamy:

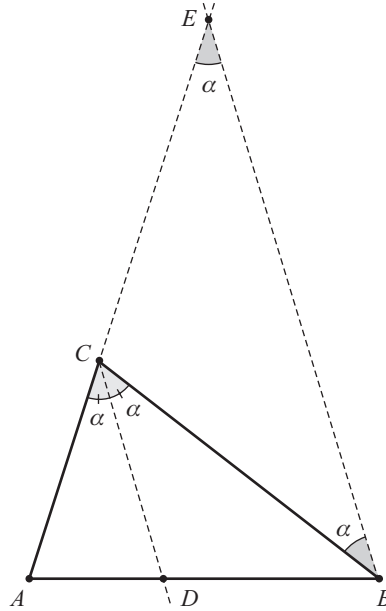
$$\frac{P_{ADC}}{P_{DBC}} = \frac{\frac{1}{2}b|CD|\sin \alpha}{\frac{1}{2}a|CD|\sin \alpha} = \frac{b}{a},$$

zatem

$$\frac{m}{n} = \frac{b}{a},$$

co należało wykazać.

#### Dowód 4.



Poprowadźmy prostą równoległą do dwusiecznej  $CD$  przechodzącą przez punkt  $B$ . Prosta ta przecina półprostą  $AC$  w punkcie  $E$ .

Ponieważ proste  $CD$  i  $BE$  są równoległe, więc

$$|\angle ACD| = \alpha = |\angle AEB| \text{ oraz } |\angle DCB| = \alpha = |\angle CBE|.$$

Zatem trójkąt  $BCE$  jest równoramienny, czyli  $|BC| = |CE|$ .

Z twierdzenia Talesa i powyższej równości otrzymujemy:

$$\frac{|AD|}{|DB|} = \frac{|AC|}{|CE|} = \frac{|AC|}{|BC|},$$

co kończy dowód.

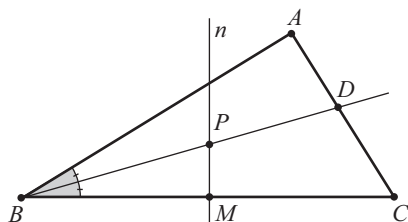
#### Twierdzenie P9.2.

Jeżeli dwusieczna kąta zewnętrznego w trójkącie przecina prostą na której leży bok przeciwny, to odcinki zawarte między punktem przecięcia i końcami tego boku są proporcjonalne do przyległych boków.

## 2.9. TWIERDZENIE O DWUSIECZNEJ

### Zadanie P9.1.

Niech  $ABC$  będzie trójkątem prostokątnym, którego kąt prosty znajduje się w wierzchołku  $A$ . Poprowadźmy dwusieczną  $BD$  kąta wewnętrznego przy wierzchołku  $B$ , a przez  $M$  oznaczmy środek przeciwprostokątnej  $BC$ . Następnie poprowadźmy przez punkt  $M$  prostą  $n$ , prostopadłą do  $BC$ . Prosta ta przecina prostą  $BD$  w punkcie  $P$ .

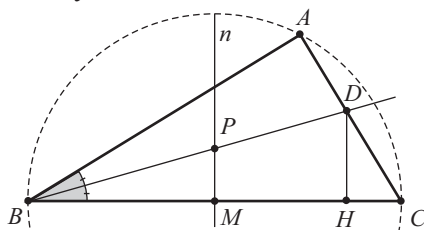


Wykaż, że

$$|CD| = 2|MP|.$$

### Rozwiązanie

Przyjmijmy oznaczenia na rysunku.



Z twierdzenia P9.1 otrzymujemy:

$$\frac{|CD|}{|AD|} = \frac{|BC|}{|AB|}.$$

Skąd

$$(1) |CD| = \frac{|BC| \cdot |AD|}{|AB|}.$$

Punkt  $H$  jest rzutem prostokątnym punktu  $D$  na przeciwprostokątną  $BC$ . Zauważmy, że trójkąty prostokątne  $BMP$  i  $BHD$  są podobne, zatem

$$(*) \frac{|HD|}{|BH|} = \frac{|MP|}{|BM|}.$$

Zauważmy też, że

- a) punkt  $D$  jest punktem dwusiecznej, zatem  $|DH| = |AD|$ ;  
 b) trójkąty  $BDH$  i  $BDA$  są prostokątne (kąty proste odpowiednio w wierzchołkach  $H$  i  $A$ ), mają wspólną przeciwprostokątną  $BD$  oraz równe kąty  $DBH$  i  $ABD$ , więc są przystające. Zatem

$$|BH| = |AB|.$$

- c) zauważmy dalej, że  $|BM| = \frac{|BC|}{2}$ .

Możemy teraz proporcję (\*) zapisać następująco:

$$\frac{|AD|}{|AB|} = \frac{|MP|}{\frac{|BC|}{2}},$$

skąd

$$|MP| = \frac{|AD| \cdot |BC|}{2 \cdot |AB|},$$

czyli

$$(2) \quad 2|MP| = \frac{|AD| \cdot |BC|}{|AB|}.$$

Porównując (1) i (2) otrzymujemy tezę:

$$|CD| = 2 \cdot |MP|.$$

## II sposób

Trójkąty  $ABD$  i  $BMP$  są podobne.

$$\text{Zatem } \frac{|PM|}{|BM|} = \frac{|AD|}{|AB|}, \rightarrow \frac{|PM|}{\frac{|BC|}{2}} = \frac{|AD|}{|AB|}, \rightarrow 2|PM| = \frac{|BC|}{|AB|} \cdot |AD|.$$

Wykorzystując twierdzenie o dwusiecznej otrzymujemy:

$$2|PM| = \frac{|BC|}{|AB|} \cdot |AD| = \frac{|DC|}{|DA|} \cdot |AD| = |DC|.$$

## III sposób

Z twierdzenia sinusów dla trójkąta  $BCD$  otrzymujemy:

$$\frac{|DC|}{\sin \alpha} = \frac{|BC|}{\sin |\angle BDC|}, \text{ gdzie } \alpha = |\angle CBD|.$$

Skąd

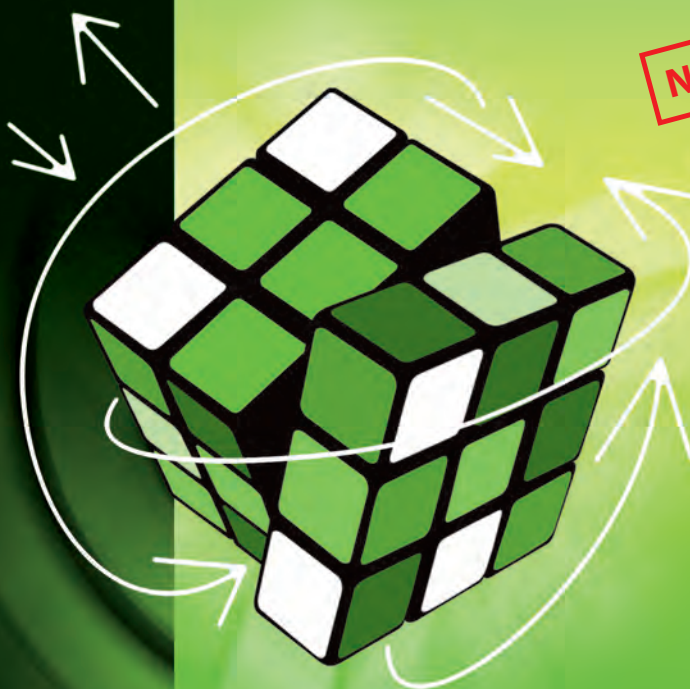
$$|DC| = \frac{|BC| \sin \alpha}{\sin(90^\circ + \alpha)} = 2|BM| \operatorname{tg} \alpha = 2|BM| \frac{|PM|}{|BM|} = 2|PM|.$$

Mateusz Wróbel  
Tomasz Szwed

# Zadania i problemy **MATEMATYCZNE**

Zbiór 270 oryginalnych zadań  
z rozwiązaniami i nie tylko

**Nowość!**



MATERIAŁ DLA UCZNIÓW  
SZKÓŁ ŚREDNICH



format 165 x 235 mm,  
stron 208

*Zacznij od zrobienia tego, co konieczne; potem zrób to, co możliwe.  
Nagle odkryjesz, że dokonałeś niemożliwego.*

św. Franciszek z Asyżu

**„Zadania i problemy matematyczne...”** adresujemy przede wszystkim do uczniów przygotowujących się do egzaminu maturalnego z matematyki na poziomie rozszerzonym. Znajdą oni w tym zbiorze blisko 270 oryginalnych zadań i problemów matematycznych. Każde zadanie – problem posiada pełne rozwiązanie i stanowi wartościowy materiał do samokształcenia oraz poznania różnorodnych metod i narzędzi matematycznych, służących efektywnemu rozwiązywaniu zadań.

Książka ta z powodzeniem wzbogaci warsztat pracy każdego nauczyciela matematyki. Będzie również cennym materiałem dydaktycznym dla nauczycieli przygotowujących uczniów do egzaminu maturalnego z matematyki na poziomie rozszerzonym. Zadania zawarte w tym zbiorze będą dobrym materiałem ćwiczeniowym na kółka matematyczne i inne zajęcia dodatkowe, mające na celu pogłębienie kompetencji matematycznych uczniów.

Zbiór składa się z trzech części:

- ◆ **zadania – „startery”** (z odpowiedziami),
- ◆ **zadania – problemy** (z pełnymi rozwiązaniami),
- ◆ **zadania przeznaczone do samodzielnego rozwiązania.**

Aby pomóc uczniowi w zorganizowaniu pracy, zbiór podzielono na trzydzieści jednostek – każda z nich zawiera dwa startery i pięć problemów. Na rozwiązanie zadań zawartych w jednej jednostce trzeba przeznaczyć około godziny.

Naturalnymi towarzyszami procesu uczenia się są: praca, trud, zaangażowanie, zmęczenie, niemoc, zniecierpliwienie i popełnianie błędów. Droga do sukcesu w matematyce nie jest łatwa i wymaga ciągłego podtrzymywania motywacji. Dlatego też zdecydowaliśmy się na zamieszczenie trzydziestu inspirujących myśli, zachęcających do pokonywania wszelkiego rodzaju trudności.

Uczenie się matematyki nie jest procesem linearnym, dlatego zadania nie są poukładane według działów programowych. Niezwykle ważną umiejętnością maturzysty jest dobór narzędzi właściwych do postawionego problemu. Aby ułatwić orientację w zawartości merytorycznej zadań i przypisanie ich do konkretnych działów programowych, przygotowaliśmy poniższy wykaz:

**Liczby. Dowody algebraiczne:** 1.1, 1.2, 2.1, 2.2, 3.1, 3.6, 3.7, 5.2, 5.4, 6.2, 7.1, 7.2, 8.1, 8.2, 8.7, 9.1, 9.2, 10.4, 10.5, 10.6, 17.2, 17.5, 18.2a, 20.4, 22.4, 22.5, 22.6, 23.6, 27.1, 29.3.  
Zadania do samodzielnego rozwiązania: 2, 13, 14, 26, 32, 40, 44, 45.

**Funkcje. Funkcja kwadratowa:** 2.6, 3.2, 3.4, 4.2, 5.1, 5.7, 6.1, 6.3, 6.5, 9.4, 14.6, 15.1,



16.3, 18.1, 18.2b, 18.3, 18.4, 19.2, 21.3, 21.6, 21.7, 25.5, 26.2, 28.1, 28.7, 29.1, 29.4, 30.2.  
Zadania do samodzielnego rozwiązania: 12, 30.

**Wielomiany i funkcja wymierna:** 4.1, 5.3, 6.7, 10.1, 10.2, 10.7, 11.3, 12.7, 13.1, 13.2, 13.3, 13.4, 14.1, 14.2, 14.4, 14.5, 14.7, 15.2, 15.3, 16.1, 16.2, 17.7, 28.2.  
Zadania do samodzielnego rozwiązania: 47, 49.

**Planimetria. Dowody geometryczne:** 1.7, 2.3, 2.4, 4.3, 4.4, 4.6, 6.6, 7.4, 9.3, 9.5, 9.6, 11.2, 11.5, 11.7, 12.1, 12.4, 12.5, 12.6, 13.6, 13.7, 14.3, 15.5, 16.7, 17.3, 17.4, 19.3, 19.5, 19.6, 20.5, 20.6, 20.7, 21.5, 22.3, 23.5, 23.7, 24.5, 25.4, 27.7, 28.3.  
Zadania do samodzielnego rozwiązania: 1, 10, 17, 38, 42, 48.

**Geometria analityczna:** 1.3, 1.4, 4.7, 5.6, 7.5, 7.6, 11.4, 16.6, 19.7, 23.3, 23.4, 24.4, 25.2, 25.3, 28.5.  
Zadania do samodzielnego rozwiązania: 15, 25, 31.

**Ciągi liczbowe:** 1.5, 2.7, 3.3, 3.5, 4.5, 9.7, 10.3, 11.6, 12.2, 16.4, 16.5, 19.1, 20.1, 25.6, 25.7, 26.3, 26.4, 26.5, 26.6, 26.7, 27.3, 27.4, 27.5, 29.5.  
Zadania do samodzielnego rozwiązania: 11, 41.

**Trygonometria:** 5.5, 8.6, 11.1, 17.1, 17.6, 29.2, 30.1.  
Zadania do samodzielnego rozwiązania: 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 22, 23, 24, 34, 39.

**Stereometria:** 7.7, 8.3, 8.4, 8.5, 13.5, 15.6, 18.5, 18.6, 18.7, 23.2, 24.1, 27.2, 28.4.  
Zadania do samodzielnego rozwiązania: 16, 28, 43, 46.

**Granice, pochodne, optymalizacja:** 7.3, 15.7, 19.4, 20.2, 21.1, 21.2, 22.1, 22.2, 24.6, 24.7, 27.6, 29.6, 29.7, 30.3, 30.4, 30.5, 30.6, 30.7.  
Zadania do samodzielnego rozwiązania: 18, 19, 21, 33.

**Kombinatoryka i rachunek prawdopodobieństwa:** 1.6, 2.5, 6.4, 12.3, 15.4, 20.3, 21.4, 22.7, 23.1, 24.2, 25.1, 26.1, 28.6.  
Zadania do samodzielnego rozwiązania: 20, 27, 29, 35, 36, 37, 50.

Wszystkim Czytelnikom życzymy wyraźnych postępów w kształtowaniu kompetencji matematycznych oraz wyników maturalnych na miarę marzeń, potrzeb edukacyjnych oraz włożonej pracy.

*Autorzy*

## Spis treści

|                                            |     |
|--------------------------------------------|-----|
| Problemy i startery .....                  | 6   |
| Odpowiedzi i rozwiązania.....              | 66  |
| Problemy do samodzielnego rozwiązania..... | 197 |
| Zadania.....                               | 197 |
| Odpowiedzi .....                           | 205 |

**1.1.** Oblicz:

a)  $\sqrt{10 - 2\sqrt{21}}$

b)  $\left(\sqrt{3 - \sqrt{2}} - \sqrt{3 + \sqrt{2}}\right)^2$

c)  $(\sqrt{3} - 1)^3 - (\sqrt{3} + 1)^2$

**1.2.** Pozbądź się niewymierności z mianownika ułamka:

a)  $\frac{\sqrt{7} - \sqrt{3}}{\sqrt{7} + \sqrt{3}}$

b)  $\frac{1}{\sqrt[3]{7} - \sqrt[3]{3}}$

c)  $\frac{1}{\sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{4} + 1}$

*Prawo przyciągania: szczęście sprzyja tym,  
którzy się starają.*

*Barbara Oakley*

**1.3.** Okrąg  $o_2$  ze środkiem leżącym na osi  $Ox$ , jest styczny zewnętrznie do okręgu  $o_1$  o równaniu  $(x-3)^2 + (y+5)^2 = 25$  i jednocześnie jest styczny do prostej  $x + 2\sqrt{6}y - 3 = 0$ .

Wyznacz równanie okręgu  $o_2$ . Rozważ wszystkie przypadki.

**1.4.** Punkt  $S$  leży na osi  $Ox$  i jest środkiem okręgu stycznego jednocześnie do obu prostych:  $4x - 3y + 21 = 0$  oraz  $3x + 4y - 28 = 0$ . Oblicz promień tego okręgu oraz wyznacz współrzędne punktu  $S$ . Rozważ wszystkie przypadki.

**1.5.** W trójwyrazowym ciągu geometrycznym  $(a, b, c)$  wszystkie wyrazy są dodatnie. Wyznacz wszystkie wartości ilorazu tego ciągu, dla których odcinki o długościach  $a, b, c$  tworzą trójkąt.

**1.6.** Oblicz, ile jest liczb sześciocyfrowych parzystych, które zawierają co najmniej cztery dwójki.

**1.7.** Długości boków trójkąta o obwodzie 30 tworzą ciąg arytmetyczny. Największy kąt tego trójkąta wynosi  $120^\circ$ . Oblicz pole tego trójkąta.

