Matematyka

Aleksandra Gębura

Kompendium maturalne

Zakres podstawowy

SPIS TREŚCI

4. FUNKCJE

5. CIĄGI LICZBOWE

6. TRYGONOMETRIA

WSTĘP

Kompendium jest dostosowane do wymagań egzaminu maturalnego obowiązujących od roku 2015 zgodnych z podstawą programową dla III i IV etapu edukacyjnego z 2008 roku. Kształcenie na poziomie gimnazjalnym i ponadgimnazjalnym, choć realizowany w dwóch różnych szkołach, tworzy spójną całość.

Książka jest adresowana do tych, którzy chcieliby przygotować się do egzaminu maturalnego z matematyki na poziomie podstawowym. Rozdziały odpowiadają działom wymagań w podstawie programowej dla szkół ponadgimnazjalnych. Przedstawione w książce przykłady – zadania z rozwiązaniami – zgrupowane są wokół poszczególnych wymagań podstawy programowej. Można więc użyć książki do gruntownego powtórzenia materiału, ale też do nadrabiania braków w określonych działach programowych. Najbardziej efektywną metodą przygotowania się do matury jest rozwiązywanie zadań działami, a dopiero później rozwiązywanie arkuszy maturalnych.

Zadania są tak dobrane, aby uwzględniały umiejętności matematyczne wyszczególnione w podstawie programowej, takie jak: używanie języka matematycznego do opisu rozumowań i interpretowania uzyskanych wyników, operowanie obiektami matematycznymi, budowanie modeli matematycznych danej sytuacji i krytyczne ocenianie ich trafności oraz stosowanie strategii rozwiązania problemu.

Każdy rozdział zawiera podstawowe wiadomości teoretyczne, rozgrzewkę, zestaw zadań o różnym stopniu trudności oraz „Czy już umiesz?”.

Część teoretyczna jest poprzedzona wykazem treści zawartych w podstawie programowej, których opanowanie jest niezbędne do zdania egzaminu na poziomie podstawowym. Oprócz tego w tej części rozdziału podany jest wykaz wszystkich umiejętności, które obowiązują na poziomie rozszerzonym. Treści lub informacje podane szarym drukiem nie obowiązują na egzaminie dla poziomu podstawowego, ale mogą być przydatne. Obowiązują natomiast tych, którzy chcieliby zdawać egzamin na poziomie rozszerzonym. Zadania i przykłady w tej książce nie wykraczają poza zakres podstawowy.

Rozgrzewka stanowi zbiór łatwych i prostych zadań, które warto rozwiązać przed przejściem do zadań bardziej złożonych.

Zadania o różnym stopniu trudności zamieszczone w następnej części są tak dobrane, aby objąć różne umiejętności matematyczne. W tej części każdego rozdziału znajdziesz odpowiedzi do wszystkich zadań. Początkowe zadania zawierają pełne rozwiązania. Kolejne zadania mogą zawierać już same wskazówki. W zależności od trudności danego zadania wskazówka jest mniej lub bardziej dokładna, ale zawsze prowadzi do odpowiedzi, natomiast nie zostawi Cię w połowie rozwiązania, bądź ze zbyt małą ilością informacji. Lepiej jest rozwiązywać zadania samodzielnie, a potem tylko porównać z rozwiązaniem w książce.

Czy już umiesz? – rozdział kończy zestaw zadań wszystkich trzech typów, które mogą wystąpić na egzaminie (tzn. zadań zamkniętych, otwartych krótkiej odpowiedzi i otwartych rozszerzonej odpowiedzi). Odpowiedzi znajdziesz na końcu książki.

Życzę powodzenia w przygotowaniach do egzaminu maturalnego
Autorka

3. RÓWNANIA I NIERÓWNOŚCI

Do egzaminu na poziomie podstawowym z materiału realizowanego w gimnazjum powinieneś pamiętać, jak:

1. zapisywać związki między wielkościami za pomocą równania pierwszego stopnia z jedną niewiadomą, w tym związki między wielkościami wprost proporcjonalnymi i odwrotnie proporcjonalnymi;
2. sprawdzać, czy dana liczba spełnia równanie stopnia pierwszego z jedną niewiadomą;
3. rozwiązywać równania stopnia pierwszego z jedną niewiadomą;
4. zapisywać związki między nieznanymi wielkościami za pomocą układu dwóch równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi;
5. sprawdzać, czy dana para liczb spełnia układ dwóch równań stopnia pierwszego z dwiema niewiadomymi;
6. rozwiązywać układy równań stopnia pierwszego z dwiema niewiadomymi;
7. za pomocą równań lub układów równań opisywać i rozwiązywać zadania osadzone w kontekście praktycznym.

