

# Spis treści

## Od autorów

7

## I. Liczby rzeczywiste i wyrażenia algebraiczne

|                                                                                           |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Działania na potęgach, pierwiastkach i logarytmach .....                                  | 8  |
| Dowody algebraiczne .....                                                                 | 11 |
| 1. Podzielność liczb .....                                                                | 11 |
| 2. Wyrażenia algebraiczne, wzory skróconego mnożenia .....                                | 12 |
| 3. Z wykorzystaniem średniej arytmetycznej, geometrycznej i kwadratowej kilku liczb ..... | 17 |
| 4. Logarytmiczne .....                                                                    | 18 |

## II. Równania, nierówności i układy równań

|                                                      |    |
|------------------------------------------------------|----|
| Równania i nierówności wielomianowe .....            | 21 |
| Równania i nierówności wymierne .....                | 23 |
| Równania i nierówności z wartością bezwzględną ..... | 25 |
| Układy równań .....                                  | 27 |

## III. Równania i nierówności z parametrem

|                                                                          |    |
|--------------------------------------------------------------------------|----|
| Równania i nierówności liniowe z parametrem .....                        | 29 |
| Równania i nierówności kwadratowe z parametrem .....                     | 30 |
| Równania wielomianowe z parametrem .....                                 | 32 |
| Równania wymierne z parametrem .....                                     | 34 |
| Układy równań z parametrem .....                                         | 34 |
| Zastosowanie metody graficznej w rozwiązywaniu równań z parametrem ..... | 35 |

## IV. Funkcje

|                                                                                    |    |
|------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Przekształcanie oraz kreślenie wykresów funkcji $y = -f(x)$ oraz $y = f(-x)$ ..... | 37 |
| Złożenie funkcji .....                                                             | 38 |
| Funkcja wymierna. Dowodzenie monotoniczności funkcji na podstawie definicji .....  | 39 |
| Kontekst realistyczny w zadaniach .....                                            | 39 |

## V. Ciągi

|                                                     |    |
|-----------------------------------------------------|----|
| Ciąg określony wzorem ogólnym i rekurencyjnym ..... | 44 |
| Ciąg arytmetyczny i geometryczny .....              | 45 |
| Granice ciągów .....                                | 48 |
| Szereg geometryczny .....                           | 49 |

## VI. Trygonometria

|                                                                          |    |
|--------------------------------------------------------------------------|----|
| Funkcje trygonometryczne, wykresy oraz tożsamości trygonometryczne ..... | 54 |
| Równania trygonometryczne .....                                          | 54 |

## VII. Planimetria

|                                                                                                                                                                                                                                                  |    |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Trójkąty. Podobieństwo i przystawanie trójkątów. Punkty szczególne. Twierdzenie Talesa i twierdzenie do niego odwrotne. Twierdzenie Pitagorasa i twierdzenie do niego odwrotne. Twierdzenie o dwusiecznej. Twierdzenie sinusów i cosinusów ..... | 58 |
| Czworokąty. Okrąg wpisany i opisany na czworokącie .....                                                                                                                                                                                         | 61 |

|                                                                                                |    |
|------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Pola wielokątów .....                                                                          | 64 |
| Koła i okręgi. Twierdzenie o odcinkach stycznych. Twierdzenie o odcinkach siecznej i stycznej. |    |
| Twierdzenie o siecznych. Twierdzenie o cięciwach .....                                         | 67 |

## VIII. Dowody geometryczne

|                                                      |    |
|------------------------------------------------------|----|
| Dowody w planimetrii .....                           | 69 |
| Dowody w trygonometrii .....                         | 76 |
| Dowody w geometrii analitycznej i stereometrii ..... | 80 |

## IX. Geometria analityczna na płaszczyźnie kartezjańskiej

|                                                               |    |
|---------------------------------------------------------------|----|
| Proste w kartezjańskim układzie współrzędnych .....           | 82 |
| Okrąg w układzie współrzędnych. Punkty wspólne krzywych ..... | 84 |
| Wektory. Działania na wektorach .....                         | 87 |
| Pola figur w kartezjańskim układzie współrzędnych .....       | 88 |