1. Oblicz promień okręgu opisanego na trapezie równoramiennym, w którym najdłuższy bok ma długość 22, a każdy z trzech pozostałych boków ma długość 10.
2. Uzasadnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych  $x, y$  prawdziwa jest nierówność  $4x(1 + y) - 2(x^2 + 2y^2) < 5$ .
3. Rozwiąż równanie  $\frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} = 6 \operatorname{tg} x$  w przedziale  $\langle 0; 2\pi \rangle$ .
4. Rozwiąż równanie  $\sin 2x - \cos x = \cos 2x + \sin x$  w przedziale  $\langle 0; 2\pi \rangle$ .
5. Rozwiąż równanie  $\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos 2x = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$  w przedziale  $\langle 0; 2\pi \rangle$ .
6. Rozwiąż równanie  $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin 2x$  w przedziale  $\langle -\pi; \pi \rangle$ .
7. Rozwiąż równanie  $5 \cos 2x + 4 \sin x \cdot \cos^2 x + 4 \sin x = -1$  w przedziale  $\langle 0; 2\pi \rangle$ .
8. Rozwiąż równanie  $2 \sin^2 x - \cos^2 2x = 1$  w przedziale  $\langle -\pi; \pi \rangle$ .
9. Rozwiąż równanie  $\frac{1}{\sin x} + \sin 2x \cdot \operatorname{tg} x = 3 \sin x$  w przedziale  $\langle -2\pi; 2\pi \rangle$ .

1.1. a)  $\sqrt{7} - \sqrt{3}$

b)  $6 - 2\sqrt{7}$

c)  $4\sqrt{3} - 14$

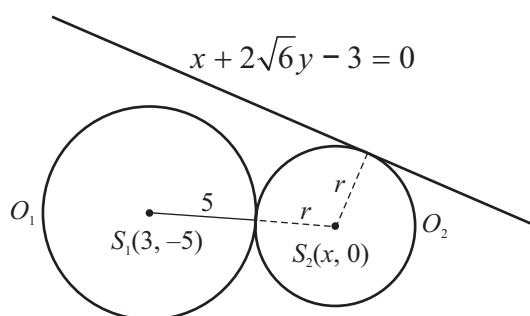
1.2. a)  $\frac{5 - \sqrt{21}}{2}$

b)  $\frac{\sqrt[3]{49} + \sqrt[3]{21} + \sqrt[3]{9}}{4}$

c)  $\frac{\sqrt[3]{4} + 1}{5}$

1.3.  $\left(x - \frac{61}{12}\right)^2 + y^2 = \frac{25}{144}$  lub  $\left(x - \frac{11}{12}\right)^2 + y^2 = \frac{25}{144}$

### Rozwiązanie



Z równania okręgu  $O_1$  mamy środek  $(3, -5)$  i promień długości 5. Środek okręgu  $O_2$  ma współrzędne  $(x, 0)$ , bo leży na osi  $Ox$ . Odległość punktu  $S_2 = (x, 0)$  od prostej  $x + 2\sqrt{6}y - 3 = 0$  jest równa  $r$ ,

$$\text{zatem } \frac{|1 \cdot x + 2\sqrt{6} \cdot 0 + (-3)|}{\sqrt{1^2 + (2\sqrt{6})^2}} = r \Leftrightarrow \frac{|x - 3|}{5} = r.$$

Z warunku na styczność zewnętrzną okręgów mamy:

$$|S_1 S_2| = 5 + r \Leftrightarrow \sqrt{(x - 3)^2 + (0 + 5)^2} = 5 + r \Leftrightarrow \sqrt{(x - 3)^2 + 25} = 5 + r.$$

Podstawiamy  $r = \frac{|x - 3|}{5}$  do równania  $\sqrt{(x - 3)^2 + 25} = 5 + r$ .

$$\sqrt{(x - 3)^2 + 25} = 5 + \frac{|x - 3|}{5} \quad | \cdot 5$$

$$5\sqrt{(x - 3)^2 + 25} = 25 + |x - 3|$$

Rozwiązujemy równanie w przedziałach:

**dla  $x \geq 3$**

$$5\sqrt{(x-3)^2 + 25} = 25 + x - 3$$

$$5\sqrt{(x-3)^2 + 25} = 22 + x \quad | \cdot ( )^2$$

$$25[(x-3)^2 + 25] = (22+x)^2$$

z powyższego równania mamy  $x_1 = \frac{61}{12}$  oraz  $x_2 = 3$ .

Jednak dla  $x = 3$  mamy  $r = 0$ , więc odrzucamy  $x = 3$ . Zatem  $S_2 = \left(\frac{61}{12}; 0\right)$ .

$$\text{Obliczamy } r = \frac{|x-3|}{5} = \frac{\left|\frac{61}{12}-3\right|}{5} = \frac{5}{12},$$

Mając środek  $S_2 = \left(\frac{61}{12}; 0\right)$  oraz  $r = \frac{5}{12}$ , otrzymujemy równanie okręgu

$$\left(x - \frac{61}{12}\right)^2 + y^2 = \frac{25}{144}.$$

**dla  $x < 3$**

$$5\sqrt{(x-3)^2 + 25} = 25 - x + 3$$

$$5\sqrt{(x-3)^2 + 25} = 28 - x \quad | \cdot ( )^2$$

$$25[(x-3)^2 + 25] = (28-x)^2$$

z powyższego równania mamy  $x_3 = \frac{11}{12}$  oraz  $x_4 = 3$ .

Jednak dla  $x = 3$  mamy  $r = 0$ , więc odrzucamy  $x = 3$ . Zatem  $S_2 = \left(\frac{11}{12}; 0\right)$ .

$$\text{Obliczamy } r = \frac{|x-3|}{5} = \frac{\left|\frac{11}{12}-3\right|}{5} = \frac{5}{12}.$$

Mając środek  $S_2 = \left(\frac{11}{12}; 0\right)$  oraz  $r = \frac{5}{12}$ , otrzymujemy równanie okręgu

$$\left(x - \frac{11}{12}\right)^2 + y^2 = \frac{25}{144}.$$

# MATEMATYKA

Gruntowne powtórki  
przedmaturalne

ZAKRES PODSTAWOWY

Tomasz Szwed  
Janusz Karkut  
Sylwia Kownacka



**854** zadania  
poukładane  
małymi porcjami



format 205 x 292 mm,  
stron 276

# Spis treści

|                                                                                        |     |
|----------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Wstęp .....                                                                            | 5   |
| Porcja 1. Liczby i działania .....                                                     | 7   |
| Porcja 2. Liczby – własności potęg i logarytmów .....                                  | 12  |
| Porcja 3. Liczby – wartość bezwzględna, obliczenia procentowe i błędy przybliżeń ..... | 17  |
| Porcja 4. Liczby – potęgi, pierwiastki i logarytmy .....                               | 23  |
| Test samokontrolny nr 1 .....                                                          | 27  |
| Porcja 6. Równania, nierówności i układy równań liniowych .....                        | 32  |
| Porcja 7. Wzory skróconego mnożenia .....                                              | 37  |
| Porcja 8. Równania kwadratowe i wymierne .....                                         | 42  |
| Porcja 9. Nierówności kwadratowe .....                                                 | 47  |
| Test samokontrolny nr 2 .....                                                          | 54  |
| Test samokontrolny nr 3 .....                                                          | 60  |
| Porcja 12. Funkcja – podstawowe pojęcia .....                                          | 65  |
| Porcja 13. Funkcja liniowa i jej własności .....                                       | 73  |
| Porcja 14. Własności funkcji kwadratowej .....                                         | 80  |
| Porcja 15. Różne postacie funkcji kwadratowej .....                                    | 88  |
| Porcja 16. Funkcja kwadratowa – podsumowanie .....                                     | 93  |
| Porcja 17. Hiperbola i funkcja wykładnicza .....                                       | 97  |
| Test samokontrolny nr 4 .....                                                          | 103 |
| Test samokontrolny nr 5 .....                                                          | 108 |
| Porcja 20. Ciąg liczbowy. Wprowadzenie do ciągu arytmetycznego .....                   | 113 |
| Porcja 21. Ciąg arytmetyczny .....                                                     | 118 |
| Porcja 22. Ciąg geometryczny .....                                                     | 123 |
| Porcja 23. Trygonometria .....                                                         | 127 |
| Test samokontrolny nr 6 .....                                                          | 133 |
| Test samokontrolny nr 7 .....                                                          | 137 |
| Porcja 26. Własności trójkątów i czworokątów .....                                     | 141 |
| Porcja 27. Pola czworokątów .....                                                      | 147 |
| Porcja 28. Przekątne i miary kątów wewnętrznych wielokątów .....                       | 151 |



|                                                                                       |     |
|---------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Porcja 29. Kąty związane z okręgiem .....                                             | 155 |
| Test samokontrolny nr 8 .....                                                         | 163 |
| Test samokontrolny nr 9 .....                                                         | 167 |
| Porcja 32. Równanie prostej, równoległość i prostopadłość .....                       | 173 |
| Porcja 33. Geometria analityczna – odległości i środek odcinka. Symetrie .....        | 182 |
| Test samokontrolny nr 10 .....                                                        | 190 |
| Test samokontrolny nr 11 .....                                                        | 196 |
| Test samokontrolny nr 12 .....                                                        | 202 |
| Porcja 37. Sześcian. Liczba wierzchołków, ścian i krawędzi różnych wielościanów ..... | 207 |
| Porcja 38. Graniastosłupy i ostrosłupy .....                                          | 211 |
| Porcja 39. Figury obrotowe .....                                                      | 215 |
| Test samokontrolny nr 13 .....                                                        | 219 |
| Porcja 41. Elementy statystyki .....                                                  | 224 |
| Porcja 42. Kombinatoryka .....                                                        | 229 |
| Porcja 43. Rachunek prawdopodobieństwa .....                                          | 233 |
| Porcja 44. Rachunek prawdopodobieństwa – ćwiczenia utrwalające .....                  | 237 |
| Test samokontrolny nr 14 .....                                                        | 242 |
| Test samokontrolny nr 15 .....                                                        | 248 |
| Test samokontrolny nr 16 .....                                                        | 253 |
| Test samokontrolny nr 17 .....                                                        | 258 |
| Test samokontrolny nr 18 .....                                                        | 262 |
| Test samokontrolny nr 19 .....                                                        | 267 |
| Test samokontrolny nr 20 .....                                                        | 272 |

# Wstęp

*Nie ma znaczenia, jak duże robisz postępy – ważne, że się nie poddajesz.  
Konfucjusz*

Drogie Uczennice, Drodzy Uczniowie!

Na przygotowanie *Gruntownych powtórek przedmaturalnych* poświęciliśmy blisko dwa lata naszej pracy. Staraliśmy się przygotować zadania o wysokich walorach edukacyjnych. Całość materiału podzieliliśmy na pięćdziesiąt jeden „porcji” – trzydzieści jeden merytorycznych i dwadzieścia samokontrolnych. Chcemy, aby tak uporządkowany materiał ułatwił Wam dogłębne powtarzanie oraz zastosowanie zdobytych kompetencji w różnorodnym kontekście.

Zbiór ten polecamy szczególnie tym, którzy chcą przyzwoicie zdać egzamin maturalny na poziomie podstawowym, według tzw. nowej formuły (od 2015 r.).

Zależy nam na Waszych postępach. Zestawy zadań mają na celu przypomnienie, uporządkowanie i utrwalenie wcześniej nabytych przez Was umiejętności. Odpowiednio dobrane „porcje” zadań ułatwiają powtarzanie poszerzające i pogłębiające (nauczycie się więcej i lepiej to zrozumiecie).

Stawiamy na różnorodność i nieprzewidywalność zadań. Niektóre zadania są bardzo nietypowe, jednak większość z nich powstała na bazie oryginalnych zadań maturalnych Centralnej Komisji Egzaminacyjnej. Odpowiedzi do zadań, dostępne po każdej „porcji”, ułatwią samokontrolę. Przygotowane i pogrupowane zadania nie wyczerpują wszystkich wymagań zapisanych w aktualnej podstawie programowej z matematyki, ale świadome i samodzielne ich rozwiązywanie daje solidne podstawy do rozwiązywania zadań trudniejszych.

Nasza publikacja jest przygotowana w formacie sprzyjającym uczeniu się, czyli w A4. Zachęcamy Was do notowania, pisania, podkreślania, rozwiązywania zadań na marginesie, wolnych przestrzeniach między zadaniami oraz zakratkowanych miejscach.

Czytajcie cele każdej porcji i spróbujcie się z nimi utożsamić, traktując je jak swoje. Po każdej „porcji” merytorycznej postarajcie się odpowiedzieć na pytanie kluczowe, dokonajcie też krótkiej samooceny.

Zachęcamy Was do świadomego zaangażowania się w proces uczenia się matematyki.

Życzymy Wam powodzenia!

Autorzy

Oznaczenia:



zadanie testowe



zadanie na dowodzenie

- ✓ Potencjalni odbiorcy: Uczniowie, którzy chcą przyzwoicie zdać obowiązkowy egzamin maturalny z matematyki na poziomie podstawowym, mimo że matematyka nie jest, póki co, ich pasją.
- ✓ Kiedy korzystać z tego zbioru? W pracy indywidualnej, podczas lekcji powtórzeniowych, na różnych zajęciach dodatkowych.

## Porcja 22. Ciąg geometryczny

*Zestaw wybranych wzorów matematycznych – strona 3.  
Miejsce w podstawie programowej: IV.5.2 – 4.*

**Cel** Przypomnę sobie i utrwale podstawowe własności ciągu geometrycznego.

### Zadanie 1.

Pierwszy wyraz ciągu geometrycznego jest równy 3, a drugi jest równy  $-6$ . Oblicz szósty wyraz tego ciągu.

### Zadanie 2.

Dany jest trzywyrazowy ciąg geometryczny  $(36, 12, m + 5)$ . Oblicz  $m$ .

### Zadanie 3.

Wyznacz  $x$ , jeśli wiadomo, że ciąg  $(10, 20, 2x + 1)$  jest trzywyrazowym ciągiem geometrycznym.

### Zadanie 4.

Dany jest ciąg geometryczny  $(x, 3x^2, 9x^3, 27)$  o wyrazach dodatnich. Oblicz  $x$ .

### Zadanie 5.

W ciągu geometrycznym  $(a_n)$  dane są:  $a_4 = 16$  i  $a_8 = 256$ . Oblicz  $a_1 - a_7$ .

### Zadanie 6.

Dany jest trzywyrazowy ciąg geometryczny  $(3a - 5, 26, 39)$ . Oblicz  $a$ .

### Zadanie 15.

Dany jest niemonotoniczny ciąg geometryczny  $(2m, -5, 6p + 1, -125)$ . Oblicz  $m \cdot p$ .

### Zadanie 16.

Między liczby 3 i 18 wstaw dwie liczby dodatnie tak, aby trzy pierwsze tworzyły ciąg geometryczny, a trzy ostatnie ciąg arytmetyczny.

### Zadanie 17.

Dany jest ciąg geometryczny  $1, 3, 9, x, y, \dots$ . Oblicz wartość różnicy  $x - y$ .

### Zadanie 18.

W ciągu geometrycznym o ilorazie całkowitym dane są trzy kolejne wyrazy:  $3x - 2, x - 10, 8x$ . Wyznacz  $x$ .

### Zadanie 19.

Oblicz sumę dwudziestu kolejnych wyrazów ciągu geometrycznego  $5^1, 5^2, 5^3, \dots$

### Zadanie 20.

W ciągu geometrycznym  $(a_n)$  dane są:  $a_1 = 4$  i  $a_2 = 12$ . Oblicz  $a_{10}$ .

**Co ma wspólnego ciąg geometryczny z geometrią?**

**SAMOOCENA**

**Po dzisiejszej powtórce umiem: Zaznacz + / -**

1. Wyznaczyć kolejne wyrazy ciągu geometrycznego.
2. Zastosować wzór na  $n$ -ty wyraz ciągu geometrycznego.
3. Użyć w zadaniu wzoru na sumę  $n$  kolejnych wyrazów ciągu geometrycznego.
4. Wykorzystać własność trzech kolejnych wyrazów ciągu geometrycznego.



## Test samokontrolny nr 6

### Zadanie 1.

Siódmym wyrazem ciągu określonego wzorem ogólnym  $a_n = (-1)^n \cdot 2^n$  jest:

- A. -14      B. 128      C. -128      D. 14

### Zadanie 2.

Dany jest ciąg określony wzorem ogólnym  $a_n = (-\sqrt{3}) \cdot (n^2 - 16)$ . Piątym wyrazem tego ciągu jest:

- A.  $-81\sqrt{3}$       B.  $-9\sqrt{3}$       C.  $27\sqrt{3}$       D.  $81\sqrt{3}$

### Zadanie 3.

Dany jest ciąg arytmetyczny, którego pierwszym wyrazem jest 2, zaś różnicą jest  $r = 5$ . Siódmym wyrazem tego ciągu jest zatem:

- A. 10      B. 70      C. 32      D. 37

### Zadanie 4.

Dany jest ciąg arytmetyczny, w którym  $a_{16} = 23$  i  $a_4 = 5$ . Różnicą tego ciągu i wyrazem dziętym są odpowiednio:

- A.  $\frac{7}{3}; 19$       B.  $\frac{3}{2}; -4$       C.  $\frac{2}{3}; 9$       D.  $\frac{3}{2}; 14$

### Zadanie 5.

Pierwszym wyrazem ciągu arytmetycznego jest 2, zaś szóstym jest 17. Różnicą tego ciągu jest zatem:

- A. 3      B.  $\frac{5}{2}$       C. 15      D.  $\frac{7}{2}$

### Zadanie 6.

Ile jest wyrazów między wyrazami 9 i  $\frac{1}{27}$  ciągu geometrycznego o ilorazie  $\frac{1}{3}$ ?

