Matematyka

Tomasz Grębski

Podstawianie zmiennej pomocniczej w równaniach i nie tylko

Zadania z rozwiązaniami

Spis treści

Wstęp 5
Typowe podstawienia 6
Symbole używane w zbiorze 7
1. Podstawienie zmiennej pomocniczej w równaniach 8
1.1. Równania wielomianowe 8
1.2. Równania wielomianowe z wartością bezwzględną 17
1.3. Równania pierwiastkowe 18
1.4. Równania wymierne 29
1.5. Równania wykładnicze 32
1.6. Równania logarytmiczne 36
1.7. Równania logarytmiczno-wykładnicze 39
1.8. Równania trygonometryczne 41
1.9. Równania logarytmiczno-trygonometryczne 53
1.10. Równania trygonometryczno-wykładnicze 56
Zadania do samodzielnego rozwiązania 58
2. Podstawienie zmiennej pomocniczej w nierównościach 61
2.1. Nierówności wielomianowe 61
2.2. Nierówności wielomianowe z wartością bezwzględną 62
2.3. Nierówności wymierne z wartością bezwzględną 63
2.4. Nierówności pierwiastkowe 64
2.5. Nierówności wykładnicze 67
2.6. Nierówności logarytmiczne 67
2.7. Nierówności logarytmiczno-wykładnicze 69
2.8. Nierówności trygonometryczne 70
2.9. Nierówności trygonometryczno-wykładnicze 76
2.10. Nierówności trygonometryczno-logarytmiczne 78
Zadania do samodzielnego rozwiązania 80
3. Podstawienie zmiennej pomocniczej w układach równań 81
Zadania do samodzielnego rozwiązania 93
4. Podstawienie nowej zmiennej w równaniach z parametrem 94
Zadania do samodzielnego rozwiązania 109
5. Zadania różne 110
Zadania do samodzielnego rozwiązania 118
Odpowiedzi 119

Wstęp

W rozwiązywaniu równań, nierówności i układów równań potrzeba znajomości różnych metod, m.in. podstawienia zmiennej pomocniczej. Jest to zwykle wielkie ułatwienie w rozwiązaniu zadania, czasem wręcz jedyna skuteczna metoda. Jednak użycie nowej zmiennej często wymaga też wprowadzenia odpowiednich założeń lub dodatkowych warunków, w szczególności w zadaniach z parametrem i wartością bezwzględną. Proponuję bliżej się przyjrzeć tej metodzie i zobaczyć, w jak wielu różnych sytuacjach bywa skuteczna, a także jak ją poprawnie stosować.

W każdym rozdziale umieszczone są zadania o różnym stopniu trudności. Poszczególne szczeble zostały tak oznaczone:

- I pierwszy stopień wtajemniczenia,
- II drugi stopień wtajemniczenia,
- III trzeci (najtrudniejszy) stopień wtajemniczenia.

Zbiór zawiera 105 zadań z pełnymi rozwiązaniami oraz 98 zadań do samodzielnego rozwiązania; te ostatnie umieszczone są na końcu poszczególnych rozdziałów. Aby móc się zmierzyć z zebranymi tu zadaniami, trzeba – naturalnie – mieć pewną elementarną wiedzę na temat równań, nierówności i układów równań.

Książka przyda się uczniom przygotowującym się do egzaminu maturalnego lub do startu w konkursach matematycznych.

Od wielu lat prowadzę dodatkowe zajęcia z matematyki i tego typu zadania często rozwiązuję z uczniami. Niniejszy zbiór napisałem na podstawie wieloletniego doświadczenia, jestem przekonany, że może się przydać nauczycielom w pracy na lekcjach czy kółkach.

Warto zauważyć, że metoda podstawiania jest jedną z ważniejszych metod przy obliczaniu całek i rozwiązywaniu równań różniczkowych. Opanowanie tej metody ułatwi więc także naukę na studiach wyższych.

Życzę udanej pracy z zadaniami
Tomasz Grębski

II Zadanie 1.19.

Rozwiąż równanie: $2x^2 + 6x + 4 - 3\sqrt{x^2 + 3x - 4} = 14$.

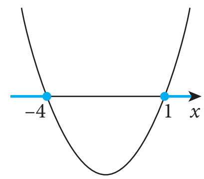
Rozwiązanie:

$2x^2 + 6x + 4 - 3\sqrt{x^2 + 3x - 4} = 14$

(*) $2(x^2 + 3x) + 4 - 3\sqrt{x^2 + 3x - 4} = 14$

D: $x^2 + 3x - 4 \geq 0$

Określamy dziedzinę równania ze względu na pierwiastek kwadratowy.