Do egzaminu na poziomie podstawowym powinieneś umieć to, co po gimnazjum, a także:

1. sprawdzać, czy dana liczba rzeczywista jest rozwiązaniem równania lub nierówności;
2. wykorzystywać interpretację geometryczną układu równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi;
3. rozwiązywać nierówności pierwszego stopnia z jedną niewiadomą;
4. rozwiązywać równania kwadratowe z jedną niewiadomą;
5. rozwiązywać nierówności kwadratowe z jedną niewiadomą;
6. korzystać z definicji pierwiastka do rozwiązywania równań typu $x^3 = -8$;
7. korzystać z własności iloczynu przy rozwiązywaniu równań typu $x(x + 1)(x - 7) = 0$;
8. rozwiązywać proste równania wymierne prowadzące do równań liniowych lub kwadratowych, np. $\frac{x+1}{x+3} = 2$, $\frac{x+1}{x} = 2x$.

Gdybyś chciał zdawać egzamin na poziomie rozszerzonym, powinieneś spełniać wymagania określone dla poziomu podstawowego, a ponadto umieć:

1. stosować wzory Viète'a;
2. rozwiązywać równania i nierówności liniowe oraz kwadratowe z parametrem;
3. rozwiązywać układy równań, prowadzące do równań kwadratowych;

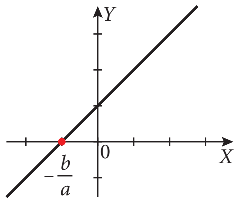
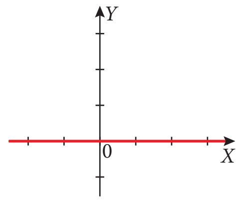
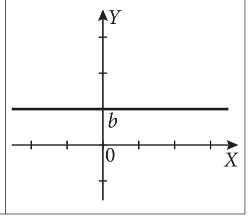
4. stosować twierdzenie o reszcie z dzielenia wielomianu przez dwumian $x - a$;
5. stosować twierdzenie o pierwiastkach wymiernych wielomianu o współczynnikach całkowitych;
6. rozwiązywać równania wielomianowe dające się łatwo sprowadzić do równań kwadratowych;
7. rozwiązywać łatwe nierówności wielomianowe;
8. rozwiązywać proste nierówności wymierne typu: $\frac{x+1}{x+3} > 2$, $\frac{x+3}{x^2-16} < \frac{2x}{x^2-4}$, $\frac{3x-2}{4x-7} \leq \frac{1-3x}{5-4x}$;
9. rozwiązywać równania i nierówności z wartością bezwzględną, o poziomie trudności nie wyższym niż: $||x+1|-2| = 3$, $|x+3| + |x-5| > 12$.

TEORIA

Równaniem liniowym z jedną niewiadomą x nazywamy równanie $ax + b = 0$, gdzie a i b są liczbami rzeczywistymi.
Równanie liniowe $ax + b = 0$, w którym $a \neq 0$, nazywamy **równaniem pierwszego stopnia z jedną niewiadomą**.
Nierównością pierwszego stopnia z jedną niewiadomą x nazywamy każdą z nierówności: $ax + b > 0$, $ax + b < 0$, $ax + b \leq 0$, $ax + b \geq 0$, gdzie a i b są liczbami rzeczywistymi oraz $a \neq 0$. Dwie pierwsze nierówności nazywamy ostrymi, dwie ostatnie – nieostrymi.
Rozwiązaniem równania (nierówności) z jedną niewiadomą jest każda liczba, która podstawiona w miejsce niewiadomej daje równość (nierówność) prawdziwą. Rozwiązanie równania nazywamy też **pierwiastkiem** tego równania.
Rozwiązanie równania (nierówności) oznacza znalezienie <u>wszystkich</u> rozwiązań tego równania (nierówności).
Zbiór utworzony ze wszystkich rozwiązań równania lub nierówności nazywamy **zbiorem rozwiązań** tego równania (nierówności). Równania (nierówności) nazywamy równoważnymi, gdy mają ten sam zbiór rozwiązań.