- A. 3      B. 4      C. 5      D. 6

## Odpowiedzi

1. C

2. B

3. C

4. D

5. A

6. B

7. A

8. B

9. C

10. A

11. 14, 17, 20

12. 36, 144, 576

13.  $20^\circ$ ,  $60^\circ$

14. 1092

15.  $a_1 = \frac{1}{3}$ ,  $r = \frac{2}{3}$

16. Szkic dowodu:

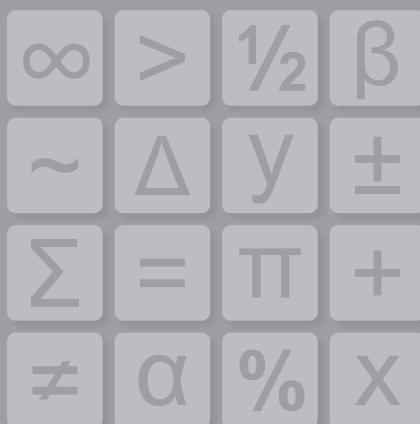
wyznacz  $n$  z równania  $\frac{2\sqrt{3} + 20\sqrt{3}}{2} n = 77\sqrt{3}$ .

Elżbieta Świda  
Elżbieta Kurczab  
Marcin Kurczab  
Małgorzata Przeniosło

Powtórka przed maturą

# MATEMATYKA

Zadania



ZAKRES PODSTAWOWY



format 165 x 235 mm,  
stron 216

# Wstęp

Chc<sup>1</sup>c pomóc maturzystom w dobrym przygotowaniu do matury, opracowaliśmy ksi<sup>1</sup>żkê, która u<sup>3</sup>atwi powtórzenie i utrwalenie ca<sup>3</sup>ego materia<sup>3</sup>u nauczania matematyki obowi<sup>1</sup>zuj<sup>1</sup>cego na egzaminie na poziomie podstawowym.

Ka<sup>3</sup>dy z dwunastu rozdzia<sup>3</sup>ów otwiera krótkie przypomnienie wiadomości teoretycznych. Po nim nastêpuj<sup>1</sup> zadania o takiej strukturze, jak zadania na maturze. S<sup>1</sup> zatem zadania testowe jednokrotnej odpowiedzi, póŹniej zadania za 2 punkty, czyli zadania krótkiej odpowiedzi. Wêród nich wa<sup>3</sup>n<sup>1</sup> rolê odgrywaj<sup>1</sup> zadania na dowodzenie. Ka<sup>3</sup>dy rozdzia<sup>3</sup> koñcz<sup>1</sup> zadania rozszerzonej odpowiedzi. S<sup>1</sup> to zadania za 4, 5 lub 6 punktów.

Do zadañ podaliśmy odpowiedzi, a do trudniejszych – w tym do zadañ na dowodzenie – wskazówki. Zachêcamy jednak do samodzielnego rozwi<sup>1</sup>zywania zadañ i do niezra<sup>3</sup>ania siê pocz<sup>1</sup>tkowymi k<sup>3</sup>opotami. Ze wskazówek radzimy korzystaê dopiero wtedy, gdy wszelkie próby samodzielnego rozwi<sup>1</sup>zania zadania zakoñcz<sup>1</sup> siê niepowodzeniem. Warto zawsze pamiêtaê, Źe mog<sup>1</sup> istnieã inne sposoby rozwi<sup>1</sup>zania zadania ni<sup>3</sup> sugerowane we wskazówce.

Wszystkim maturzystom Źyczymy sukcesów na maturze z matematyki!

*Autorzy*

## SPIS TREŒCI

---

|                                                                                  |     |
|----------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 1. Zbiory liczbowe. Wartoœæ bezwzglêdna. Przybli <sup>3</sup> enia .....         | 5   |
| 2. Wyra <sup>3</sup> enia algebraiczne .....                                     | 14  |
| 3. W <sup>3</sup> asnoœci funkcji. Funkcja liniowa .....                         | 23  |
| 4. Funkcja kwadratowa .....                                                      | 35  |
| 5. Wielomiany. Proporcjonalnoœæ odwrotna. Funkcja wyk <sup>3</sup> adnicza ..... | 44  |
| 6. Ci <sup>1</sup> gi liczbowe .....                                             | 56  |
| 7. Trygonometria k <sup>1</sup> ta ostrego .....                                 | 67  |
| 8. Planimetria, cz. 1. Wiadomoœci wstêpne. Trójk <sup>1</sup> ty .....           | 76  |
| 9. Planimetria, cz. 2. Czworok <sup>1</sup> ty. Wielok <sup>1</sup> ty .....     | 95  |
| 10. Geometria analityczna .....                                                  | 102 |
| 11. Rachunek prawdopodobieñstwa i statystyka .....                               | 113 |
| 12. Stereometria .....                                                           | 126 |
| Odpowiedzi .....                                                                 | 140 |



## 1

## Zbiory liczbowe. Wartość bezwzględna. Przybliżenia

### Przypomnienie

#### Liczby i zbiory liczbowe

**Zbiór liczb naturalnych:**  $N = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, \dots\}$

**Liczb<sup>1</sup> pierwsz<sup>1</sup>** nazywamy każd<sup>1</sup> liczbê naturaln<sup>1</sup>  $n$  większ<sup>1</sup> od 1, której jedy-  
nymi dzielnikami s<sup>1</sup> 1 oraz  $n$ .

**Liczb<sup>1</sup> z<sup>3</sup>o<sup>3</sup>on<sup>1</sup>** nazywamy każd<sup>1</sup> liczbê naturaln<sup>1</sup> większ<sup>1</sup> od 1, która nie jest  
liczb<sup>1</sup> pierwsz<sup>1</sup>.

**Zbiór liczb ca<sup>3</sup>kowitych:**  $C = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 5, -5, 6, -6, 7, -7, \dots\}$

**Liczb<sup>1</sup> parzyst<sup>1</sup>** nazywamy każd<sup>1</sup> liczbê ca<sup>3</sup>kowit<sup>1</sup> podzieln<sup>1</sup> przez 2; **liczb<sup>1</sup> nie-  
parzyst<sup>1</sup>** nazywamy każd<sup>1</sup> liczbê ca<sup>3</sup>kowit<sup>1</sup> niepodzieln<sup>1</sup> przez 2.

Uwaga: Liczba 0 jest liczb<sup>1</sup> parzyst<sup>1</sup>.

**Liczb<sup>1</sup> wymiern<sup>1</sup>** nazywamy liczbê, któr<sup>1</sup> można zapisać w postaci  $\frac{p}{q}$ , gdzie  $p, q$   
s<sup>1</sup> liczbami ca<sup>3</sup>kowitymi i  $q$  jest różn<sup>1</sup> od 0. Pozosta<sup>3</sup>e liczby nazywamy **liczbami  
niewymiernymi**.

Liczbami wymiernymi s<sup>1</sup> u<sup>3</sup>amki dziesiętne skończone i u<sup>3</sup>amki dziesiętne nie-  
skończone okresowe. U<sup>3</sup>amki dziesiętne nieskończone nieokresowe s<sup>1</sup> liczbami  
niewymiernymi.

Wszystkie liczby wymierne i wszystkie liczby niewymierne tworz<sup>1</sup> zbiór **liczb  
rzeczywistych**, który oznaczamy liter<sup>1</sup> **R**.

**Liczb<sup>1</sup> przeciwn<sup>1</sup>** do liczby  $a$  nazywamy liczbê  $-a$ . Suma liczby  $a$  i liczby do niej  
przeciwnej jest równa zeru.

$$a + (-a) = 0$$

**Odwrotność<sup>1</sup> liczby  $a$**  różnej od zera nazywamy liczbê  $\frac{1}{a}$ . Iloczyn liczby  $a$   
i odwrotności tej liczby jest równy 1.

$$a \cdot \frac{1}{a} = 1$$

Procent, promil

Jeden **procent** liczby  $x$  to  $0,01$  liczby  $x$ , czyli  $1\%x = 0,01x$ .

Jeden **promil** liczby  $x$  to  $0,001$  liczby  $x$ , czyli  $1\text{‰}x = 0,001x$ .

Wartość bezwzględna

**Wartości bezwzględne** liczby rzeczywistej  $x$  nazywamy tę samą liczbę  $x$ , jeżeli  $x \geq 0$  albo liczbę  $-x$ , jeżeli  $x < 0$ .

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{jeżeli } x \geq 0 \\ -x, & \text{jeżeli } x < 0 \end{cases}$$

Odległość na osi liczbowej między liczbami  $a$  oraz  $b$  jest równa  $|a - b|$ .

Błądy przybliżenia

**Błędem bezwzględnym przybliżenia** nazywamy wartość bezwzględną różnicy między wartością dokładną ( $r$ ) a wartością przybliżoną ( $p$ ), czyli  $|r - p|$ .

**Błędem względnym przybliżenia** nazywamy liczbę równą  $\frac{|r - p|}{|r|}$ , gdzie  $|r - p|$  jest błędem bezwzględnym przybliżenia, zaś  $|r|$  wartością bezwzględną wielkości rzeczywistej  $r \neq 0$ .

**Błędem procentowym przybliżenia** nazywamy błąd względny wyrażony w procentach, czyli  $\frac{|r - p|}{|r|} \cdot 100\%$ .

**Zadania testowe**

1. Ile jest liczb pierwszych należących do przedziału  $\langle -2; 6 \rangle$ ?

A. dziewięć

B. siedem

C. pięć

D. trzy

2. Ile jest liczb naturalnych parzystych spełniających nierówność  $a \leq 7$ ?

A. są tylko trzy takie liczby

B. są tylko cztery takie liczby

C. jest tylko pięć takich liczb

D. jest sześć takich liczb

## Zadania krótkiej odpowiedzi

1. Każdy uczeń klasy 3a chodzi na zajęcia dodatkowe z matematyki lub z fizyki. Na zajęcia z matematyki uczęszcza 23 uczniów, a na zajęcia z fizyki – 14 uczniów. Na jedno i drugie zajęcia chodzi 8 uczniów. Ilu uczniów liczy klasa 3a?

2. Liczbę 3,25 zaokrąglij do części dziesiętnych. Oblicz błąd bezwzględny i błąd względny takiego przybliżenia.

3. Dany jest prostokąt o bokach długości  $\sqrt{3}$  i  $2\sqrt{3}$ .

a) Oblicz pole tego prostokąta.

b) Oblicz błąd względny, gdy obliczając pole prostokąta, zaokrąglišz  $\sqrt{3}$  do części dziesiętnych.

4. Przybliżenie z nadmiarem liczby  $x$  jest równe 26,19, a błąd bezwzględny tego przybliżenia jest równy 2,91. Oblicz błąd procentowy tego przybliżenia.

5. Liczbę 3,2 przybliżono z niedomiarem. Wiedząc, że błąd względny tego przybliżenia jest równy  $\frac{1}{16}$ , oblicz błąd bezwzględny.

6. Dany jest prostokąt o bokach długości  $a$  i  $b$ . Długość każdego boku zmniejszono o 20%. Oblicz, o ile procent zmalały pole oraz obwód tego prostokąta.

7. W klasie jest 16 dziewcząt i 18 chłopców.

a) O ile procent liczba chłopców jest większa od liczby dziewcząt?

b) O ile procent liczba dziewcząt jest mniejsza od liczby chłopców?

8. Cenę początkową pewnego towaru podwyższono dwukrotnie: najpierw o 20%, a następnie o 30%. O ile procent cena końcowa tego towaru jest wyższa od ceny początkowej?

9. W klasie 3b 62,5% uczniów stanowi dziewczęta, a 20% dziewcząt z tej klasy trenuje siatkówkę. Ile procent uczniów klasy 3b stanowi dziewczęta trenujące siatkówkę?

10. Cena pewnego towaru wraz z 7-procentowym podatkiem VAT jest równa 7169 zł. O ile złotych wzrosła cena tego towaru, gdyby podatek VAT na ten towar został podniesiony do 22%?

11. Przedstaw liczbę  $2,3(7) + 0,(7)$  w postaci ułamka zwykłego nieskracalnego.

## Zadania rozszerzonej odpowiedzi

1. (4 pkt) Wyznacz wszystkie wartości  $n$ ,  $n \in \mathbb{N}_+$ , dla których ułamek  $\frac{7n}{220}$  jest mniejszy od 1 i ma rozwinięcie dziesiętne skończone.

2. (4 pkt) Liczba  $a$  spełnia warunek  $\frac{2a-1}{5} = \frac{a+4}{7}$ , liczba  $b$  spełnia warunek  $\frac{b^2-1}{b+5} = b+3$ . Wykaż, że suma kwadratów liczb  $a$  i  $b$  jest liczbą pierwszą.

3. (4 pkt) Dane są zbiory:

$A$  – zbiór liczb naturalnych dwucyfrowych mniejszych od 50, które przy dzieleniu przez 7 dają resztę 3;

$B$  – zbiór liczb naturalnych dwucyfrowych mniejszych od 50 i podzielnych przez 5.

Wyznacz zbiory:  $A \cup B$ ,  $A \cap B$ ,  $A - B$ ,  $B - A$ .

4. (4 pkt) Iloczyn liczb naturalnych  $a$ ,  $b$  jest równy 12. Wyznacz wszystkie pary  $(a, b)$ , wiedząc, że liczba  $a$  jest liczbą złożoną.

5. (6 pkt) Suma dwóch liczb naturalnych dodatnich jest równa 252, a ich największy wspólny dzielnik jest równy 21. Wyznacz te liczby.

6. (4 pkt) Przedział  $K$  składa się z liczb rzeczywistych na osi liczbowej, których odległość od liczby 1,5 jest nie większa niż 6. Przedział  $L$  powstał przez przesunięcie przedziału  $K$  wzdłuż osi o trzy jednostki w kierunku dodatnim.

a) Wyznacz przedziały  $K$  i  $L$ .

b) Wyznacz wszystkie liczby naturalne należące jednocześnie do przedziału  $K$  i  $L$ .

7. (5 pkt) Wyznacz takie wartości  $m$ ,  $m \in \mathbb{R}$ , dla których przedziały  $A = (-5, 2m + 1)$  i  $B = (4m - 5, 15)$  są zbiorami niepustymi i jednocześnie są rozłączne.

8. (4 pkt) Zbiór  $A$  jest zbiorem rozwiązań nierówności  $|x - 1| > 20\sqrt{3}$ .

a) Wyznacz wszystkie liczby naturalne podzielne przez 6, które nie należą do zbioru  $A$ .

b) Wykaż, że liczba  $\sqrt{49 \cdot 11 + 49 \cdot 16}$  należy do zbioru  $A$ .

9. (5 pkt) Cena kilograma jabłek jest dwukrotnie wyższa od ceny kilograma bananów.

a) Jeżeli cena jabłek zmaleje o 10%, zaś bananów wzrośnie o 32%, to o ile procent więcej niż obecnie trzeba będzie zapłacić za 3 kg jabłek i 2 kg bananów?

b) Jeżeli cena jabłek zmaleje o 10%, to o ile procent powinna wzrosnąć cena bananów, aby za 3 kg jabłek i 2 kg bananów zapłacić tyle, co przed zmianą cen?