$(x + 4)(x - 1) \geq 0$

$x \in (-\infty, -4\rangle \cup \langle 1, +\infty)$

Wracamy do równania.

$\sqrt{x^2 + 3x - 4} = t$, gdzie $t \geq 0$

Podstawiamy nową zmienną, pamiętając o założeniu.

$x^2 + 3x - 4 = t^2 \Rightarrow x^2 + 3x = t^2 + 4$

Obie strony powyższej równości podnosimy do kwadratu i wyznaczamy element $(x^2 + 3x)$.

$2(t^2 + 4) + 4 - 3t = 14$

Do głównego równania (*) wprowadzamy zmienną t.

$2t^2 - 3t - 2 = 0$

$\Delta = 25, \sqrt{\Delta} = 5$

$$\left(t = 2 \vee t = -\frac{1}{2}\right) \wedge t \geq 0 \Rightarrow t = 2$$

$\sqrt{x^2 + 3x - 4} = 2$

Wracamy do zmiennej x.

$x^2 + 3x - 4 = 4$

$x^2 + 3x - 8 = 0$

Obie strony podnosimy do kwadratu.

$\Delta = 41, \sqrt{\Delta} = \sqrt{41}$

$$\left(x = \frac{-3 - \sqrt{41}}{2} \vee x = \frac{-3 + \sqrt{41}}{2}\right) \wedge x \in (-\infty, -4\rangle \cup \langle 1, +\infty)$$

Odpowiedź: $x \in \left\{\frac{-3 - \sqrt{41}}{2}, \frac{-3 + \sqrt{41}}{2}\right\}$.

II Zadanie 1.20.

Rozwiąż równanie: $\sqrt[3]{x-2} - \sqrt[3]{x-9} = 1$.

Rozwiązanie:

D: $x \in \boldsymbol{R}$

$\sqrt[3]{x-2} = 1 + \sqrt[3]{x-9}$ — Obie strony podnosimy do trzeciej potęgi.

$\left(\sqrt[3]{x-2}\right)^3 = \left(1 + \sqrt[3]{x-9}\right)^3$

Po prawej stronie równości zastosujemy wzór $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

$x - 2 = 1 + 3\sqrt[3]{x-9} + 3\sqrt[3]{(x-9)^2} + x - 9$

$6 = 3\sqrt[3]{x-9} + 3\sqrt[3]{(x-9)^2} \quad /:3$

$2 = \sqrt[3]{x-9} + \sqrt[3]{(x-9)^2}$

$\sqrt[3]{x-9} = t,\ t \in \boldsymbol{R}$ — Podstawiamy nową zmienną.

$2 = t + t^2$
$t^2 + t - 2 = 0$
$(t+2)(t-1) = 0$

$(t = -2 \vee t = 1) \wedge \sqrt[3]{x-9} = t$

$\sqrt[3]{x-9} = -2 \vee \sqrt[3]{x-9} = t$ — Obie strony obu równości podnosimy do trzeciej potęgi.

$x - 9 = -8 \vee x - 9 = 1$ — Wracamy do zmiennej x.

$x = 1 \vee x = 10$

Odpowiedź: $x \in \{1, 10\}$.

II Zadanie 1.21.

Rozwiąż równanie: $\sqrt[3]{x^2 + 4x + 4} - 6\sqrt[3]{x+2} - 16 = 0$.

Rozwiązanie:

D: $x \in \boldsymbol{R}$ — Określamy dziedzinę równania.

Zauważmy, że do wyrażenia pod pierwiastkiem łatwo zastosować wzór skróconego mnożenia.

$(*)\ \sqrt[3]{(x+2)^2} - 6\sqrt[3]{x+2} - 16 = 0$

$\sqrt[3]{x+2} = t$, gdzie $t \in \boldsymbol{R}$ — Podstawiamy nową zmienną.

Obie strony powyższej równości podnosimy do kwadratu.

$\sqrt[3]{(x+2)^2} = t^2$

$t^2 - 6t - 16 = 0$ — Do równania (*) wprowadzamy zmienną t.