Rozwiązywanie równań liniowych

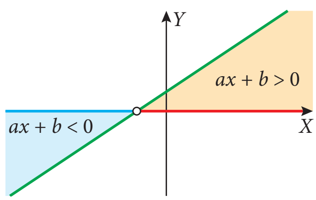
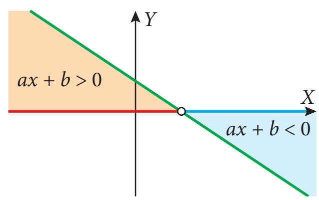
Metoda analizy starożytnych	Przekształcamy równanie wyjściowe tak, że każda liczba spełniająca to równanie spełnia równanie przekształcone (wynikowe). Obydwa równania, wyjściowe i wynikowe, mogą nie być równoważne. Wśród pierwiastków równania wynikowego, poza pierwiastkami równania wyjściowego, mogą znaleźć się **pierwiastki obce** (liczby, które nie spełniają równania wyjściowego, choć spełniają równanie wynikowe). Po zastosowaniu tej metody trzeba sprawdzić otrzymane pierwiastki i wyeliminować pierwiastki obce.
Metoda równań równoważnych	Tak przekształcamy dane równanie, by otrzymać równanie mu równoważne (mające ten sam zbiór rozwiązań).
Metoda graficzna	Rysujemy wykres równania i z wykresu odczytujemy rozwiązanie. Metoda prowadzi do uzyskania rozwiązań przybliżonych.

Równanie	pierwszego stopnia	tożsamościowe	sprzeczne
Warunki	$a \neq 0$	$a = 0$ i $b = 0$	$a = 0$ i $b \neq 0$
Liczba rozwiązań	jedno $\left(x = -\dfrac{b}{a}\right)$	nieskończenie wiele (wszystkie liczby rzeczywiste)	zero
Interpretacja geometryczna			

Rozwiązywanie nierówności liniowych

Nierówność	pierwszego stopnia	tożsamościowa	sprzeczna
mocna (ostra) $ax + b > 0$	$a \neq 0$	$a = 0$ i $b > 0$	$a = 0$ i $b \leq 0$
słaba (nieostra) $ax + b \geq 0$	$a \neq 0$	$a = 0$ i $b \geq 0$	$a = 0$ i $b < 0$

Zbiór rozwiązań nierówności liniowej pierwszego stopnia

$a > 0$	$a < 0$
	
$ax + b > 0 \iff x \in \left(-\dfrac{b}{a}, \infty\right)$	$ax + b > 0 \iff x \in \left(-\infty, -\dfrac{b}{a}\right)$
$ax + b < 0 \iff x \in \left(-\infty, -\dfrac{b}{a}\right)$	$ax + b < 0 \iff x \in \left(-\dfrac{b}{a}, \infty\right)$

Równania pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi

Równanie $Ax + By + C = 0$, w którym A, B, C oznaczają liczby takie, że $A^2 + B^2 > 0$, zaś x i y są zmiennymi, nazywamy **równaniem pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi** x i y.

Wykresem równania $Ax + By + C = 0$, gdzie $A^2 + B^2 > 0$, jest linia prosta.

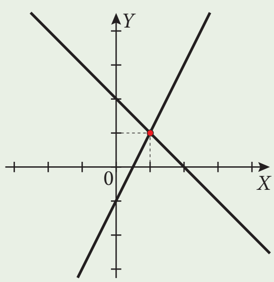
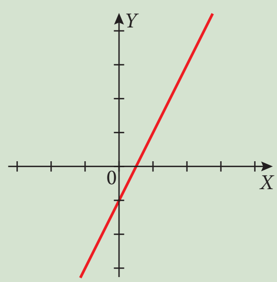
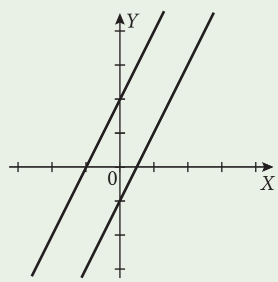
Układ dwóch równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi

Rozwiązaniem układu dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$, gdzie x, y są niewiadomymi, a_1, b_1, c_1, a_2, b_2 są liczbami danymi, jest każda para liczb x, y, które jednocześnie spełniają oba równania.