# ANALIZA MATEMATYCZNA

dla licealistów i studentów



Krzysztof Kłaczko  
Marcin Kurczab  
Elżbieta Świda

REPETYTORIUM



format 165 x 235 mm,  
stron 252

## Spis treści

### ROZDZIAŁ 1.

|                                                                                 |          |
|---------------------------------------------------------------------------------|----------|
| <b>Granica i ciągłość funkcji .....</b>                                         | <b>5</b> |
| 1.1. Granica funkcji w punkcie.....                                             | 5        |
| Obliczanie granic funkcji w punkcie .....                                       | 20       |
| 1.2. Granica niewłaściwa, granica w nieskończoności, granice jednostronne ..... | 26       |
| Granica niewłaściwa funkcji w punkcie .....                                     | 26       |
| Granica funkcji w nieskończoności .....                                         | 29       |
| Granice jednostronne funkcji w punkcie .....                                    | 37       |
| 1.3. Asymptoty wykresu funkcji.....                                             | 46       |
| Asymptoty pionowe.....                                                          | 46       |
| Asymptoty poziome.....                                                          | 50       |
| Asymptoty ukośne .....                                                          | 54       |
| 1.4. Ciągłość funkcji .....                                                     | 59       |
| Ciągłość funkcji w punkcie .....                                                | 59       |
| Ciągłość funkcji w przedziale liczbowym.....                                    | 68       |

### ROZDZIAŁ 2.

|                                                              |           |
|--------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Pochodna funkcji.....</b>                                 | <b>82</b> |
| 2.1. Pochodna funkcji w punkcie.....                         | 82        |
| Interpretacja geometryczna pochodnej funkcji w punkcie ..... | 92        |
| Własności pochodnej funkcji w punkcie .....                  | 94        |
| 2.2. Pochodna funkcji w zbiorze .....                        | 97        |
| 2.3. Funkcja pochodna.....                                   | 98        |
| Podstawowe własności pochodnej funkcji .....                 | 102       |
| Pochodna funkcji złożonej.....                               | 113       |
| Pochodna funkcji odwrotnej .....                             | 122       |
| 2.4. Zastosowania pochodnej funkcji .....                    | 124       |
| Pochodna funkcji a monotoniczność funkcji.....               | 124       |
| Ekstrema lokalne funkcji.....                                | 131       |

|                                                  |     |
|--------------------------------------------------|-----|
| Ekstrema globalne .....                          | 142 |
| Ekstrema globalne w przedziale domkniętym.....   | 142 |
| Ekstrema globalne w przedziale otwartym.....     | 145 |
| Zadania optymalizacyjne .....                    | 148 |
| 2.5. Dalsze zastosowania pochodnej .....         | 163 |
| Reguła de L'Hôspitala .....                      | 163 |
| Pochodne wyższych rzędów .....                   | 172 |
| Druga pochodna a wypukłość funkcji .....         | 173 |
| Druga pochodna a ekstremum lokalne funkcji ..... | 181 |
| Badanie przebiegu zmienności funkcji.....        | 185 |

## ROZDZIAŁ 3.

|                                                                |            |
|----------------------------------------------------------------|------------|
| <b>Całka nieoznaczona .....</b>                                | <b>200</b> |
| 3.1. Funkcja pierwotna i całka nieoznaczona .....              | 200        |
| 3.2. Podstawowe twierdzenia dotyczące całki nieoznaczonej..... | 203        |
| 3.3. Podstawowe metody całkowania.....                         | 206        |
| Metoda całkowania przez części .....                           | 206        |
| Metoda całkowania przez podstawienie .....                     | 209        |

## ROZDZIAŁ 4.

|                                                       |            |
|-------------------------------------------------------|------------|
| <b>Całka oznaczona .....</b>                          | <b>216</b> |
| 4.1. Definicja i własności całki oznaczonej.....      | 216        |
| 4.2. Interpretacja geometryczna całki oznaczonej..... | 222        |
| 4.3. Inne zastosowania całki oznaczonej .....         | 228        |

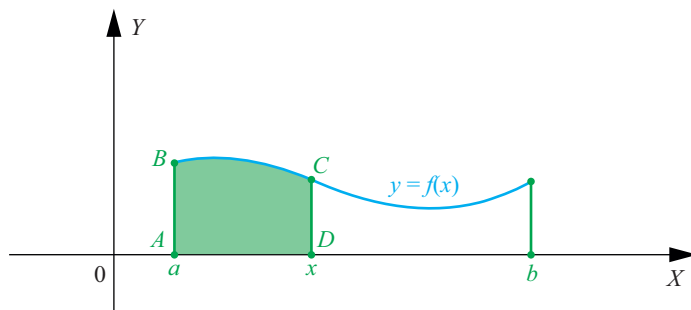
## TESTY

|                                                          |            |
|----------------------------------------------------------|------------|
| <b>Test 1. Granica i ciągłość funkcji .....</b>          | <b>233</b> |
| <b>Test 2. Pochodna funkcji .....</b>                    | <b>238</b> |
| <b>Test 3. Całka nieoznaczona i całka oznaczona.....</b> | <b>244</b> |
| Odpowiedzi do testu 1 .....                              | 250        |
| Odpowiedzi do testu 2 .....                              | 250        |
| Odpowiedzi do testu 3 .....                              | 251        |

## 4.2. Interpretacja geometryczna całki oznaczonej

Udowodnimy teraz pewne twierdzenie, które pozwoli nam na interpretację geometryczną całki oznaczonej.

Niech będzie dana funkcja  $f$ , określona w przedziale  $\langle a, b \rangle$ , ciągła i nieujemna w tym przedziale. Dla  $x \in \langle a, b \rangle$  oznaczmy przez  $P(x)$  pole figury  $ADCB$  (nazywanej trapezem krzywoliniowym):



Zachodzi następujące

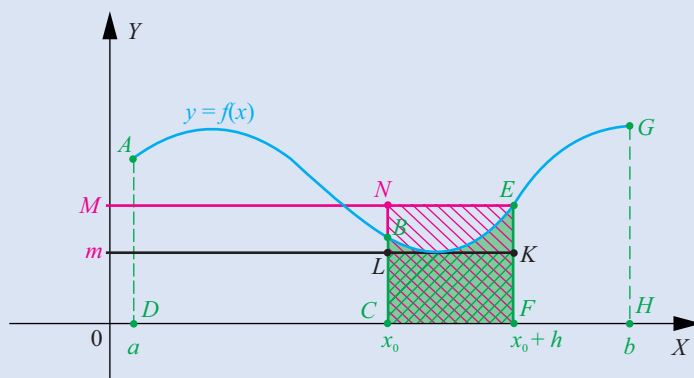


### TWIERDZENIE 3. (Newtona - Leibniza)

Funkcja  $P$  jest funkcją pierwotną funkcji  $f$  w przedziale  $\langle a, b \rangle$ .

#### Dowód.

Weźmy najpierw dowolne  $x_0 \in \langle a, b \rangle$ , a następnie dowolną liczbę  $h \neq 0$ , dla której  $x_0 + h \in \langle a, b \rangle$ .



Zauważmy, że liczba  $|P(x_0 + h) - P(x_0)|$  wyraża pole  $S_{BCFE}$  figury  $BCFE$ . Jeżeli bowiem  $h > 0$ , to pole figury  $BCFE$  wyraża różnica  $P(x_0 + h) - P(x_0)$ , jeśli zaś  $h < 0$ , to pole odpowiedniej figury wyraża różnica  $P(x_0) - P(x_0 + h)$ .



Tak więc liczby:  $h$  oraz  $P(x_0 + h) - P(x_0)$  są albo obie dodatnie, albo obie ujemne, zatem ich iloraz jest zawsze dodatni. Otrzymujemy stąd, wykorzystując twierdzenie o wartości bezwzględnej ilorazu, że:

$$(1) \quad \frac{|P(x_0 + h) - P(x_0)|}{|h|} = \left| \frac{P(x_0 + h) - P(x_0)}{h} \right| = \frac{P(x_0 + h) - P(x_0)}{h}.$$

Oznaczmy teraz przez  $m$  i  $M$  odpowiednio: najmniejszą i największą wartość funkcji  $f$  w przedziale domkniętym, którego końcami są  $x_0$  oraz  $x_0 + h$  (na mocy twierdzenia Weierstrassa mamy pewność, że funkcja osiąga te wartości w tym przedziale, gdyż jest w nim ciągła).

Zauważmy, że zachodzi następująca nierówność dla pól  $S_{CFKL}$ ,  $S_{BCFE}$ ,  $S_{CFEN}$  odpowiednio figur  $CFKL$ ,  $BCFE$  i  $CFEN$ :

$$S_{CFKL} \leq S_{BCFE} \leq S_{CFEN}.$$

Ale  $S_{CFKL} = m \cdot |h|$  i  $S_{CFEN} = M \cdot |h|$ , zatem mamy:

$$m \cdot |h| \leq |P(x_0 + h) - P(x_0)| \leq M \cdot |h|.$$

Dzieląc ostatnią nierówność stronami przez  $|h|$ , otrzymujemy:

$$m \leq \frac{|P(x_0 + h) - P(x_0)|}{|h|} \leq M.$$

Po uwzględnieniu równości (1) mamy:

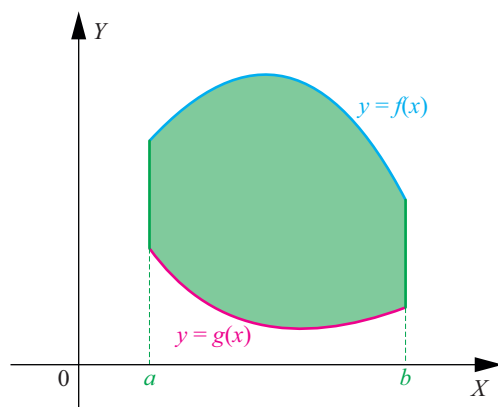
$$m \leq \frac{P(x_0 + h) - P(x_0)}{h} \leq M.$$

Natomiast na podstawie wniosku ze str. 81. (przy  $A = \frac{P(x_0 + h) - P(x_0)}{h}$ ) otrzymujemy, że istnieje w przedziale domkniętym o końcach  $x_0$  oraz  $x_0 + h$  taki punkt  $c$ , dla którego

$$(2) \quad f(c) = \frac{P(x_0 + h) - P(x_0)}{h}.$$

Zauważmy, że jeżeli  $h \rightarrow 0$ , to  $c \rightarrow x_0$  (ponieważ przedział o końcach  $x_0$  oraz  $x_0 + h$  staje się coraz krótszy, a więc  $c$  leży coraz bliżej  $x_0$ ). Stąd, na mocy ciągłości funkcji  $f$ , wynika, że  $f(c) \rightarrow f(x_0)$ . Otrzymujemy zatem  $\lim_{h \rightarrow 0} f(c) = f(x_0)$ .

Natomiast jeżeli  $h \rightarrow 0$ , to iloraz różnicowy  $\frac{P(x_0 + h) - P(x_0)}{h}$  dąży do  $P'(x_0)$ .



Zauważmy (spróbuj to uzasadnić), że wtedy

$$P = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx,$$

a więc

$$(***) \quad P = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx.$$

#### PRZYKŁAD 4.

Obliczmy pole  $P$  obszaru ograniczonego  
wykresem funkcji

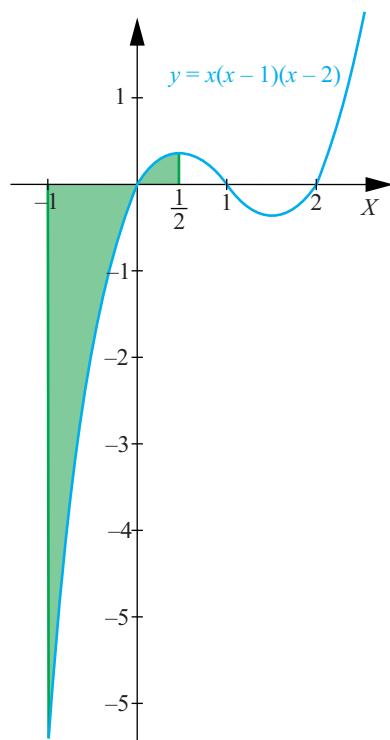
$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x,$$

osią  $OX$  i prostymi  $x = -1$  oraz  $x = \frac{1}{2}$ .

Uwzględniając, że

$$f(x) = x(x-1)(x-2)$$

możemy naszkicować wykres tej funkcji:



# MATEMATYKA

## Porady i wskazówki których nie ma w tablicach maturalnych z przykładami ich zastosowania

Tomasz Grębski



format 205 x 292 mm,  
stron 120

## Spis treści

|                                                             |     |
|-------------------------------------------------------------|-----|
| Wstęp .....                                                 | 4   |
| Symbole używane w książce .....                             | 5   |
| I. Liczby rzeczywiste, zbiory, wyrażenia algebraiczne ..... | 6   |
| II. Równania, nierówności i układy równań .....             | 18  |
| III. Funkcje i ich własności .....                          | 33  |
| IV. Ciągi liczbowe i szeregi .....                          | 55  |
| V. Trygonometria .....                                      | 60  |
| VI. Planimetria .....                                       | 67  |
| VII. Stereometria .....                                     | 85  |
| VIII. Geometria analityczna .....                           | 101 |
| IX. Rachunek różniczkowy .....                              | 108 |
| X. Rachunek prawdopodobieństwa .....                        | 119 |

Książka jest przeznaczona głównie dla maturzystów, aby mogli jeszcze lepiej przygotować się do egzaminu. Powstała na podstawie wieloletniego doświadczenia Autora – nauczyciela matematyki i egzaminatora.

Zawiera ona wiele cennych porad i wskazówek (wraz z przykładami ich zastosowania), które każdy maturzysta powinien znać i umieć zastosować, a których na próżno szukać w tzw. tablicach maturalnych, czyli „Wybranych wzorach matematycznych” opracowanych przez Centralną Komisję Egzaminacyjną. Wskazówki podzielone są tematycznie, aby łatwiej było znaleźć potrzebną poradę i przykład.

## I. Liczby rzeczywiste, zbiory, wyrażenia algebraiczne

### WSKAZÓWKA 1.

Bardzo ważny wzór z wykorzystaniem wartości bezwzględnej:  $\sqrt{x^2} = |x|$ .

Wzoru tego nie wolno mylić ze wzorem:  $(\sqrt{x})^2 = x$ .

#### Przykład 1.

Rozwiąż równanie:  $x^2 - 9 = 0$ .

Rozwiązanie:

$$x^2 - 9 = 0$$

$$x^2 = 9 \quad \text{pierwiastkujemy stronami (obie strony są nieujemne)}$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{9}$$

$$|x| = 3$$

$$x \in \{-3, 3\}.$$

#### Przykład 2.

Uprość wyrażenie:  $\sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$ .

Rozwiązanie:

$$\sqrt{7 - 4\sqrt{3}} = \sqrt{(2 - \sqrt{3})^2} = |2 - \sqrt{3}| = 2 - \sqrt{3}$$

Wyjaśnienie, jak „zobaczyć” wzór skróconego mnożenia:

$$7 - 4\sqrt{3} = a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

$$2ab = 4\sqrt{3} \quad \text{i} \quad a^2 + b^2 = 7$$

$$ab = 2\sqrt{3} \Rightarrow a = 2, b = \sqrt{3}$$

Sprawdzamy, czy  $a = 2$ ,  $b = \sqrt{3}$  spełniają równanie:  $a^2 + b^2 = 7$ . Okazuje się, że spełniają. Zatem  $7 - 4\sqrt{3} = (2 - \sqrt{3})^2$ .

#### Przykład 3.

Rozwiąż równanie:  $\sqrt{x+1} = 3$ .

Rozwiązanie:

$$\sqrt{x+1} = 3$$

$$D: x + 1 \geq 0 \Rightarrow x \in \langle -1, +\infty \rangle$$

$$\sqrt{x+1} = 3 \quad \text{podnosimy obustronnie do kwadratu (obie strony są nieujemne)}$$

$$(\sqrt{x+1})^2 = 3^2$$

$$x + 1 = 9$$

$$x = 8 \quad \text{i} \quad x \in \langle -1, +\infty \rangle$$

Zatem  $x = 8$ .

**WSKAZÓWKA 2.**

Wiemy, że odejmowanie nie jest przemienne, ale gdy odejmowanie jest podniesione do kwadratu lub gdy jest w wartości bezwzględnej, to jest przemienne.

$$(a - b)^2 = (b - a)^2$$

$$|a - b| = |b - a|$$

Często spotykamy się również z podniesieniem do kwadratu wyrażenia typu:  $(-a - b)^2$ .

Który wzór skróconego mnożenia zastosować? Oto wskazówka:

$$(-a - b)^2 = (a + b)^2$$

**Przykład 1.**

$$\frac{(x-2)^2}{(2-x)^2} = 1$$

**Przykład 2.**

$$\frac{|x-9|}{|9-x|} = 1$$

**Przykład 3.**

$$(-x - 3)^2 = [-(x + 3)]^2 = (x + 3)^2$$

**WSKAZÓWKA 3.**

Błąd bezwzględny i względny.

Oznaczmy:

$r$  – wielkość rzeczywista,

$p$  – wielkość przybliżona.

Błąd bezwzględny:  $BB = |r - p|$

Błąd względny:  $BW = \frac{|r-p|}{|r|}$

Błąd względny procentowy:  $BW\% = \frac{|r-p|}{|r|} \cdot 100\%$

**Przykład 1.**

Rzeczywista wysokość drzewa wynosi 5,6 m. Jacek oszacował wysokość drzewa i otrzymał wynik 5,4 m. Oblicz błąd bezwzględny, błąd względny oraz błąd względny procentowy pomiaru Jacka.

Rozwiązanie:

Oznaczmy:

$$r = 5,6 \text{ m}$$

$$p = 5,4 \text{ m}$$

$$BB = |r - p| = |5,6 - 5,4| = 0,2 \text{ m}$$

$$BW = \frac{|r - p|}{|r|} = \frac{|5,6 - 5,4|}{|5,6|} = 0,0357$$

$$BW\% = \frac{|r - p|}{|r|} \cdot 100\% = \frac{|5,6 - 5,4|}{|5,6|} \cdot 100\% = 0,0357 \cdot 100\% = 3,57\%.$$

**Przykład 2.**

Wyznacz liczbę  $x$  jeżeli wiadomo, że przybliżenie z nadmiarem tej liczby wynosi 15,2, a błąd względny tego przybliżenia jest równy 0,02.

Rozwiązanie:

Oznaczmy:

$$r = x$$

$$p = 15,2$$

$$BW = 0,02$$

Podstawiamy do wzoru:

$$0,02 = \frac{|x - 15,2|}{|x|} \cdot |x|$$

$$|0,02x| = |x - 15,2|$$

Korzystamy z własności wartości bezwzględnej: jeśli  $|a| = |b|$ , to  $a = b$  lub  $a = -b$ .

$$0,02x = x - 15,2 \quad \text{lub} \quad 0,02x = -x + 15,2$$

$$x = 15,51 \quad \text{lub} \quad x = 14,9$$

Ponieważ przybliżenie było z nadmiarem, to szukana liczba  $x = 14,9$ .