$(t-8)(t+2) = 0$

$(t = 8 \vee t = -2) \wedge t \in \boldsymbol{R} \Rightarrow t = 8 \vee t = -2$

$(t = 8 \vee t = -2) \wedge \sqrt[3]{x+2} = t$

$\sqrt[3]{x+2} = 8 \vee \sqrt[3]{x+2} = -2$ — Wracamy do zmiennej x.

$x + 2 = 512 \vee x + 2 = -8$ — Obie strony obu równości podnosimy do trzeciej potęgi.

$x = 510 \vee x = -10$

Odpowiedź: $x = \{-0, 510\}$.

III Zadanie 1.22.

Rozwiąż równanie: $5\sqrt[3]{9-x^2} - 4\sqrt[3]{(3-x)^2} = \sqrt[3]{(3+x)^2}$.

Rozwiązanie:

$$5\sqrt[3]{9-x^2} - 4\sqrt[3]{(3-x)^2} = \sqrt[3]{(3+x)^2}$$

$\boldsymbol{D}$: $x \in \boldsymbol{R}$ — Określamy dziedzinę równania.

Zauważmy, że liczba 3 nie jest rozwiązaniem powyższego równania, możemy zatem podzielić obie strony równania przez $\sqrt[3]{(3-x)^2}$.

$$5\sqrt[3]{9-x^2} - 4\sqrt[3]{(3-x)^2} = \sqrt[3]{(3+x)^2} \quad /: \sqrt[3]{(3-x)^2}$$

$$5\sqrt[3]{\frac{(3-x)(3+x)}{(3-x)^2}} - 4 = \sqrt[3]{\frac{(3+x)^2}{(3-x)^2}}$$

$$5\sqrt[3]{\frac{3+x}{3-x}} - 4 = \sqrt[3]{\left(\frac{3+x}{3-x}\right)^2}$$

$\sqrt[3]{\frac{3+x}{3-x}} = t,\ t \in \boldsymbol{R}$ — Podstawiamy nową zmienną.

$5t - 4 = t^2$

$t^2 - 5t + 4 = 0$

$(t-1)(t-4) = 0$

$(t = 1 \vee t = 4) \wedge \sqrt[3]{\frac{3+x}{3-x}} = t$

1.8. Równania trygonometryczne

II **Zadanie 1.41.** (matura maj 2010 poziom rozszerzony)

Wyznacz wszystkie rozwiązania równania: $2\cos^2 x - 5\sin x - 4 = 0$ należące do przedziału $\langle 0, 2\pi\rangle$.

Rozwiązanie:

$\boldsymbol{D}$: $x \in \langle 0, 2\pi\rangle$ — Określamy dziedzinę równania.

$2\cos^2 x - 5\sin x - 4 = 0$

Przekształcamy równanie do postaci, w której występuje tylko jedna funkcja trygonometryczna. Użyjemy w tym celu „jedynki trygonometrycznej”:

$2(1 - \sin^2 x) - 5\sin x - 4 = 0$ — Porządkujemy wyrażenia.

$2\sin^2 x + 5\sin x + 2 = 0$

$\sin x = t$, gdzie $t \in \langle -1, 1\rangle$ — Podstawiamy nową zmienną, pamiętając o założeniu.

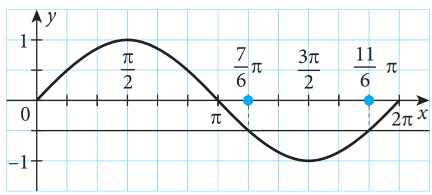
$2t^2 + 5t + 2 = 0$

$\Delta = 9$, $\sqrt{\Delta} = 3$

$$\left(t = -\frac{1}{2} \vee t = -2\right) \wedge t \in \langle -1, 1\rangle \Rightarrow t = -\frac{1}{2}$$

$$t = -\frac{1}{2} \wedge \sin x = t$$

$$\sin x = -\frac{1}{2} \wedge x \in \langle 0, 2\pi\rangle$$



Odpowiedź: $x \in \left\{\frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi\right\}$.

II **Zadanie 1.42.** (matura maj 2011 – poziom rozszerzony)

Rozwiąż równanie: $2\sin^2 x - 2\sin^2 x\cos x = 1 - \cos x$ w przedziale $\langle 0, 2\pi\rangle$.

Rozwiązanie:

$\boldsymbol{D}$: $x \in \langle 0, 2\pi\rangle$ — Określamy dziedzinę równania.