Metody rozwiązywania układów równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi

Metoda podstawiania	Wyznaczamy jedną z niewiadomych z jednego równania i wyrażamy ją w zależności od drugiej niewiadomej, a następnie podstawiamy do drugiego równania.
Metoda przeciwnych współczynników	Oba równania mnożymy przez tak dobrane liczby, aby w obu otrzymać przy tej samej niewiadomej przeciwne współczynniki, a następnie dodajemy równania stronami i uzyskujemy równanie z jedną niewiadomą.
Metoda porównywania	Przekształcamy oba równania w taki sposób, aby jedna z niewiadomych była wyrażona w zależności od drugiej, a następnie porównujemy odpowiednie strony równań, uzyskując równanie z jedną niewiadomą.
Metoda graficzna	Szkicujemy w prostokątnym układzie współrzędnych wykresy każdego z równań, a następnie odczytujemy współrzędne punktu przecięcia obu wykresów. Uwaga: Za pomocą tej metody uzyskujemy rozwiązanie przybliżone.

Graficzna interpretacja liczby rozwiązań układu dwóch równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi

układ oznaczony układ równań niezależnych	układ nieoznaczony układ równań zależnych	układ sprzeczny
		
jedno rozwiązanie	nieskończenie wiele rozwiązań	brak rozwiązań

Równanie kwadratowe

Równanie $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, w którym x jest niewiadomą, $a \neq 0$, b, c są liczbami danymi, nazywamy **równaniem kwadratowym z jedną niewiadomą (równaniem drugiego stopnia)**.
Jeżeli przynajmniej jedna spośród liczb b, c jest równa zero, to równanie nazywamy równaniem kwadratowym **niezupełnym**. Jeżeli $b \neq 0$ i $c \neq 0$, to równanie nazywamy **zupełnym**.
Liczba rozwiązań (pierwiastków) równania kwadratowego zależy od znaku wyróżnika: $\boldsymbol{\Delta} = b^2 - 4ac$.

Jeżeli $\Delta < 0$, to równanie kwadratowe nie ma pierwiastków.	Jeżeli $\Delta = 0$, to równanie ma jeden pierwiastek (tzw. podwójny) $x_0 = \frac{-b}{2a}$.	Jeżeli $\Delta > 0$, to równanie kwadratowe ma dwa różne pierwiastki $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ i $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.

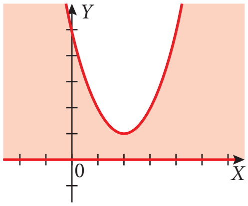
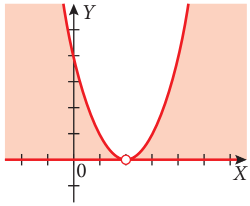
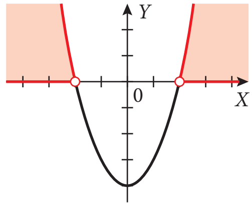
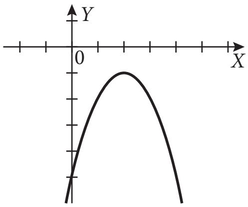
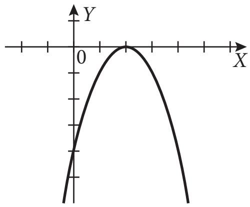
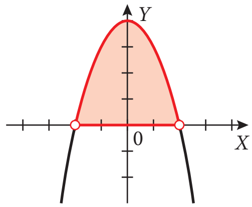
Rozwiązania równania kwadratowego niezupełnego

Warunki	$b = 0$ i $c \neq 0$	$b = 0$ i $c = 0$	$b \neq 0$ i $c = 0$
Postać równania	$ax^2 + c = 0$	$ax^2 = 0$	$ax^2 + bx = 0$
Liczba pierwiastków	Jeżeli $ac > 0$, to równanie nie ma pierwiastków rzeczywistych. Jeżeli $ac < 0$ to równanie ma dwa pierwiastki $x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}}$, $x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$.	Równanie ma jeden pierwiastek dwukrotny $x_1 = x_2 = 0$.	Równanie ma zawsze dwa pierwiastki $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{b}{a}$.