**WSKAZÓWKA 4.**

Nierówności z wartością bezwzględną:

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

$$|a - b| \leq |a| + |b|$$

$$||a| - |b|| \leq |a + b|$$

$$||a| - |b|| \leq |a - b|$$

**WSKAZÓWKA 5.**

Zależności między średnimi w matematyce (nierówność Cauchy'ego):

Dla dowolnych liczb dodatnich  $a_1, a_2, \dots, a_n$  zachodzą nierówności:

$$\sqrt[n]{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}} \geq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}$$

średnia kwadratowa  $\geq$  średnia arytmetyczna  $\geq$  średnia geometryczna  $\geq$  średnia harmoniczna  
(równość zachodzi wtedy, gdy  $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ )

**Przykład 1.**

Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich  $a, b, c$  zachodzi nierówność

$$8abc \leq (a + b)(b + c)(c + a).$$

Rozwiązanie:

Korzystamy z zależności między średnią arytmetyczną a średnią geometryczną dla każdej pary liczb:

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$$

$$\sqrt{bc} \leq \frac{b+c}{2}$$

$$\sqrt{ac} \leq \frac{a+c}{2}$$

Mnożymy nierówności przez 2:

$$2\sqrt{ab} \leq a + b$$

$$2\sqrt{bc} \leq b + c$$

$$2\sqrt{ac} \leq a + c$$

Mnożymy nierówności stronami:

$$8\sqrt{a^2b^2c^2} \leq (a+b)(b+c)(c+a)$$

Liczby  $a, b, c$  są dodatnie, zatem

$$8abc \leq (a+b)(b+c)(c+a).$$

**Przykład 2.**

Suma długości wszystkich krawędzi prostopadłościanu wynosi 24. Wyznacz prostopadłościan (długości jego krawędzi) o największej objętości.

Rozwiązanie:

Niech  $a, b, c$  będą długościami krawędzi prostopadłościanu, zaś przez  $V$  oznaczmy jego objętość. Mamy zatem:

$$4(a+b+c) = 24$$

$$a+b+c = 6$$

Wiemy, że  $V = abc$

Wykorzystajmy teraz zależność między średnią arytmetyczną a średnią geometryczną:

$$\sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3}$$

$$abc \leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3$$

$$V \leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 = \left(\frac{6}{3}\right)^3 = 8$$

Równość ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy  $a = b = c = 2$ . Zatem największą objętość spośród prostopadłościanów z zadania ma sześcian o krawędzi długości 2.

**WSKAZÓWKA 6.**

Średnia prędkość – jak ją obliczać?

Uwaga: Nie można liczyć średniej prędkości ze średniej arytmetycznej.

Średnia prędkość to stosunek całej drogi do łącznego czasu jej przebycia.



# Matematyka

Aleksandra Gębura

## Kompendium maturalne

Zakres podstawowy



format 165 x 235 mm,  
stron 256

# Matematyka

Aleksandra Gębura

## Kompendium maturalne

Zakres rozszerzony



format 165 x 235 mm,  
stron 463



## **Matematyka. Kompendium maturalne. Zakres podstawowy**

## **Matematyka. Kompendium maturalne. Zakres rozszerzony**

Obie książki są uporządkowane według poszczególnych wymagań podstawy programowej.

Na początku każdego rozdziału są wymienione wszystkie hasła podstawy programowej matematyki w gimnazjum i w szkole ponadgimnazjalnej – zarówno w zakresie podstawowym (P), jak i w zakresie rozszerzonym (R). Przypomniane są najważniejsze treści, które powinny być powtórzone przed maturą.

W książce do zakresu podstawowego treści z zakresu rozszerzonego są wydrukowane szarą czcionką, bo choć nie obowiązują, to mogą być przydatne. Zadania w tej książce nie wykraczają poza zakres podstawowy.

Do każdego wymagania z podstawy programowej są zaproponowane przykładowe zadania wraz z pełną sugestią rozwiązania i odpowiedzią. Jest to obszerny przegląd różnych technik i sposobów radzenia sobie z zadaniami, niektóre z nich nie są powszechnie stosowane, ale mogą okazać się przydatne.

Pokazujemy tu fragment spisu treści książki do zakresu rozszerzonego. Spis treści książki do zakresu podstawowego różni się jedynie tym, że nie występują w nim podrozdziały z literą R.

Dziwić może kolejność przedstawionych treści. Hasła z zakresu rozszerzonego przeplatają się z hasłami z zakresu podstawowego, niezgodnie z numeracją przyjętą w podstawie. Ta kolejność nie jest przypadkowa. Wynika z logicznego następstwa poruszanej problematyki. Wyróżnienie zakresu podstawowego kolorem zielonym i zakresu rozszerzonego kolorem niebieskim może pomóc w znalezieniu konkretnego zagadnienia.

Każdy rozdział zamykają zadania do samodzielnego rozwiązania „Czy już umiesz?” (w książkach odpowiedzi do nich są na końcu). W tym wypadku zadania na poziomie podstawowym powtarzają się dosłownie w książce do zakresu rozszerzonego, a po nich jest zestaw zadań na poziomie rozszerzonym.

Część podrozdziałów oznaczonych literą P (np. P3.2., P3.3.) powtarza się w obu książkach dosłownie, inne (np. P3.5.) – w wersji do zakresu rozszerzonego – są uzupełnione zadaniami, których rozwiązanie w zakresie podstawowym byłoby zbyt skomplikowane lub wręcz niemożliwe.

Do obu książek dołączamy wybór wzorów matematycznych przydatnych na maturze oraz do rozwiązywania zadań zawartych w *Kompendiach*.

- R2.5.** Wyznaczanie dziedziny prostego wyrażenia wymiernego z jedną zmienną, w którym w mianowniku występują tylko wyrażenia dające się łatwo sprowadzić do iloczynu wielomianów liniowych i kwadratowych
- R2.6.** Dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie wyrażeń wymiernych; rozszerzanie i skracanie (w łatwych przykładach) wyrażeń wymiernych

**Czy już umiesz?**

### 3. RÓWNAANIA I NIERÓWNOŚCI

**Teoria**

**Rozgrzewka 3.**

- P3.1.** Sprawdzanie, czy dana liczba rzeczywista jest rozwiązaniem równania lub nierówności
- P3.2.** Wykorzystywanie interpretacji geometrycznej układu równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi
- P3.3.** Rozwiązywanie nierówności pierwszego stopnia z jedną niewiadomą
- P3.4.** Rozwiązywanie równań kwadratowych z jedną niewiadomą
- P3.5.** Rozwiązywanie nierówności kwadratowych z jedną niewiadomą
- R3.1.** Stosowanie wzorów Viète'a
- R3.2.** Rozwiązywanie równań i nierówności liniowych i kwadratowych z parametrem
- R3.3.** Rozwiązywanie układów równań, prowadzących do równań kwadratowych
- P3.6.** Korzystanie z definicji pierwiastka do rozwiązywania równań typu  $x^3 = -8$
- P3.7.** Korzystanie z własności iloczynu przy rozwiązywaniu równań typu  $x(x+1)(x-7) = 0$
- R3.4.** Stosowanie twierdzenia o reszcie z dzielenia wielomianu przez dwumian  $x - a$
- R3.5.** Stosowanie twierdzenia o pierwiastkach wymiernych wielomianu o współczynnikach całkowitych
- R3.6.** Rozwiązywanie równań wielomianowych dających się łatwo sprowadzić do równań kwadratowych
- R3.7.** Rozwiązywanie łatwych nierówności wielomianowych
- P3.8.** Rozwiązywanie prostych równań wymiernych prowadzących do równań liniowych lub kwadratowych, np.  $\frac{x+1}{x+3} = 2$ ,  $\frac{x+1}{x} = 2x$
- R3.8.** Rozwiązywanie prostych nierówności wymiernych typu:  $\frac{x+1}{x+3} > 2$ ,  
 $\frac{x+3}{x^2-16} < \frac{2x}{x^2-4x}$ ,  $\frac{3x-2}{4x-7} \leq \frac{1-3x}{5-4x}$
- R3.9.** Rozwiązywanie równań i nierówności z wartością bezwzględną, o poziomie trudności nie wyższym niż:  $||x+1|-2| = 3$ ,  $|x+3| + |x-5| > 12$

**Czy już umiesz?**

# 3. RÓWNANIA I NIERÓWNOŚCI

**Do egzaminu na poziomie podstawowym z materiału realizowanego w gimnazjum powinienś pamiętać, jak:**

1. zapisywać związki między wielkościami za pomocą równania pierwszego stopnia z jedną niewiadomą, w tym związki między wielkościami wprost proporcjonalnymi i odwrotnie proporcjonalnymi;
2. sprawdzać, czy dana liczba spełnia równanie stopnia pierwszego z jedną niewiadomą;
3. rozwiązywać równania stopnia pierwszego z jedną niewiadomą;
4. zapisywać związki między nieznanymi wielkościami za pomocą układu dwóch równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi;
5. sprawdzać, czy dana para liczb spełnia układ dwóch równań stopnia pierwszego z dwiema niewiadomymi;
6. rozwiązywać układy równań stopnia pierwszego z dwiema niewiadomymi;
7. za pomocą równań lub układów równań opisywać i rozwiązywać zadania osadzone w kontekście praktycznym.

**Do egzaminu na poziomie podstawowym powinienś umieć to, co po gimnazjum, a także:**

1. sprawdzać, czy dana liczba rzeczywista jest rozwiązaniem równania lub nierówności;
2. wykorzystywać interpretację geometryczną układu równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi;
3. rozwiązywać nierówności pierwszego stopnia z jedną niewiadomą;
4. rozwiązywać równania kwadratowe z jedną niewiadomą;
5. rozwiązywać nierówności kwadratowe z jedną niewiadomą;
6. korzystać z definicji pierwiastka do rozwiązywania równań typu  $x^3 = -8$ ;
7. korzystać z własności iloczynu przy rozwiązywaniu równań typu  $x(x+1)(x-7) = 0$ ;
8. rozwiązywać proste równania wymierne prowadzące do równań liniowych lub kwadratowych, np.  $\frac{x+1}{x+3} = 2$ ,  $\frac{x+1}{x} = 2x$ .

**Do egzaminu na poziomie rozszerzonym powinienś spełniać wymagania określone dla poziomu podstawowego, a ponadto umieć:**

1. stosować wzory Viète'a;
2. rozwiązywać równania i nierówności liniowe oraz kwadratowe z parametrem;
3. rozwiązywać układy równań, prowadzące do równań kwadratowych;

## TEORIA

**Równaniem liniowym z jedną niewiadomą  $x$**  nazywamy równanie  $ax + b = 0$ , gdzie  $a$  i  $b$  są liczbami rzeczywistymi.

Równanie liniowe  $ax + b = 0$ , w którym  $a \neq 0$ , nazywamy **równaniem pierwszego stopnia z jedną niewiadomą**.

**Nierówność pierwszego stopnia z jedną niewiadomą  $x$**  nazywamy każdą z nierówności:  $ax + b > 0$ ,  $ax + b < 0$ ,  $ax + b \leq 0$ ,  $ax + b \geq 0$ , gdzie  $a$  i  $b$  są liczbami rzeczywistymi oraz  $a \neq 0$ . Dwie pierwsze nierówności nazywamy ostrymi, dwie ostatnie – nieostrymi.

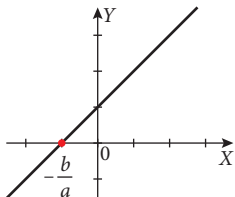
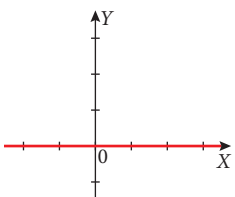
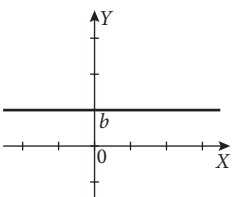
**Rozwiązaniem** równania (nierówności) z jedną niewiadomą jest każda liczba, która podstawiona w miejsce niewiadomej daje równość (nierówność) prawdziwą. Rozwiązanie równania nazywamy też **pierwiastkiem** tego równania.

Rozwiązanie równania (nierówności) oznacza znalezienie wszystkich rozwiązań tego równania (nierówności).

Zbiór utworzony ze wszystkich rozwiązań równania lub nierówności nazywamy **zbiorem rozwiązań** tego równania (nierówności). Równania (nierówności) nazywamy równoważnymi, gdy mają ten sam zbiór rozwiązań.

## Rozwiązywanie równań liniowych

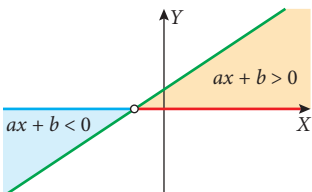
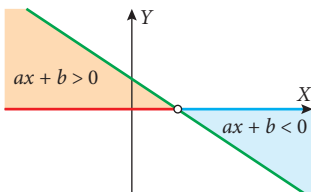
|                             |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
|-----------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Metoda analizy starożytnych | Przekształcamy równanie wyjściowe tak, że każda liczba spełniająca to równanie spełnia równanie przekształcone (wynikowe). Obydwa równania, wyjściowe i wynikowe, mogą nie być równoważne.<br>Wśród pierwiastków równania wynikowego, poza pierwiastkami równania wyjściowego, mogą znaleźć się <b>pierwiastki obce</b> (liczby, które nie spełniają równania wyjściowego, choć spełniają równanie wynikowe).<br>Po zastosowaniu tej metody trzeba sprawdzić otrzymane pierwiastki i wyeliminować pierwiastki obce. |
| Metoda równań równoważnych  | Tak przekształcamy dane równanie, by otrzymać równanie mu równoważne (mające ten sam zbiór rozwiązań).                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
| Metoda graficzna            | Rysujemy wykres równania i z wykresu odczytujemy rozwiązanie. Metoda prowadzi do uzyskania rozwiązań przybliżonych.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |

| Równanie                   | pierwszego stopnia                                                                | tożsamościowe                                                                     | sprzeczne                                                                          |
|----------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|
| Warunki                    | $a \neq 0$                                                                        | $a = 0$ i $b = 0$                                                                 | $a = 0$ i $b \neq 0$                                                               |
| Liczba rozwiązań           | jedno $\left(x = -\frac{b}{a}\right)$                                             | nieskończenie wiele (wszystkie liczby rzeczywiste)                                | zero                                                                               |
| Interpretacja geometryczna |  |  |  |

### Rozwiązywanie nierówności liniowych

| Nierówność                          | pierwszego stopnia | tożsamościowa        | sprzeczna            |
|-------------------------------------|--------------------|----------------------|----------------------|
| mocna (ostra)<br>$ax + b > 0$       | $a \neq 0$         | $a = 0$ i $b > 0$    | $a = 0$ i $b \leq 0$ |
| słaba (nieostra)<br>$ax + b \geq 0$ | $a \neq 0$         | $a = 0$ i $b \geq 0$ | $a = 0$ i $b < 0$    |

### Zbiór rozwiązań nierówności liniowej pierwszego stopnia

| $a > 0$                                                                             | $a < 0$                                                                              |
|-------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|
|  |  |
| $ax + b > 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{b}{a}, \infty\right)$                | $ax + b > 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty, -\frac{b}{a}\right)$                |
| $ax + b < 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty, -\frac{b}{a}\right)$               | $ax + b < 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{b}{a}, \infty\right)$                 |

### Równania pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi

Równanie  $Ax + By + C = 0$ , w którym  $A, B, C$  oznaczają liczby takie, że  $A^2 + B^2 > 0$ , zaś  $x$  i  $y$  są zmiennymi, nazywamy **równaniem pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi**  $x$  i  $y$ .

Wykresem równania  $Ax + By + C = 0$ , gdzie  $A^2 + B^2 > 0$ , jest linia prosta.