$2\sin^2 x - 2\sin^2 x\cos x = 1 - \cos x$

Przekształcamy równanie do postaci, w której występuje tylko jedna funkcja trygonometryczna. Użyjemy w tym celu „jedynki trygonometrycznej”:

$2(1 - \cos^2 x) - 2(1 - \cos^2 x)\cos x = 1 - \cos x$

$\cos x = t$, gdzie $t \in \langle -1, 1\rangle$ — Podstawiamy nową zmienną (z odpowiednim założeniem). Nie jest to jedyna metoda.

$2(1 - t^2) - 2(1 - t^2)t = 1 - t$

$2(1 - t^2)(1 - t) = 1 - t$

$2(1 - t^2)(1 - t) - (1 - t) = 0$

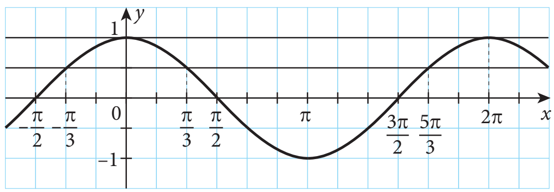
$(1-t)[2(1-t^2)-1]=0$

$1-t=0 \vee 2(1-t^2)-1=0$

$t=1 \ \vee 1-2t^2=0$

$$\left(t=1 \vee t=\frac{\sqrt{2}}{2} \vee t=-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \wedge \cos x=t$$

$$\left(\cos x=1 \vee \cos x=\frac{\sqrt{2}}{2} \vee \cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \wedge x \in \langle 0, 2\pi\rangle$$ Wracamy do zmiennej x.



Odpowiedź: $x \in \left\{0, \frac{1}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi, 2\pi\right\}.$

II **Zadanie 1.43.** (matura maj 2012 – poziom rozszerzony)

Rozwiąż równanie: $\cos 2x+2=3\cos x$.

Rozwiązanie:

$\boldsymbol{D}: x \in \boldsymbol{R}$

$\cos 2x+2=3\cos x$

Wykorzystamy wzór: $\cos 2x=2\cos^2 x-1$

$2\cos^2 x-1+2=3\cos x$

$2\cos^2 x-3\cos x+1=0$

$\cos x=t$, gdzie $t \in \langle -1, 1\rangle$ Podstawiamy nową zmienną, pamiętając o założeniu.

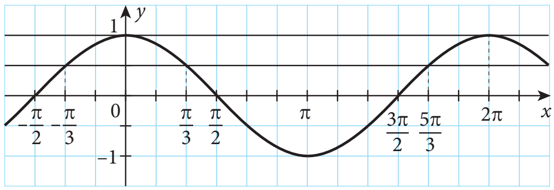
$2t^2-3t+1=0$

$\Delta=1, \sqrt{\Delta}=1$

$$\left(t=\frac{1}{2} \vee t=1\right) \wedge t \in \langle -1, 1\rangle \Rightarrow t=\frac{1}{2} \vee t=1$$

$$\left(t=\frac{1}{2} \vee t=1\right) \wedge \cos x=t$$ Wracamy do zmiennej x.

$$\cos x=\frac{1}{2} \vee \cos x=1$$



$$x = -\frac{1}{3}\pi + k2\pi \vee x = \frac{1}{3}\pi + k2\pi \vee x = k2\pi,\ k \in \boldsymbol{C}$$

Odpowiedź: $x \in \left\{-\frac{1}{3}\pi + 2k\pi, \frac{1}{3}\pi + 2k\pi, 2k\pi\right\}, k \in \boldsymbol{C}.$

II Zadanie 1.44.

Rozwiąż równanie: $3\mathrm{tg}^4 x - 10\mathrm{tg}^2 x + 3 = 0.$

Rozwiązanie:

$3\mathrm{tg}^4 x - 10\mathrm{tg}^2 x + 3 = 0$

$\boldsymbol{D}\colon x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \boldsymbol{C}$ — Określamy dziedzinę równania ze względu na funkcję tangens.

$3\mathrm{tg}^4 x - 10\mathrm{tg}^2 x + 3 = 0$

$\mathrm{tg}^2 x = t$, gdzie $t \geq 0$ — Podstawiamy nową zmienną, pamiętając o założeniu.