Nierówności kwadratowe

Każdą z nierówności postaci $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c \geq 0$, $ax^2 + bx + c \leq 0$, w której x jest niewiadomą, a, b, c są liczbami danymi, $a \neq 0$, nazywamy **nierównością kwadratową z jedną niewiadomą (nierównością drugiego stopnia)**.

Graficzna metoda rozwiązywania nierówności $ax^2 + bx + c > 0$

	$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
$a > 0$			
Rozwiązanie nierówności	każda liczba rzeczywista	$x < x_1$ lub $x > x_1$	$x < x_1$ lub $x > x_2$
Zbiór rozwiązań	$\boldsymbol{R}$	$(-\infty, x_1) \cup (x_1, \infty)$	$(-\infty, x_1) \cup (x_2, \infty)$
$a < 0$			
Rozwiązanie nierówności	brak rozwiązań	brak rozwiązań	$x_1 < x < x_2$
Zbiór rozwiązań	$\varnothing$	$\varnothing$	(x_1, x_2)

Równanie algebraiczne *n* tego stopnia $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 = 0$ $(a_n \neq 0, x \in \boldsymbol{R})$. Aby rozwiązać takie równanie, należy sumę algebraiczną z jego lewej strony rozłożyć na czynniki pierwszego lub drugiego stopnia, a następnie znaleźć miejsca zerowe każdego z czynników.

Równania wymierne

Równaniem wymiernym nazywamy równanie postaci $\frac{W}{Q} = 0,\ Q \neq 0$, gdzie W i Q są pewnymi sumami algebraicznymi, przy czym $Q \neq 0$.

Rozwiązywanie równań wymiernych

$\frac{W(x)}{Q(x)} = 0,\ Q \neq 0$	Aby rozwiązać równanie wymierne $\frac{W(x)}{Q(x)} = 0$: – określamy jego dziedzinę, zakładając, że $Q(x) \neq 0$; – korzystamy z równoważności $\frac{W(x)}{Q(x)} = 0 \iff W(x) = 0$ i $Q(x) \neq 0$; – ustalamy zbiór rozwiązań równania $W(x) = 0$ i znajdujemy zbiór rozwiązań równania wymiernego, uwzględniając jego dziedzinę.

ROZGRZEWKA 3.