## ROZGRZEWKA 3.

## 1. Rozwiąż równania:

- a)  $3x + 5 = 0$
- b)  $4x - 1 = 2x + 3$
- c)  $\sqrt{2}x - 2 = 0$
- d)  $3(2x - 5) = 2(2x + 4)$
- e)  $2 - a = 5 - 3a$
- f)  $-2,5x + 4 = -1$
- g)  $\frac{1}{2}(x - 5) = \frac{3}{4}(5 - 3x)$
- h)  $\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{x}{\sqrt{10}}$
- i)  $\frac{2x + 7}{5} = 1$
- j)  $\frac{x - 2}{6} = \frac{4}{3}$
- k)  $5 - [(8x + 3) - 18x] = 9x$
- l)  $(3x - 2)^2 + 2x - 12 = 4 + 9x^2$
- m)  $(6x + 2)^2 = (9x - 1)(4x + 1)$

## 2. Rozwiąż równania:

- a)  $x(x - 2) = 0$
- b)  $(x + 3)(x - 2) = 0$
- c)  $-3(x + 5)(x - 7) = 0$
- d)  $5x(x + 3)$
- e)  $x^2 = 0$
- f)  $x^2 - 4 = 0$
- g)  $x^2 - 5x + 4 = 0$
- h)  $2x^2 - 11x - 15 = 0$
- i)  $-x^2 + 3x + 18 = 0$
- j)  $x^2 + 5x = 0$
- k)  $x^2 + 5x + 6 = 0$
- l)  $x^2 - 25 = 0$
- m)  $2x^2 + 10x = 0$
- n)  $0,2x^2 - x = -1,2$
- o)  $x^2 + 10x + 25 = 0$
- p)  $x^2 + 4x + 4 = 0$
- q)  $4x^2 + 4x + 1 = 0$
- r)  $2x(x + 2) = 0$

## 3. Rozwiąż równania:

- a)  $x^3 = 8$
- b)  $x^3 = -8$
- c)  $x^3 = \frac{1}{8}$
- d)  $x^3 = -0,001$
- e)  $2x^3 = \frac{1}{4}$
- f)  $(x + 2)(x - 3)(x - 1) = 0$
- g)  $x(x - 4)(x + 1) = 0$
- h)  $(x^2 - 4)(x^2 + 1) = 0$
- i)  $(x^3 + 27)(x^3 - 27) = 0$
- j)  $(27x^3 - 8)(x^2 + 6x + 9) = 0$

## 4. Rozwiąż równania:

- a)  $\frac{3x - 1}{x + 2} = 0$
- b)  $\frac{3x - 3}{2x - 2} = 0$
- c)  $\frac{7x - 14}{10x + 5} = 0$
- d)  $\frac{5}{x} = \frac{4}{3}$
- e)  $\frac{3}{5} = \frac{x}{30}$
- f)  $\frac{x - 2}{4} = \frac{2x + 3}{3}$
- g)  $\frac{x - 2}{2} = \frac{5x - 14}{x + 2}$

## 5. Rozwiąż nierówności:

- a)  $\frac{2x - 3}{8} + \frac{x + 2}{4} < 1$
- b)  $\frac{2 + x}{3} + \frac{x - 3}{6} > 1$
- c)  $x \leq 0,2x + 1,6$

**CZY JUŻ UMIESZ?****POZIOM PODSTAWOWY**

- 3.1.** Rozwiązaniem równania  $ax + 4(x - 2) = 16$  jest liczba  $x = 4$ . Współczynnik  $a$  jest równy:  
A. -2;                      B. 4;                      C. 2;                      D. 0.
- 3.2.** Który z poniższych układów równań można otrzymać po przekształceniu układu równań:  $\begin{cases} 3x - y = 5 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases}$  ?  
A.  $\begin{cases} y = 3x - 5 \\ 2x - 9x - 15 = 1 \end{cases}$                       B.  $\begin{cases} y = 3x - 5 \\ 2x - 9x + 15 = 1 \end{cases}$   
C.  $\begin{cases} y = 5 - 3x \\ 2x + 15 - 9x = 1 \end{cases}$                       D.  $\begin{cases} y = 5 - 3x \\ 2x - 15 + 9x = 1 \end{cases}$
- 3.3.** Ile liczb pierwszych jest rozwiązaniem nierówności:  $(x + 2)^2 \leq (x - 3)^2 + 25$ ?  
A. 1;                      B. 2;                      C. 3;                      D. nieskończenie wiele.
- 3.4.** Liczby:  $(-3)$ ,  $(-2)$ ,  $2$ ,  $3$  są rozwiązaniami równania:  
A.  $(x^2 + 4)(x - 3)^2(x + 3) = 0$ ;                      B.  $(x^2 - 4)(x^2 + 9)(x - 3) = 0$ ;  
C.  $(x^2 - 4)(x + 3)^2(x - 3) = 0$ ;                      D.  $(x^2 - 9)(x^2 + 4)(x + 3) = 0$ .
- 3.5.** Wybierz równanie, które nie ma rozwiązań:  
A.  $5x^2 + 19 = 0$ ;    B.  $5x^2 + 19x = 0$ ;    C.  $5x^2 - 19 = 0$ ;    D.  $5x^2 - 19x = 0$ .
- 3.6.** Dane są trzy równania:  $x(x^2 + 4)(x - 1) = 0$ ,  $\frac{2x}{2x - 1} = \frac{3x + 2}{3x}$ ,  $x^3 = -8$ . Liczba 2 jest rozwiązaniem:  
A. tylko jednego równania;                      B. wszystkich równań;  
C. dwóch równań;                      D. żadnego z równań.
- 3.7.** Pewna liczba cukierków została podzielona między dwoje dzieci. Dostali po 15 cukierków. Ile cukierków dostałoby każde dziecko, gdyby tę samą liczbę cukierków należało podzielić między 6 dzieci?  
A. 45;                      B. 5;                      C. 3;                      D. 10.
- 3.8.** Majster wykonuje jeden detal w ciągu 7 minut, a jego uczeń potrzebuje na to 10 minut. Pracując razem, wykonali 102 detale. Ile detali wykonał majster, a ile jego uczeń?  
A. uczeń 28, majster 74;                      B. uczeń 32, majster 70;  
C. uczeń 40, majster 62;                      D. uczeń 42, majster 60.





**Przed maturą**

# 123

Aleksandra Gębura

## **MATEMATYKA** **Zadania z rozwiązaniami** Zakres podstawowy



format 165 x 235 mm,  
stron 280

# Spis treści

|                                                                            |     |
|----------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>1. ZANIM ROZPOCZNIESZ</b>                                               | 5   |
| <b>2. LICZBY</b>                                                           |     |
| 2.1. Działania na liczbach                                                 | 8   |
| 2.2. Procenty. Błąd względny i bezwzględny                                 | 14  |
| 2.3. Potęgi. Pierwiastki. Logarytmy                                        | 23  |
| Zestaw zadań do samodzielnego rozwiązania                                  | 38  |
| <b>3. WYRAŻENIA ALGEBRAICZNE</b>                                           |     |
| 3.1. Działania na wyrażeniach algebraicznych                               | 40  |
| 3.2. Używanie wzorów skróconego mnożenia na $(a \pm b)^2$ oraz $a^2 - b^2$ | 45  |
| Zestaw zadań do samodzielnego rozwiązania                                  | 51  |
| <b>4. RÓWNANIA, NIERÓWNOŚCI, UKŁADY RÓWNAŃ</b>                             |     |
| 4.1. Równania, nierówności i układy równań pierwszego stopnia              | 53  |
| 4.2. Równania i nierówności kwadratowe                                     | 65  |
| 4.3. Równania wyższych stopni i równania wymierne                          | 73  |
| Zestaw zadań do samodzielnego rozwiązania                                  | 83  |
| <b>5. FUNKCJE</b>                                                          |     |
| 5.1. Ogólne własności funkcji                                              | 85  |
| 5.2. Funkcja liniowa                                                       | 97  |
| 5.3. Funkcja kwadratowa                                                    | 105 |
| 5.4. Funkcja $f(x) = \frac{a}{x}$                                          | 116 |
| 5.5. Funkcje wykładnicze                                                   | 120 |
| Zestaw zadań do samodzielnego rozwiązania                                  | 125 |
| <b>6. CIĄGI</b>                                                            |     |
| 6.1. Ciągi liczbowe                                                        | 127 |
| 6.2. Ciągi arytmetyczne                                                    | 131 |
| 6.3. Ciągi geometryczne                                                    | 142 |
| Zestaw zadań do samodzielnego rozwiązania                                  | 153 |
| <b>7. TRYGNOMETRIA</b>                                                     |     |
| 7.1. Funkcje trygonometryczne i zależności między nimi                     | 155 |
| 7.2. Zastosowania funkcji trygonometrycznych, m.in. w planimetrii          | 167 |
| Zestaw zadań do samodzielnego rozwiązania                                  | 175 |
| <b>8. PLANIMETRIA</b>                                                      |     |
| 8.1. Wielokąty                                                             | 177 |
| 8.2. Koła i okręgi                                                         | 186 |
| Zestaw zadań do samodzielnego rozwiązania                                  | 197 |

## **9. GEOMETRIA ANALITYCZNA**

|                                                                        |     |
|------------------------------------------------------------------------|-----|
| 9.1. Punkty. Odległości przekształcenia w układzie współrzędnych ..... | 199 |
| 9.2. Proste w układzie współrzędnych .....                             | 207 |
| Zestaw zadań do samodzielnego rozwiązania .....                        | 219 |

## **10. STEREOMETRIA**

|                                                 |     |
|-------------------------------------------------|-----|
| 10.1. Graniastosłupy .....                      | 221 |
| 10.2. Ostrosłupy .....                          | 230 |
| 10.3. Bryły obrotowe .....                      | 238 |
| Zestaw zadań do samodzielnego rozwiązania ..... | 243 |

## **11. ELEMENTY STATYSTYKI, KOMBINATORYKI I RACHUNKU PRAWDOPODOBIEŃSTWA**

|                                                 |     |
|-------------------------------------------------|-----|
| 11.1. Statystyka .....                          | 245 |
| 11.2. Kombinatoryka. Prawdopodobieństwo .....   | 255 |
| Zestaw zadań do samodzielnego rozwiązania ..... | 271 |

|                                                               |            |
|---------------------------------------------------------------|------------|
| <b>Odpowiedzi do zadań do samodzielnego rozwiązania .....</b> | <b>274</b> |
|---------------------------------------------------------------|------------|

|                                                          |            |
|----------------------------------------------------------|------------|
| <b>Tablica wartości funkcji trygonometrycznych .....</b> | <b>278</b> |
|----------------------------------------------------------|------------|

## 5.3. Funkcja kwadratowa

**5.3.1.** Narysuj wykres funkcji  $y = x^2 + 3x - 4$ .

**5.3.2.** Naszkicuj wykres funkcji  $y = 0,5(x - 3)^2 - 4,5$  i odczytaj z wykresu wartości argumentów, dla których funkcja przyjmuje wartości ujemne.

**5.3.3.** Napisz wzór funkcji kwadratowej  $y = ax^2 + 6$ , wiedząc, że do jej wykresu należy punkt:

a)  $A = (-2, 26)$ ;      b)  $A = (2, -22)$ ;      c)  $A = (-1, 5)$ ;      d)  $A = (3, 33)$ .

**5.3.4.** Napisz wzór funkcji kwadratowej  $y = -3x^2 + bx$ , wiedząc, że do jej wykresu należy punkt:

a)  $A = (-2, -16)$ ;      b)  $A = (1, 1)$ ;      c)  $A = (2, -14)$ ;      d)  $A = (-3, -18)$ .

**5.3.5.** Dla jakich  $x$  wykres funkcji  $y = x^2 - 5x + 8$  przecina prostą  $y = 2$ ?

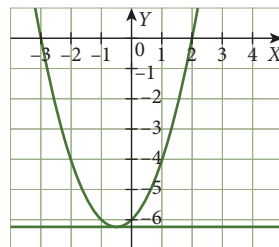
**5.3.6.** Mniejszą z dwóch liczb, które są miejscami zerowymi funkcji  $f(x) = x^2 + 9x + 20$ , jest liczba:

A. -4;      B. 4;      C. -5;      D. 5.

**5.3.7** Dana jest funkcja  $f(x) = 2x^2 - 4x - 50$ . Dla jakich  $x$  funkcja przyjmuje wartość -20?

**5.3.8.** Wyznacz wszystkie wartości  $x$ , dla których funkcja  $f(x) = -2x^2 + 5x + 12$  przyjmuje wartości dodatnie.

**5.3.9.** Wykorzystaj wykres funkcji  $y = (x - 2)(x + 3)$  do ustalenia zbioru wartości funkcji.



**5.3.10.** Narysuj wykres funkcji o wzorze  $y = 0,5(x + 3)^2$ .

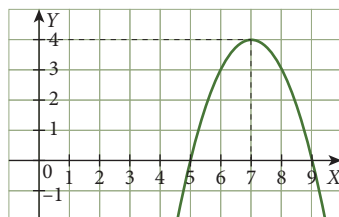
**5.3.11.** Wyznacz wzór funkcji  $y = 3x^2 + bx$ , aby do jej wykresu należał punkt  $A = (1, -2)$ .

**5.3.12.** Wyznacz wzór funkcji  $y = ax^2 + bx$ , aby do jej wykresu należały punkty  $A = (-2, 42)$  i  $B = (3, 12)$ .

**5.3.13.** Wyznacz współczynnik  $c$  trójmianu  $y = x^2 - 11x + c$ , aby liczba 7 była miejscem zerowym tej funkcji.

**5.3.14.** Funkcja  $y = ax^2 + bx + c$  przyjmuje wartości dodatnie tylko w przedziale  $(-5, 3)$ . Największą wartością funkcji w tym przedziale jest  $y = 16$ . Znajdź wzór tej funkcji.

**5.3.15.** Znajdź wzór funkcji kwadratowej, której wykres przedstawiono na rysunku.

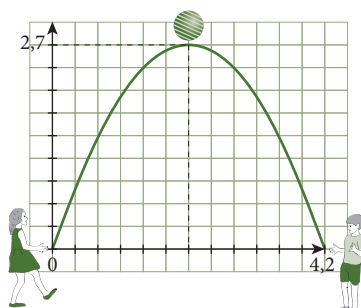


**5.3.16.** Dwuskładnikowy roztwór zawiera  $x\%$  roztworu o stężeniu 16%. Pozostałą część stanowi roztwór o stężeniu  $(x + 5)\%$ . Zapisz funkcję opisującą zależność stężenia  $s$  roztworu dwuskładnikowego od  $x$ .

**5.3.17.** Przedstaw pole prostokąta o obwodzie 68 jako funkcję długości jednego z boków prostokąta.

**5.3.18.** Z siatki o długości 60 m należy wykonać ogrodzenie dwóch rabat – prostokątnej, której długość jest dwa razy większa od szerokości, i kwadratowej. Zapisz funkcję przedstawiającą sumę pól kwadratu i prostokąta w zależności od długości boku kwadratu.

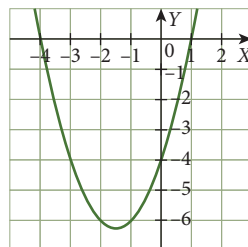
**5.3.19.** Hania z Tomkiem rzucali do siebie piłkę. Piłka, lecąc, pokonywała drogę o kształcie paraboli. Znajdź funkcję opisującą tor piłki, jeśli odległość między Hanią a Tomkiem wynosiła 4,2 m, a maksymalna wysokość  $h = 2,7$  m. (Hania i Tomek są tego samego wzrostu.)



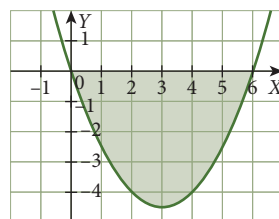
**5.3.20.** Znajdź wzór funkcji kwadratowej, której wykres jest symetryczny do wykresu funkcji  $y = -21x^2 + 13x + 48$  względem osi  $OX$ .

**Wskazówki. Rozwiązania. Odpowiedzi**

**5.3.1.** Wyznacz współrzędne wierzchołka paraboli i współrzędne punktów przecięcia wykresu funkcji z osiami układu współrzędnych.  $\Delta = 25$ , więc funkcja ma dwa miejsca zerowe:  $x_1 = -4$ ,  $x_2 = 1$ . Współrzędne wierzchołka paraboli to  $x_w = p = -1,5$ ,  $y_w = q = -6,25$ . Punkt przecięcia z osią  $OY$  ma współrzędne  $(0, -4)$ . Zaznacz te punkty w układzie współrzędnych i naszkicuj parabolę. Pamiętaj, że współczynnik przy wyrazie  $x^2$  jest dodatni ( $a = 1$ ), więc ramiona paraboli skierowane są ku górze.



**5.3.2.** Funkcja jest zapisana w postaci kanonicznej, z której łatwo odczytasz współrzędne wierzchołka paraboli  $W = (3, -4,5)$ . Współczynnik  $a = 0,5$ , więc ramiona paraboli są skierowane w górę. Wartość rzędnej wierzchołka paraboli jest ujemna ( $q = -4,5$ ), więc wierzchołek ten znajduje się poniżej osi  $OX$ . Oznacza to, że funkcja musi mieć miejsca zerowe. Aby je wyznaczyć, możesz przekształcić wzór funkcji do postaci ogólnej, wykonując zaznaczone działania.



Pamiętaj o kolejności działań.  $y = 0,5x^2 - 3x$ . Aby wyznaczyć miejsca zerowe, wystarczy wyłączyć czynnik, np.  $(0,5x)$ , przed nawias. Otrzymasz wtedy funkcję w postaci iloczynowej  $y = 0,5x(x - 6)$ , z której łatwo wyznaczysz  $x_1 = 0$  i  $x_2 = 6$ . Sporządź wykres i odczytaj z niego wartości argumentów, dla których funkcja przyjmuje wartości ujemne.

Odpowiedź:  $0 < x < 6$ .