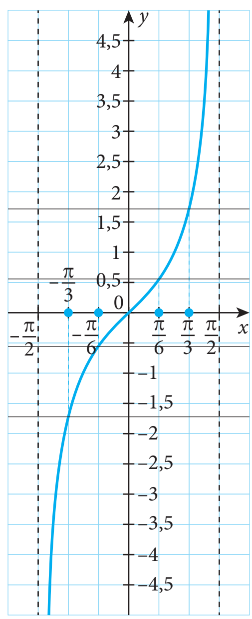
$3t^2 - 10t + 3 = 0$

$\Delta = 64, \sqrt{\Delta} = 8$

$\left(t = 3 \vee t = \frac{1}{3}\right) \wedge t \geq 0 \Rightarrow \left(t = 3 \vee t = \frac{1}{3}\right) \wedge \mathrm{tg}^2 x = t$, zatem

$\mathrm{tg}^2 x = 3 \vee \mathrm{tg}^2 x = \frac{1}{3}$ — Wracamy do zmiennej x.

$\mathrm{tg}\, x = \sqrt{3} \vee \mathrm{tg}\, x = -\sqrt{3} \vee \mathrm{tg}\, x = \frac{\sqrt{3}}{3} \vee \mathrm{tg}\, x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$



$$x = \frac{1}{3}\pi + k\pi \vee x = -\frac{1}{3}\pi + k\pi \vee x = \frac{1}{6}\pi + k\pi \vee$$

$$\vee\ x = -\frac{1}{6}\pi + k\pi, k \in \boldsymbol{C}$$

Powyższe rozwiązania można zapisać nieco krócej.

Odpowiedź: $x \in \left\{\frac{1}{6}\pi + k\frac{\pi}{2}, \frac{1}{3}\pi + k\frac{\pi}{2}\right\}, k \in \boldsymbol{C}.$

II Zadanie 1.45.

Rozwiąż równanie: $\dfrac{\cos x}{\cos 2x} + \dfrac{\cos 2x}{\cos x} + 2 = 0$.

Rozwiązanie:

$\boldsymbol{D}$: $\cos 2x \neq 0 \wedge \cos x \neq 0$

$2x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \wedge x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \boldsymbol{C}$

$\boldsymbol{D}$: $x \neq \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}$

$\dfrac{\cos 2x}{\cos x} = t,\ \ t \in \boldsymbol{R}$	Podstawiamy nową zmienną.

$t + \dfrac{1}{t} + 2 = 0 \quad /\cdot t$

$t^2 + 2t + 1 = 0$

$t = -1$

$\dfrac{\cos 2x}{\cos x} = -1 \quad /\cdot \cos x$	Wracamy do zmiennej x.

$\cos x = -\cos 2x$

$2\cos^2 x - 1 + \cos x = 0$

$\cos x = w,\ w \in \langle -1, 1\rangle$	Podstawiamy kolejną zmienną pomocniczą z odpowiednim założeniem.

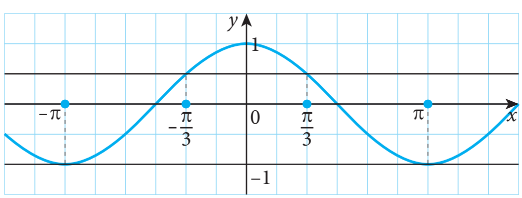
$2w^2 + w - 1 = 0$

$\Delta = 9,\ \sqrt{\Delta} = 3$

$\left(w = -1 \vee w = \dfrac{1}{2}\right) \wedge w \in \langle -1, 1\rangle \Rightarrow w = -1 \vee w = \dfrac{1}{2}$

$\left(w = -1 \vee w = \dfrac{1}{2}\right) \wedge \cos x = w$

$\cos x = -1 \vee \cos x = \dfrac{1}{2}$	Wracamy do zmiennej x.



Zadania do samodzielnego rozwiązania

I **1.1.** Rozwiąż równanie: $x^4 + x^2 - 2 = 0$.

I **1.2.** Rozwiąż równanie: $2x^4 - x^2 - 1 = 0$.

I **1.3.** Rozwiąż równanie: $25x^4 - 10x^2 + 1 = 0$.

I **1.4.** Rozwiąż równanie: $x^6 - 17x^3 + 16 = 0$.

I **1.5.** Rozwiąż równanie: $16x^8 - 15x^4 - 1 = 0$.

II **1.6.** Rozwiąż równanie: $x^9 - 3x^6 - 6x^3 + 8 = 0$.

I **1.7.** Rozwiąż równanie: $-3(-x^4 + 3x^2 - 3) = 6 + (3x^2 - x^4 - 1)^2$.