1. Rozwiąż równania:

a) $3x + 5 = 0$

b) $4x - 1 = 2x + 3$

c) $\sqrt{2}x - 2 = 0$

d) $3(2x - 5) = 2(2x + 4)$

e) $2 - a = 5 - 3a$

f) $-2{,}5x + 4 = -1$

g) $\frac{1}{2}(x - 5) = \frac{3}{4}(5 - 3x)$

h) $\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{x}{\sqrt{10}}$

i) $\frac{2x + 7}{5} = 1$

j) $\frac{x - 2}{6} = \frac{4}{3}$

k) $5 - [(8x + 3) - 18x] = 9x$

l) $(3x - 2)^2 + 2x - 12 = 4 + 9x^2$

m) $(6x + 2)^2 = (9x - 1)(4x + 1)$

2. Rozwiąż równania:

a) $x(x - 2) = 0$

b) $(x + 3)(x - 2) = 0$

c) $-3(x + 5)(x - 7) = 0$

d) $5x(x + 3)$

e) $x^2 = 0$

f) $x^2 - 4 = 0$

g) $x^2 - 5x + 4 = 0$

h) $2x^2 - 11x - 15 = 0$

i) $-x^2 + 3x + 180 = 0$

j) $x^2 + 5x = 0$

k) $x^2 + 5x + 6 = 0$

l) $x^2 - 25 = 0$

m) $2x^2 + 10x = 0$

n) $0{,}2x^2 - x = -1{,}2$

o) $x^2 + 10x + 25 = 0$

p) $x^2 + 4x + 4 = 0$

q) $4x^2 + 4x + 1 = 0$

r) $2x(x + 2) = 0$

3. Rozwiąż równania:

a) $x^3 = 8$

b) $x^3 = -8$

c) $x^3 = \frac{1}{8}$

d) $x^3 = -0{,}001$

e) $2x^3 = \frac{1}{4}$

f) $(x + 2)(x - 3)(x - 1) = 0$

g) $x(x - 4)(x + 1) = 0$

4. Rozwiąż równania:

a) $\frac{3x - 1}{x + 2} = 0$

b) $\frac{3x - 3}{2x - 2} = 0$

c) $\frac{7x - 14}{10x + 5} = 0$

d) $\frac{5}{x} = \frac{4}{3}$

e) $\frac{3}{5} = \frac{x}{30}$

f) $\frac{x - 2}{4} = \frac{2x + 3}{3}$

g) $\frac{x - 2}{2} = \frac{5x - 14}{x + 2}$

5. Rozwiąż nierówności:

a) $\frac{2x - 3}{8} + \frac{x + 2}{4} < 1$

b) $\frac{2 + x}{3} + \frac{x - 3}{6} > 1$

c) $x \leq 0{,}2x + 1{,}6$

d) $0{,}08x + 0{,}09(2x + 3) \geq 130{,}27$

e) $(x^2 - 1) > \frac{(x - 1)^2 + (x + 2)^2}{2}$

f) $8x - 5 < x - 3(x - 1)$
g) $4x \leq -4$
h) $3(x + 2) + 4 < x + 14 - 2x$
i) $-2(z - 4) < 5(z - 1)$
j) $3(x - 2) - 5(2x - 1) \geq 0$

6. Rozwiąż układy równań:

a) $\begin{cases} 5x + 9y = 9 \\ 4x - 9y = 11 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - y = 7 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2y + 5x = 1 \\ y = 1 - 2x \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + y = 35 \\ y = 2x + 5 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x + 5y = 29 \\ 2y - 3x = 4 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 4x + 5y = 6 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 5x + 2y = 7 \\ 3x + y = 4 \end{cases}$

h) $\begin{cases} 4x - y = 3 \\ 11x + 12y = 23 \end{cases}$

7. Wyznacz wskazaną wielkość ze wzoru:

a) $\frac{1}{f} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$; x

b) $F = \frac{mv^2}{2g}$; m

c) $Pv = nRT$; T

d) $F = k\frac{Qq}{r^2}$; Q

8. Do danego równania dopisz drugie, aby układ nie miał rozwiązania.

a) $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x - 5y = 1 \\ \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - 10y = 2 \\ \end{cases}$

d) $\begin{cases} 6x + 2y = 0 \\ \end{cases}$

3

P3.1. Sprawdzanie, czy dana liczba rzeczywista jest rozwiązaniem równania lub nierówności

1. Sprawdź, czy liczba 2 jest rozwiązaniem równania $\frac{3x}{x-2} = 1 + \frac{6}{x-2}$.

$\frac{3\cdot 2}{2-2} = 1 + \frac{6}{2-2} = \frac{6}{0} = 1 + \frac{6}{0}$	Podstaw liczbę 2 w miejsce niewiadomej x i spróbuj wykonać wskazane działania. Po wykonaniu działań w liczniku pierwszego ułamka i obu mianownikach otrzymujesz wyrażenie, w którym musiałbyś wykonać dzielenie przez zero. To działanie jest niewykonalne, zatem liczba 2 nie może być rozwianiem tego równania.

2. Dla jakiej wartości m rozwiązaniem równania $4x + 3m = 17$ z niewiadomą x jest liczba 8?

$32 + 3m = 17$ $3m = 17 - 32$ $3m = -15$	Podstaw liczbę 8 w miejsce x. Otrzymasz równanie z niewiadomą m. Rozwiąż je. Odpowiedź: $m = -5$.

3. Sprawdź, która spośród liczb: -2, 3, 4, $\sqrt{10}$ nie jest rozwiązaniem nierówności $\frac{1}{6}(x+3) + \frac{1}{8}(x+1) \le 1{,}5$.