## X. Stereometria

|                                                                        |     |
|------------------------------------------------------------------------|-----|
| Kąty w figurach przestrzennych .....                                   | 90  |
| Graniastosłupy. Pole powierzchni całkowitej. Objętość. Przekroje ..... | 91  |
| Ostrosłupy. Pole powierzchni. Objętość. Przekroje .....                | 95  |
| Walce. Pole powierzchni. Objętość. Przekroje .....                     | 98  |
| Stożki. Pole powierzchni. Objętość. Przekroje .....                    | 99  |
| Kule. Pole powierzchni. Objętość. Przekroje .....                      | 101 |
| Zależność między polami i objętościami brył podobnych .....            | 102 |

## XI. Kombinatoryka zadania różne

|                                   |     |
|-----------------------------------|-----|
| Kombinatoryka zadania różne ..... | 103 |
|-----------------------------------|-----|

## XII. Rachunek prawdopodobieństwa

|                                                                 |     |
|-----------------------------------------------------------------|-----|
| Prawdopodobieństwo w modelu klasycznym .....                    | 107 |
| Prawdopodobieństwo warunkowe .....                              | 109 |
| Twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym. Wzór Bayesa ..... | 110 |
| Schemat Bernoulliego .....                                      | 113 |

## XIII. Analiza matematyczna. Rachunek różniczkowy i optymalizacja

|                                                                   |     |
|-------------------------------------------------------------------|-----|
| Granice funkcji (w punkcie i w nieskończoności) .....             | 115 |
| Własność Darboux .....                                            | 117 |
| Pochodna funkcji (w tym funkcji złożonej) .....                   | 118 |
| Styczna do wykresu funkcji .....                                  | 119 |
| Pochodna funkcji a monotoniczność funkcji. Ekstrema funkcji ..... | 121 |
| Zadania optymalizacyjne .....                                     | 123 |

## ROZWIĄZANIA

### I. Liczby rzeczywiste i wyrażenia algebraiczne

|                                                                                           |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Działania na potęgach, pierwiastkach i logarytmach .....                                  | 129 |
| Dowody algebraiczne .....                                                                 | 135 |
| 1. Podzielność liczb .....                                                                | 135 |
| 2. Wyrażenia algebraiczne, wzory skróconego mnożenia .....                                | 141 |
| 3. Z wykorzystaniem średniej arytmetycznej, geometrycznej i kwadratowej kilku liczb ..... | 155 |
| 4. Logarytmiczne .....                                                                    | 161 |

### II. Równania, nierówności i układy równań

|                                                      |     |
|------------------------------------------------------|-----|
| Równania i nierówności wielomianowe .....            | 168 |
| Równania i nierówności wymierne .....                | 176 |
| Równania i nierówności z wartością bezwzględną ..... | 181 |
| Układy równań .....                                  | 188 |

### III. Równania i nierówności z parametrem

|                                                                          |     |
|--------------------------------------------------------------------------|-----|
| Równania i nierówności liniowe z parametrem .....                        | 193 |
| Równania i nierówności kwadratowe z parametrem .....                     | 196 |
| Równania wielomianowe z parametrem .....                                 | 207 |
| Równania wymierne z parametrem .....                                     | 213 |
| Układy równań z parametrem .....                                         | 214 |
| Zastosowanie metody graficznej w rozwiązywaniu równań z parametrem ..... | 217 |

### IV. Funkcje

|                                                                                    |     |
|------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Przekształcanie oraz kreślenie wykresów funkcji $y = -f(x)$ oraz $y = f(-x)$ ..... | 223 |
| Złożenie funkcji .....                                                             | 226 |
| Funkcja wymierna. Dowodzenie monotoniczności funkcji na podstawie definicji .....  | 228 |
| Kontekst realistyczny w zadaniach .....                                            | 230 |