**5.3.3.** Podstaw do wzoru  $y = ax^2 + 6$  za  $x$  pierwszą współrzędną punktu  $A$ , a za  $y$  – drugą.

- |                   |                   |                  |                  |
|-------------------|-------------------|------------------|------------------|
| a) $A = (-2, 26)$ | b) $A = (2, -22)$ | c) $A = (-1, 5)$ | d) $A = (3, 33)$ |
| $26 = 4a + 6$     | $-22 = 4a + 6$    | $5 = a + 6$      | $33 = 9a + 6$    |
| $a = 5$           | $a = -7$          | $a = -1$         | $a = 3$          |

**5.3.4** Podstaw do wzoru  $y = -3x^2 + bx$  za  $x$  pierwszą współrzędną punktu  $A$ , a za  $y$  – drugą.

- |                       |                 |                           |                       |
|-----------------------|-----------------|---------------------------|-----------------------|
| a) $A = (-2, -16)$    | b) $A = (1, 1)$ | c) $A = (2, -14)$         | d) $A = (-3, -18)$    |
| $-16 = -3(-2)^2 - 2b$ | $1 = -3 + b$    | $-14 = -3 \cdot 2^2 + 2b$ | $-18 = -3(-3)^2 - 3b$ |
| $b = 2$               | $b = 4$         | $b = -1$                  | $b = -3$              |

**5.3.5.** Rozwiąż równanie:  $x^2 - 5x + 8 = 2$ . Po uporządkowaniu równanie powinno przyjąć postać:  $x^2 - 5x + 6 = 0$ .  $\Delta = 1$ ,  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = 3$ .



Tomasz Zamek-Gliszczyński

## Zadania powtórkowe przed maturą

Zakres podstawowy

format 165 x 235 mm,  
stron 152



Tomasz Zamek-Gliszczyński

## Zadania powtórkowe przed maturą

Zakres rozszerzony

format 165 x 235 mm,  
stron 246

## **Matematyka. Zadania powtórkowe przed maturą. Zakres podstawowy**

## **Matematyka. Zadania powtórkowe przed maturą. Zakres rozszerzony**

Obie książki są podzielone na rozdziały tematyczne.

Każdy rozdział składa się z podobnych części:

- powtórzenie – wstęp teoretyczny,
- zadania zamknięte,
- zadania otwarte krótkiej odpowiedzi,
- zadania otwarte rozszerzonej odpowiedzi.

Na końcu książek znajdują się odpowiedzi i wskazówki do zadań.

Książka do zakresu rozszerzonego zawiera bardziej rozbudowaną część teoretyczną, nieco powiększony zasób zadań zamkniętych i znacznie więcej zadań otwartych, krótkiej odpowiedzi i rozszerzonej odpowiedzi, niektóre z nich są powtórzone albo dosłownie, albo w wersji zmodyfikowanej. Odpowiedzi i wskazówki są obfitsze, można w nich znaleźć cenne sugestie dotyczące rozumowania matematycznego.

Prezentujemy tu spis treści i fragmenty książki do zakresu rozszerzonego – zadania zamknięte, zadania wymagające kodowania, zadania otwarte i odpowiedzi (w zakresie podstawowym nie ma 10. rozdziału „Rachunek różniczkowy”).

Do obu książek dołączamy wybór wzorów matematycznych przydatnych na maturze oraz do rozwiązywania zadań w tych zbiorach.

## **Spis treści**

---

|                                          |     |
|------------------------------------------|-----|
| Wstęp .....                              | 4   |
| 1. Liczby .....                          | 5   |
| 2. Algebra .....                         | 24  |
| 3. Funkcje .....                         | 31  |
| 4. Ciągi .....                           | 61  |
| 5. Geometria na płaszczyźnie .....       | 69  |
| 6. Trygonometria .....                   | 87  |
| 7. Geometria analityczna .....           | 99  |
| 8. Stereometria .....                    | 107 |
| 9. Statystyka i prawdopodobieństwo ..... | 119 |
| Odpowiedzi .....                         | 132 |



# 5. Geometria na płaszczyźnie

## Powtórzenie

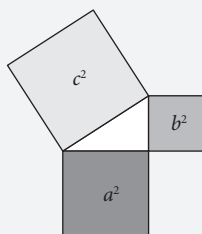
### 5.1. Podstawowe definicje i fakty

#### Twierdzenie Pitagorasa

Jeżeli trójkąt o bokach długości  $a$ ,  $b$  i  $c$  jest prostokątny, przy czym bok  $a$  jest prostopadły do boku  $b$ , to  $a^2 + b^2 = c^2$ .

#### Twierdzenie odwrotne

Jeżeli w trójkącie o bokach  $a$ ,  $b$  i  $c$  zachodzi równość  $a^2 + b^2 = c^2$ , to trójkąt jest prostokątny, a bokami prostopadłymi są boki  $a$  i  $b$ .

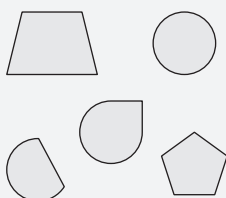


Wysokość trójkąta prostokątnego opuszczona na przeciwprostokątną dzieli ją na odcinki, których jest średnią geometryczną.

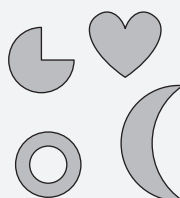
#### Figury geometryczne wypukłe i wklęsłe

Figura geometryczna jest wypukłą, gdy wraz z dowolnymi dwoma jej punktami  $A$  i  $B$  należą do niej również wszystkie punkty odcinka  $AB$ .

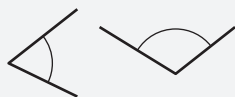
##### Figury wypukłe



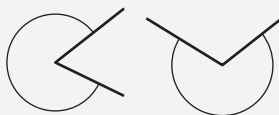
##### Figury niewypukłe



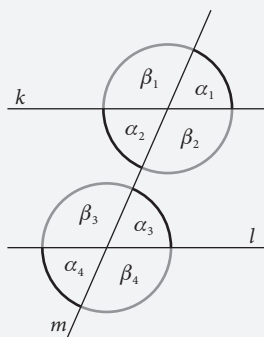
### Kąty wypukłe



### Kąty wklęsłe



**Kąty wierzchołkowe, przyległe, kąty utworzone przez parę prostych i trzecią nierównoległą do nich (sieczną) – odpowiadające (np.  $\alpha_1$  i  $\alpha_3$ ), jednostronne wewnętrzne (np.  $\beta_2$  i  $\alpha_3$ ), jednostronne zewnętrzne (np.  $\beta_1$  i  $\alpha_4$ ), naprzemianległe wewnętrzne (np.  $\beta_2$  i  $\beta_3$ ), naprzemianległe zewnętrzne (np.  $\alpha_1$  i  $\alpha_4$ )**



Kąty wierzchołkowe są równe:

$$\alpha_1 = \alpha_2, \beta_1 = \beta_2.$$

Kąty przyległe sumują się do  $180^\circ$ :

$$\alpha_1 + \beta_1 = 180^\circ, \alpha_1 + \beta_2 = 180^\circ,$$

$$\alpha_2 + \beta_2 = 180^\circ, \alpha_2 + \beta_1 = 180^\circ.$$

Jeśli proste  $k$  i  $l$  są równoległe, to

kąty odpowiadające, kąty naprzemianległe wewnętrzne, naprzemianległe zewnętrzne, są równe ( $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4$  i  $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4$ ),

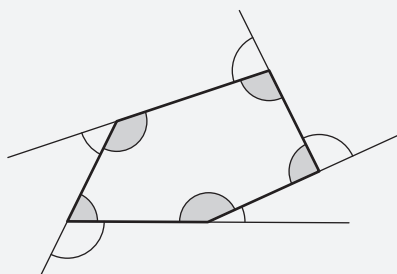
a kąty jednostronne wewnętrzne, jednostronne zewnętrzne sumują się do  $180^\circ$  ( $\beta_2 + \alpha_3 = 180^\circ, \alpha_2 + \beta_3 = 180^\circ, \alpha_1 + \beta_4 = 180^\circ, \beta_1 + \alpha_4 = 180^\circ$ ).

Jest też na odwrót: Jeśli kąty odpowiadające są równe lub kąty naprzemianległe są równe lub kąty jednostronne wewnętrzne bądź zewnętrzne sumują się do  $180^\circ$ , to proste  $k$  i  $l$  są równoległe.

Jeśli  $\alpha_1 + \beta_3 = 180^\circ$ , to proste  $k$  i  $l$  są równoległe.

Jeśli ramiona jednego kąta są prostopadłe do ramion drugiego kąta, to te kąty albo są równe, albo sumują się do  $180^\circ$ .

### Kąty w wielokącie



Kąty wewnętrzne



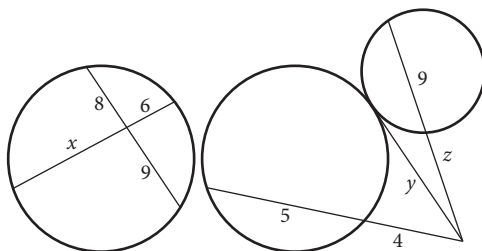
Kąty zewnętrzne

W dowolnym wielokącie wypukłym suma kątów zewnętrznych (po jednym przy każdym wierzchołku) jest równa  $360^\circ$ .

## Zadania otwarte krótkiej odpowiedzi

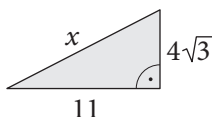
1. Każde ramię trapezu, w który można wpisać okrąg ma długość 5, a podstawa ma długość 8. Znajdź pole tego trapezu, wynik zakoduj.

2. Znajdź długości  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Zakoduj te liczby. , ,

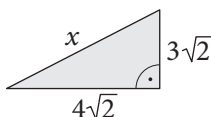


3. Znajdź nieznaną długość  $x$  boku trójkąta prostokątnego.

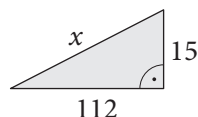
a)



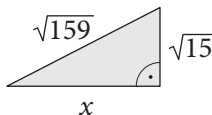
b)



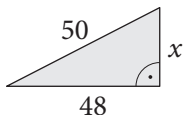
c)



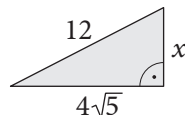
d)



e)



f)



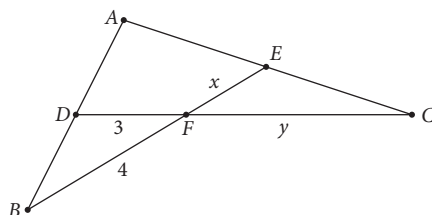
4. Jeden bok trójkąta ma długość 14, a wysokość opuszczona na niego ma długość 12. Drugi bok trójkąta ma długość 15. Jaka jest długość trzeciego boku?

5. Trzy wysokości trójkąta są równe 156, 65 i 60.

a) Jaki to trójkąt?

b) Oblicz pole tego trójkąta.

6. Punkt  $D$  jest środkiem odcinka  $AB$ , a punkt  $E$  jest środkiem odcinka  $AC$ . Odcinki  $BE$  i  $CD$  przecinają się w punkcie  $F$ . Zobacz na rysunku.  $|BF| = 4$ ,  $|DF| = 3$ . Oblicz  $x = |EF|$  i  $y = |CF|$ .



b) Pierwszą taką liczbą jest 101, a ostatnią 297. Wzór na ciąg tych liczb to

$$a_n = 7n + 94, a_1 = 101, a_{29} = 297. \text{ Suma to } \frac{101 + 297}{2} \cdot 29 = 199 \cdot 29 = 5771.$$

c) 22,222222, d)  $3^0 + 3^1 + \dots + 3^7 = \frac{3^8 - 1}{3 - 1} = 3280$

## 5. Geometria na płaszczyźnie

### Zadania zamknięte

|    |    |    |    |    |    |    |    |    |     |     |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|-----|
| 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. | 7. | 8. | 9. | 10. | 11. |
| C  | C  | C  | D  | D  | C  | B  | B  | D  | B   | C   |

### Zadania otwarte krótkiej odpowiedzi

- $\boxed{2} \boxed{0}$
- $\boxed{1} \boxed{2}, \boxed{6}, \boxed{3}$
- a) 13, b)  $5\sqrt{2}$ , c) 113, d) 12, e) 14, f) 8
- 13
- a) prostokątny, b) 5070
- $x = 2, y = 6$
- $\frac{1}{4}$
- a)  $x = 2\sqrt{Rr}$ , b) Na przykład:  $r = 36, R = 25$  i wtedy  $a = 11, b = 60, c = 61$ .  
c)  $R + r = 13, R - r = 5$ , skąd  $R = 9, r = 4$ .  
d) Obie muszą być kwadratowe, względnie pierwsze, a jedna z nich musi być parzysta.
- a)  $\sqrt{65}$ , b)  $x = \frac{5}{8}$
- a)  $92^\circ$ , b)  $7^\circ$ , c)  $37^\circ$ , d)  $22^\circ$ , e)  $160^\circ$ , f)  $42^\circ$
- $\alpha = \beta + \gamma$
- a)  $90^\circ$ , b)  $4\sqrt{3}$ , c)  $8\sqrt{3}$
- $x = 12, y = 12$
- Złota proporcja oznacza, że stosunek większej części do mniejszej jest taki sam jak całości do większej części, czyli  $\frac{|DC|}{|AD|} = \frac{|AC|}{|DC|}$ .  
a)  $\gamma = 36^\circ$ , b)  $\sphericalangle ABD = 36^\circ$

Matematyka

Tomasz Grębski

# Podstawianie zmiennej pomocniczej w równaniach i nie tylko

Zadania z rozwiązaniami



format 165 x 235 mm,  
stron 128

## Spis treści

|                                                                |     |
|----------------------------------------------------------------|-----|
| Wstęp .....                                                    | 5   |
| Typowe podstawienia .....                                      | 6   |
| Symbole używane w zbiorze .....                                | 7   |
| 1. Podstawienie zmiennej pomocniczej w równaniach .....        | 8   |
| 1.1. Równania wielomianowe .....                               | 8   |
| 1.2. Równania wielomianowe z wartością bezwzględną .....       | 17  |
| 1.3. Równania pierwiastkowe .....                              | 18  |
| 1.4. Równania wymierne .....                                   | 29  |
| 1.5. Równania wykładnicze .....                                | 32  |
| 1.6. Równania logarytmiczne .....                              | 36  |
| 1.7. Równania logarytmiczno-wykładnicze .....                  | 39  |
| 1.8. Równania trygonometryczne .....                           | 41  |
| 1.9. Równania logarytmiczno-trygonometryczne .....             | 53  |
| 1.10. Równania trygonometryczno-wykładnicze .....              | 56  |
| Zadania do samodzielnego rozwiązania .....                     | 58  |
| 2. Podstawienie zmiennej pomocniczej w nierównościach .....    | 61  |
| 2.1. Nierówności wielomianowe .....                            | 61  |
| 2.2. Nierówności wielomianowe z wartością bezwzględną .....    | 62  |
| 2.3. Nierówności wymierne z wartością bezwzględną .....        | 63  |
| 2.4. Nierówności pierwiastkowe .....                           | 64  |
| 2.5. Nierówności wykładnicze .....                             | 67  |
| 2.6. Nierówności logarytmiczne .....                           | 67  |
| 2.7. Nierówności logarytmiczno-wykładnicze .....               | 69  |
| 2.8. Nierówności trygonometryczne .....                        | 70  |
| 2.9. Nierówności trygonometryczno-wykładnicze .....            | 76  |
| 2.10. Nierówności trygonometryczno-logarytmiczne .....         | 78  |
| Zadania do samodzielnego rozwiązania .....                     | 80  |
| 3. Podstawienie zmiennej pomocniczej w układach równań .....   | 81  |
| Zadania do samodzielnego rozwiązania .....                     | 93  |
| 4. Podstawienie nowej zmiennej w równaniach z parametrem ..... | 94  |
| Zadania do samodzielnego rozwiązania .....                     | 109 |
| 5. Zadania różne .....                                         | 110 |
| Zadania do samodzielnego rozwiązania .....                     | 118 |
| Odpowiedzi .....                                               | 119 |

# Wstęp

W rozwiązywaniu równań, nierówności i układów równań potrzeba znajomości różnych metod, m.in. podstawienia zmiennej pomocniczej. Jest to zwykle wielkie ułatwienie w rozwiązywaniu zadania, czasem wręcz jedyna skuteczna metoda. Jednak użycie nowej zmiennej często wymaga też wprowadzenia odpowiednich założeń lub dodatkowych warunków, w szczególności w zadaniach z parametrem i wartością bezwzględną. Proponuję bliżej się przyjrzeć tej metodzie i zobaczyć, w jak wielu różnych sytuacjach bywa skuteczna, a także jak ją poprawnie stosować.

W każdym rozdziale umieszczone są zadania o różnym stopniu trudności. Poszczególne szereby zostały tak oznaczone:

- I pierwszy stopień wtajemniczenia,
- II drugi stopień wtajemniczenia,
- III trzeci (najtrudniejszy) stopień wtajemniczenia.

Zbiór zawiera 105 zadań z pełnymi rozwiązaniami oraz 98 zadań do samodzielnego rozwiązania; te ostatnie umieszczone są na końcu poszczególnych rozdziałów. Aby móc się zmierzyć z zebranymi tu zadaniami, trzeba – naturalnie – mieć pewną elementarną wiedzę na temat równań, nierówności i układów równań.

Książka przyda się uczniom przygotowującym się do egzaminu maturalnego lub do startu w konkursach matematycznych.