II **1.8.** Rozwiąż równanie: $(x^2 + 3x + 3)(2x^2 + 6x - 1) + 3 = 0$.

II **1.9.** Rozwiąż równanie: $x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 5x + 1 = 0$.

III **1.10.** Rozwiąż równanie: $x^6 - 10x^5 + 47x^4 - 100x^3 + 47x^2 - 10x + 1 = 0$.

II **1.11.** Rozwiąż równanie: $2(x - 3)^2 - 1 = -|x - 3|$.

II **1.12.** Rozwiąż równanie: $(x + 5)^2 = 2 - |x + 5|$.

II **1.13.** Rozwiąż równanie: $|x + 1|^5 = |x + 1|$.

I **1.14.** Rozwiąż równanie: $x + 7\sqrt{x} = 18$.

II **1.15.** Rozwiąż równanie: $x - 2 - 3\sqrt{x+6} = 0$.

II **1.16.** Rozwiąż równanie: $\sqrt[3]{x^2} - 6 = 5\sqrt[3]{x}$.

II **1.17.** Rozwiąż równanie: $\sqrt[3]{x^2 + 9 + 6x} - 12 = \sqrt[3]{x+3}$.

III **1.18.** Rozwiąż równanie: $5\sqrt[3]{4 - x^2} - \sqrt[3]{(2+x)^2} = 4\sqrt[3]{(2-x)^2}$.

III **1.19.** Rozwiąż równanie: $\sqrt[3]{x+5} - \sqrt[6]{x^2 - 25} = \sqrt[3]{x-5}$.

II **1.20.** Rozwiąż równanie: $3\sqrt[4]{\dfrac{x-1}{x+1}} + 3\sqrt[4]{\dfrac{x+1}{x-1}} = 10$.

II **1.21.** Rozwiąż równanie: $\sqrt[5]{\dfrac{x^2-4}{x+1}} - 3\sqrt[5]{\dfrac{x+1}{x^2-4}} = -2$.

II **1.22.** Rozwiąż równanie: $5\sqrt[4]{x^2 - 4} = 6 - \sqrt{x^2 - 4}$.

II **1.23.** Rozwiąż równanie: $x^2 + 3x - \dfrac{3}{2}\sqrt{x^2 + 3x - 4} = 4$.

II **1.24.** Rozwiąż równanie: $x^2 + 3x - 4 = 5\sqrt{x^2 + 3x - 4}$.

Odpowiedzi

1. Podstawienie zmiennej pomocniczej w równaniach

1.1. Podstawienie: $t = x^2$, gdzie $t \geq 0$.
Odpowiedź: $x \in \{-1, 1\}$.

1.2. Podstawienie: $t = x^2$, gdzie $t \geq 0$.
Odpowiedź: $x \in \{-1, 1\}$.

1.3. Podstawienie: $t = x^2$, gdzie $t \geq 0$.

Odpowiedź: $x \in \left\{-\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right\}$.

1.4. Podstawienie: $t = x^3$, gdzie $t \in \boldsymbol{R}$.

Odpowiedź: $x \in \left\{1, 2\sqrt[3]{2}\right\}$.

1.5. Podstawienie: $t = x^4$, gdzie $t \geq 0$.
Odpowiedź: $x \in \{-1, 1\}$.

1.6. Podstawienie: $t = x^3$, gdzie $t \in \boldsymbol{R}$.

Odpowiedź: $x \in \left\{1, -\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}\right\}$.

1.7. Podstawienie: $t = -x^4 + 3x^2 - 1$, gdzie $t \in \boldsymbol{R}$.
Odpowiedź:

$$x \in \left\{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}, -\sqrt{\frac{3+\sqrt{17}}{2}}, \sqrt{\frac{3+\sqrt{17}}{2}}\right\}.$$

1.8. Podstawienie: $t = x^2 + 3x$, gdzie $t \in \boldsymbol{R}$.
Odpowiedź: $x \in \{-3, 0\}$.

1.9. Podstawienie: $t = x + \frac{1}{x}$, gdzie $t \in \boldsymbol{R}$.

Odpowiedź: $x \in \left\{1, \frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

1.10. Podstawienie: $t = x + \frac{1}{x}$, gdzie $t \in \boldsymbol{R}$.

Odpowiedź: $x \in \left\{2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3}\right\}$.

1.11. Podstawienie: $t = |x - 3|$, gdzie $t \geq 0$.

Odpowiedź: $x \in \left\{\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right\}$.