### V. Ciągi

|                                                     |     |
|-----------------------------------------------------|-----|
| Ciąg określony wzorem ogólnym i rekurencyjnym ..... | 235 |
| Ciąg arytmetyczny i geometryczny .....              | 238 |
| Granice ciągów .....                                | 246 |
| Szereg geometryczny .....                           | 249 |

### VI. Trygonometria

|                                                                          |     |
|--------------------------------------------------------------------------|-----|
| Funkcje trygonometryczne, wykresy oraz tożsamości trygonometryczne ..... | 258 |
| Równania trygonometryczne .....                                          | 263 |

### VII. Planimetria

|                                                                                                                                                                                                                                                  |     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Trójkąty. Podobieństwo i przystawanie trójkątów. Punkty szczególne. Twierdzenie Talesa i twierdzenie do niego odwrotne. Twierdzenie Pitagorasa i twierdzenie do niego odwrotne. Twierdzenie o dwusiecznej. Twierdzenie sinusów i cosinusów ..... | 278 |
| Czworokąty. Okrąg wpisany i opisany na czworokącie .....                                                                                                                                                                                         | 287 |
| Pola wielokątów .....                                                                                                                                                                                                                            | 299 |
| Koła i okręgi. Twierdzenie o odcinkach stycznych. Twierdzenie o odcinkach siecznej i stycznej. Twierdzenie o siecznych. Twierdzenie o cięciwach .....                                                                                            | 306 |

## VIII. Dowody geometryczne

|                                                      |     |
|------------------------------------------------------|-----|
| Dowody w planimetrii .....                           | 312 |
| Dowody w trygonometrii .....                         | 334 |
| Dowody w geometrii analitycznej i stereometrii ..... | 349 |

## IX. Geometria analityczna na płaszczyźnie kartezjańskiej

|                                                               |     |
|---------------------------------------------------------------|-----|
| Proste w kartezjańskim układzie współrzędnych .....           | 352 |
| Okrąg w układzie współrzędnych. Punkty wspólne krzywych ..... | 361 |
| Wektory. Działania na wektorach .....                         | 373 |
| Pola figur w kartezjańskim układzie współrzędnych .....       | 376 |

## X. Stereometria

|                                                                        |     |
|------------------------------------------------------------------------|-----|
| Kąty w figurach przestrzennych .....                                   | 381 |
| Graniastosłupy. Pole powierzchni całkowitej. Objętość. Przekroje ..... | 383 |
| Ostrosłupy. Pole powierzchni. Objętość. Przekroje .....                | 395 |
| Walce. Pole powierzchni. Objętość. Przekroje .....                     | 408 |
| Stożki. Pole powierzchni. Objętość. Przekroje .....                    | 411 |
| Kule. Pole powierzchni. Objętość. Przekroje .....                      | 420 |
| Zależność między polami i objętościami brył podobnych .....            | 422 |

## XI. Kombinatoryka zadania różne

|                                   |     |
|-----------------------------------|-----|
| Kombinatoryka zadania różne ..... | 424 |
|-----------------------------------|-----|

## XII. Rachunek prawdopodobieństwa

|                                                                 |     |
|-----------------------------------------------------------------|-----|
| Prawdopodobieństwo w modelu klasycznym .....                    | 436 |
| Prawdopodobieństwo warunkowe .....                              | 443 |
| Twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym. Wzór Bayesa ..... | 446 |
| Schemat Bernoulliego .....                                      | 458 |

## XIII. Analiza matematyczna. Rachunek różniczkowy i optymalizacja

|                                                                   |     |
|-------------------------------------------------------------------|-----|
| Granice funkcji (w punkcie i w nieskończoności) .....             | 464 |
| Własność Darboux .....                                            | 467 |
| Pochodna funkcji (w tym funkcji złożonej) .....                   | 469 |
| Styczna do wykresu funkcji .....                                  | 472 |
| Pochodna funkcji a monotoniczność funkcji. Ekstrema funkcji ..... | 476 |
| Zadania optymalizacyjne .....                                     | 487 |