Od wielu lat prowadzę dodatkowe zajęcia z matematyki i tego typu zadania często rozwiązuję z uczniami. Niniejszy zbiór napisałem na podstawie wieloletniego doświadczenia, jestem przekonany, że może się przydać nauczycielom w pracy na lekcjach czy kółkach.

Warto zauważyć, że metoda podstawiania jest jedną z ważniejszych metod przy obliczaniu całek i rozwiązywaniu równań różniczkowych. Opanowanie tej metody ułatwi więc także naukę na studiach wyższych.

Życzę udanej pracy z zadaniami  
*Tomasz Grębski*

1. Podstawienie zmiennej pomocniczej w równaniach

II **Zadanie 1.19.**

Rozwiąż równanie:  $2x^2 + 6x + 4 - 3\sqrt{x^2 + 3x - 4} = 14$ .

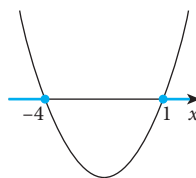
**Rozwiązanie:**

$$2x^2 + 6x + 4 - 3\sqrt{x^2 + 3x - 4} = 14$$

$$(*) \quad 2(x^2 + 3x) + 4 - 3\sqrt{x^2 + 3x - 4} = 14$$

$$D: x^2 + 3x - 4 \geq 0$$

Określamy dziedzinę równania ze względu na pierwiastek kwadratowy.



$$(x + 4)(x - 1) \geq 0$$

$$x \in (-\infty, -4) \cup \langle 1, +\infty)$$

Wracamy do równania.

$$\sqrt{x^2 + 3x - 4} = t, \text{ gdzie } t \geq 0$$

Podstawiamy nową zmienną, pamiętając o założeniu.

$$x^2 + 3x - 4 = t^2 \Rightarrow x^2 + 3x = t^2 + 4$$

Obie strony powyższej równości podnosimy do kwadratu i wyznaczamy element  $(x^2 + 3x)$ .

$$2(t^2 + 4) + 4 - 3t = 14$$

Do głównego równania (\*) wprowadzamy zmienną  $t$ .

$$2t^2 - 3t - 2 = 0$$

$$\Delta = 25, \sqrt{\Delta} = 5$$

$$\left( t = 2 \vee t = -\frac{1}{2} \right) \wedge t \geq 0 \Rightarrow t = 2$$

$$\sqrt{x^2 + 3x - 4} = 2$$

Wracamy do zmiennej  $x$ .

$$x^2 + 3x - 4 = 4$$

Obie strony podnosimy do kwadratu.

$$x^2 + 3x - 8 = 0$$

$$\Delta = 41, \sqrt{\Delta} = \sqrt{41}$$

$$\left( x = \frac{-3 - \sqrt{41}}{2} \vee x = \frac{-3 + \sqrt{41}}{2} \right) \wedge x \in (-\infty, -4) \cup \langle 1, +\infty)$$

**Odpowiedź:**  $x \in \left\{ \frac{-3 - \sqrt{41}}{2}, \frac{-3 + \sqrt{41}}{2} \right\}.$



## Zadania do samodzielnego rozwiązania

- I 1.1. Rozwiąż równanie:  $x^4 + x^2 - 2 = 0$ .
- I 1.2. Rozwiąż równanie:  $2x^4 - x^2 - 1 = 0$ .
- I 1.3. Rozwiąż równanie:  $25x^4 - 10x^2 + 1 = 0$ .
- I 1.4. Rozwiąż równanie:  $x^6 - 17x^3 + 16 = 0$ .
- I 1.5. Rozwiąż równanie:  $16x^8 - 15x^4 - 1 = 0$ .
- II 1.6. Rozwiąż równanie:  $x^9 - 3x^6 - 6x^3 + 8 = 0$ .
- I 1.7. Rozwiąż równanie:  $-3(-x^4 + 3x^2 - 3) = 6 + (3x^2 - x^4 - 1)^2$ .
- II 1.8. Rozwiąż równanie:  $(x^2 + 3x + 3)(2x^2 + 6x - 1) + 3 = 0$ .
- II 1.9. Rozwiąż równanie:  $x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 5x + 1 = 0$ .
- III 1.10. Rozwiąż równanie:  $x^6 - 10x^5 + 47x^4 - 100x^3 + 47x^2 - 10x + 1 = 0$ .
- II 1.11. Rozwiąż równanie:  $2(x - 3)^2 - 1 = -|x - 3|$ .
- II 1.12. Rozwiąż równanie:  $(x + 5)^2 = 2 - |x + 5|$ .
- II 1.13. Rozwiąż równanie:  $|x + 1|^5 = |x + 1|$ .
- I 1.14. Rozwiąż równanie:  $x + 7\sqrt{x} = 18$ .
- II 1.15. Rozwiąż równanie:  $x - 2 - 3\sqrt{x + 6} = 0$ .
- II 1.16. Rozwiąż równanie:  $\sqrt[3]{x^2} - 6 = 5\sqrt[3]{x}$ .
- II 1.17. Rozwiąż równanie:  $\sqrt[3]{x^2 + 9 + 6x} - 12 = \sqrt[3]{x + 3}$ .
- III 1.18. Rozwiąż równanie:  $5\sqrt[3]{4 - x^2} - \sqrt[3]{(2 + x)^2} = 4\sqrt[3]{(2 - x)^2}$ .
- III 1.19. Rozwiąż równanie:  $\sqrt[3]{x + 5} - \sqrt[6]{x^2 - 25} = \sqrt[3]{x - 5}$ .
- II 1.20. Rozwiąż równanie:  $3\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}} + 3\sqrt[4]{\frac{x+1}{x-1}} = 10$ .
- II 1.21. Rozwiąż równanie:  $5\sqrt{\frac{x^2-4}{x+1}} - 3\sqrt[5]{\frac{x+1}{x^2-4}} = -2$ .
- II 1.22. Rozwiąż równanie:  $5\sqrt[4]{x^2-4} = 6 - \sqrt{x^2-4}$ .
- II 1.23. Rozwiąż równanie:  $x^2 + 3x - \frac{3}{2}\sqrt{x^2 + 3x - 4} = 4$ .
- II 1.24. Rozwiąż równanie:  $x^2 + 3x - 4 = 5\sqrt{x^2 + 3x - 4}$ .

## Odpowiedzi

### 1. Podstawienie zmiennej pomocniczej w równaniach

1.1. Podstawienie:  $t = x^2$ , gdzie  $t \geq 0$ .

Odpowiedź:  $x \in \{-1, 1\}$ .

1.2. Podstawienie:  $t = x^2$ , gdzie  $t \geq 0$ .

Odpowiedź:  $x \in \{-1, 1\}$ .

1.3. Podstawienie:  $t = x^2$ , gdzie  $t \geq 0$ .

Odpowiedź:  $x \in \left\{-\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right\}$ .

1.4. Podstawienie:  $t = x^3$ , gdzie  $t \in \mathbf{R}$ .

Odpowiedź:  $x \in \{1, 2\sqrt[3]{2}\}$ .

1.5. Podstawienie:  $t = x^4$ , gdzie  $t \geq 0$ .

Odpowiedź:  $x \in \{-1, 1\}$ .

1.6. Podstawienie:  $t = x^3$ , gdzie  $t \in \mathbf{R}$ .

Odpowiedź:  $x \in \{1, -\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}\}$ .

1.7. Podstawienie:  $t = -x^4 + 3x^2 - 1$ , gdzie  $t \in \mathbf{R}$ .

Odpowiedź:

$$x \in \left\{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}, -\sqrt{\frac{3+\sqrt{17}}{2}}, \sqrt{\frac{3+\sqrt{17}}{2}}\right\}.$$

1.8. Podstawienie:  $t = x^2 + 3x$ , gdzie  $t \in \mathbf{R}$ .

Odpowiedź:  $x \in \{-3, 0\}$ .

1.9. Podstawienie:  $t = x + \frac{1}{x}$ , gdzie  $t \in \mathbf{R}$ .

Odpowiedź:  $x \in \left\{1, \frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right\}$ .

1.10. Podstawienie:  $t = x + \frac{1}{x}$ , gdzie  $t \in \mathbf{R}$ .

Odpowiedź:  $x \in \{2 - \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3}\}$ .

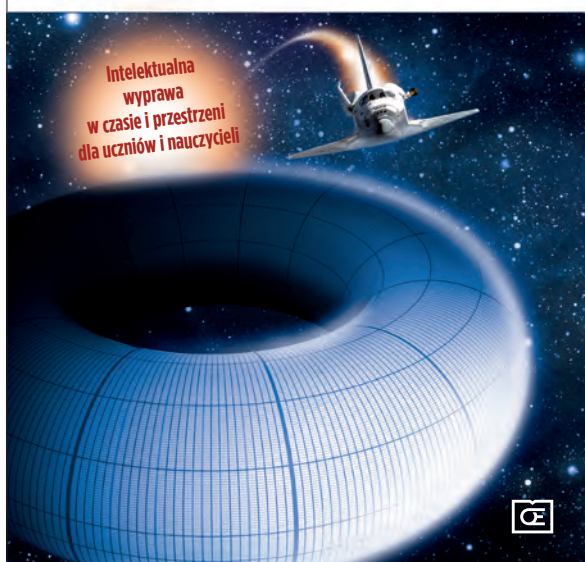
1.11. Podstawienie:  $t = |x - 3|$ , gdzie  $t \geq 0$ .

Odpowiedź:  $x \in \left\{\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right\}$ .

# Dla zainteresowanych

## PODRÓŻE MATEMATYCZNE

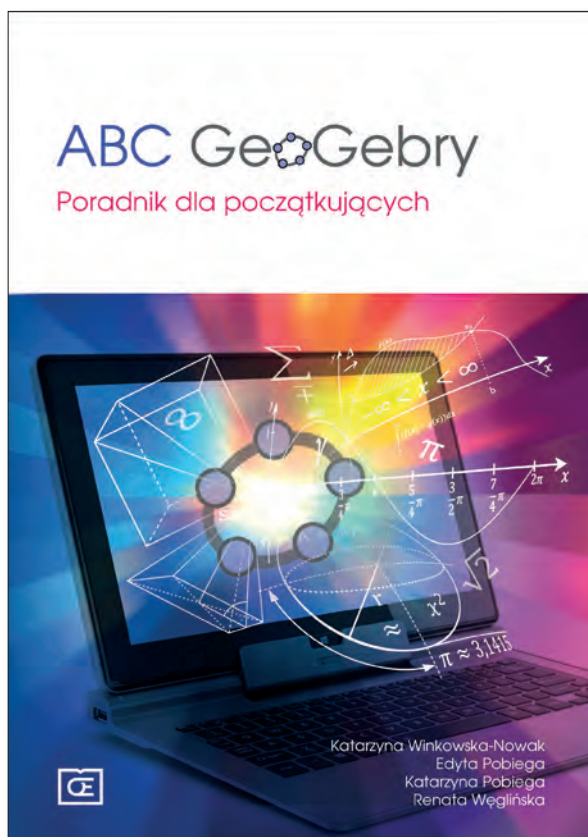
Michał Szurek



format 165 x 235 mm,  
stron 296

*Podróże matematyczne* to książka nie tylko dla ucznia i nauczyciela, lecz dla wszystkich, którzy interesują się matematyką i reagują na jej wyzwania – i dla młodszych, i dla starszych.

Z nieprzebranego dorobku matematyki Autor wybrał kilkadziesiąt arcydzieł – zadań, twierdzeń, teorii – i w barwny sposób opowiada o nich z wielu punktów widzenia. A czyni to tak, by początkującego czytelnika zainteresować, a czytelnika dojrzałego – nie znudzić. Autor ukazuje matematykę przyjemną i intrygującą. Treść książki oscyluje wokół programu szkolnego, chociaż im wyższy numer rozdziału, tym „odległość” od szkoły większa, a w rozdziale 17 jest wręcz „kosmiczna”. Książka i jej rozdziały są napisane zgodnie z zasadą stopniowania trudności. Znajdziemy tu równania, tradycyjne zadania w nowym ujęciu, zadania logiczne, kolorową geometrię i wycieczkę w dziwne przestrzenie. Trudne miejsca nie powinny nikogo odstraszać.

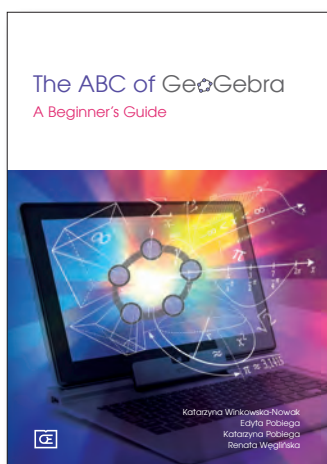


format 165 x 235 mm,  
stron 132

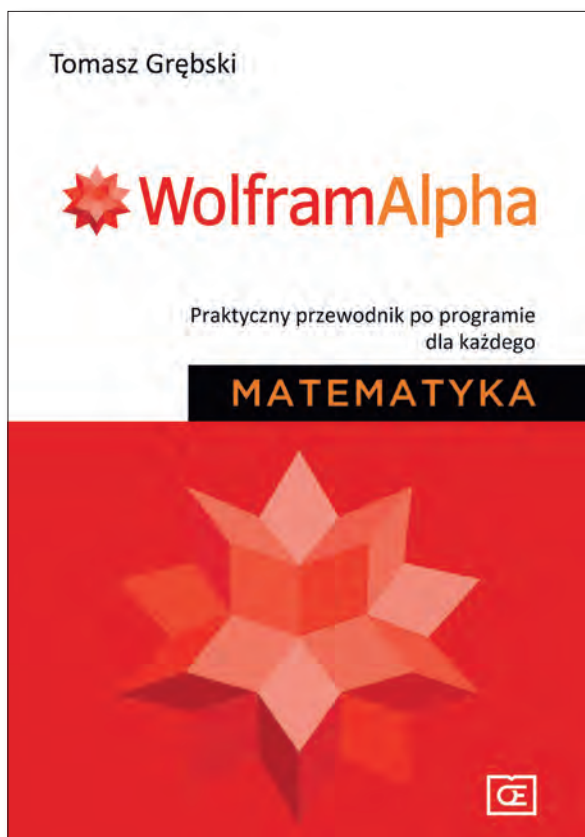
Ten poradnik jest przeznaczony dla początkujących adeptów i zainteresowanych GeoGebra, jej możliwościami i przydatnością w nauczaniu i uczeniu się matematyki na wszystkich poziomach edukacji.

GeoGebra jest bezpłatnym oprogramowaniem matematycznym, dostępnym on-line i off-line w systemach operacyjnych *Windows*, *Linux* i *Mac OSX*, na komputerach i na urządzeniach przenośnych (tablety, smartfony).

Poradnik ten dotyczy stosowania GeoGebry przy użyciu komputerów z systemem operacyjnym *Windows*.



Dostępna również  
w języku angielskim



format 165 x 235 mm,  
stron 216

## O programie

Program ten swe korzenie ma w słynnym programie *Mathematica*, który doskonale łączy obliczenia numeryczne i symboliczne, interpretację graficzną wyników, język programowania, dokumentację i możliwość publikacji pracy. Dzięki bogactwu funkcji jest świetnym narzędziem pracy matematyków, fizyków, biologów, chemików i innych.

Program jest przeznaczony zarówno dla uczniów, studentów, jak i dla nauczycieli. Z własnego doświadczenia wiem, jak przyjemnie pracuje się z programem wspólnie z uczniami. Nauczyciel bez wątpienia staje się nowoczesny, a uczniów to zachęca do pracy. Krótko mówiąc – przyjemne z pożytecznym.

W tym *Poradniku* zajmujemy się stroną matematyczną programu. A zatem stawiamy sobie pytanie: w czym może pomóc nam Wolfram Alpha (jeśli chodzi o matematykę) oraz w jaki sposób z niego korzystać?

Wolfram Alpha m.in. rozwiązuje równania i nierówności, układy równań i nierówności, oblicza pochodne i całki, rysuje funkcje oraz wypisuje ich najważniejsze własności. To oczywiście przysłowiowa „kropla w morzu” jego możliwości. Opisane w książce funkcje i przykłady pozwolą Czytelnikowi poznać wiele możliwości tego programu.



# MATEMATYKA

w liceum i technikum

## ZBIORY ZADAŃ

PODSTAWA  
PROGRAMOWA  
**2019**



Solidnie  
od  
podstaw



# MATEMATYKA

w liceum i technikum

## PODRĘCZNIKI

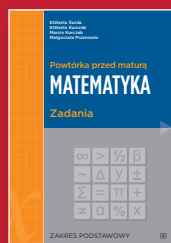
PODSTAWA  
PROGRAMOWA  
**2019**



Solidnie  
od  
podstaw



Oficyna Edukacyjna \* Krzysztof Pazdro przygotowała bogaty zestaw tytułów, służących lepszemu przygotowaniu do matury z matematyki na poziomie podstawowym i na poziomie rozszerzonym. Każdy maturzysta, zależnie od indywidualnych potrzeb, znajdzie tu odpowiednią dla siebie pozycję.



Ponadto zachęcamy do zapoznania się z naszym przewodnikiem po programie **Wolfram Alpha**, który jest nowoczesnym narzędziem edukacyjnym.



**OFICyna  
EDUKACYJNA**  
KRZYSZTOF PAZDRO

[www.pazdro.com.pl](http://www.pazdro.com.pl)