Przekształć nierówność do najprostszej możliwej nierówności równoważnej i wtedy sprawdź, które z podanych liczb spełniają tę nierówność.
Odpowiedź: 4 i $\sqrt{10}$.

4. Sprawdź, czy liczba $\frac{2}{3}$ jest rozwiązaniem równania:

$7x^2 - x(4 + x) = (2x - 5)(3x - 10) - 2(x + 14)$.

Podstaw $\left(\frac{2}{3}\right)$ w miejsce x i sprawdź, czy lewa strona równania jest równa prawej.

Odpowiedź: L = 0 i P = 0, więc L = P i liczba $\frac{2}{3}$ jest rozwiązaniem danego równania.

5. Sprawdź, czy liczba –3 jest rozwiązaniem równania:

$$\frac{\left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right)}{2}+6=\frac{(4-x)(4+x)}{3}+\frac{5x^2+13}{6}+x.$$

Odpowiedź: Tak.

6. Sprawdź, czy liczba –1 jest rozwiązaniem równania: $\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}=\frac{x^2+1}{x^2-1}$.

Zauważ, że liczba (–1) nie należy do dziedziny tego równania (gdybyśmy podstawili (–1) za x, otrzymalibyśmy zero w mianowniku).
Odpowiedź: Nie.

3

7. Sprawdź, czy liczba 2 jest rozwiązaniem równania: $\log_3\left(x+\sqrt{3}\right)=-\log_3\left(x-\sqrt{3}\right)$.

Podstaw 2 za x do podanej równości. Jeżeli przekształcisz równość do postaci: $\log_3\left(2+\sqrt{3}\right)+\log_3\left(2-\sqrt{3}\right)=0$, to możesz skorzystać z własności logarytmów, a następnie ze wzoru skróconego mnożenia. Otrzymasz wtedy $\log_3 1=0$, co jest prawdą, bo $3^0=1$.
Odpowiedź: Tak.

8. Sprawdź, czy liczba 100 jest rozwiązaniem równania: $x^{\log_{10}x}=100x$.

Podstaw 100 za x do podanej równości.
Wystarczy sprawdzić, czy $100^{\log_{10}100}$ jest równe 100^2.
Możesz to zrobić na dwa sposoby – albo obliczając logarytm w wykładniku (tak jest prościej), albo korzystając z własności potęg i logarytmów.
Odpowiedź: Tak.

9. Sprawdź, czy liczba 4 jest rozwiązaniem nierówności: $3^{x^2-2}\cdot 9^{x+3}<27^{x+2}$.

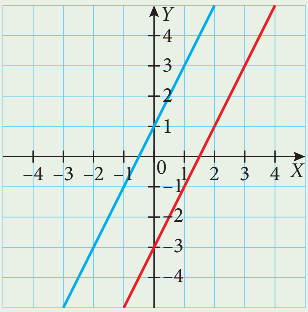
Podstaw 4 za x do podanej nierówności: Zapisz jej lewą i prawą stronę, jako potęgę liczby 3. Która liczba jest większa?
Odpowiedź: Nie.

10. Sprawdź, czy liczba 12 jest rozwiązaniem równania: $\sqrt{4+\sqrt{3x-11}}=3$.

Odpowiedź: Tak.

P3.2. Wykorzystywanie interpretacji geometrycznej układu równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi

1. Ile rozwiązań ma układ równań: $\begin{cases} y = 2x - 3 \\ 2x - y + 1 = 0 \end{cases}$?

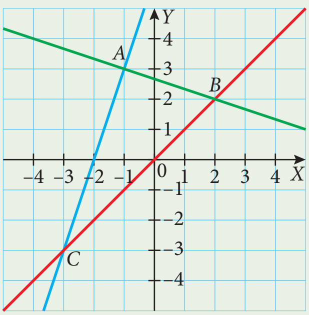


Sporządź wykresy obu funkcji.

$\begin{cases} y = 2x - 3 \\ y = 2x + 1 \end{cases}$

Otrzymane proste są równoległe i układ nie ma rozwiązania.
Jest to układ sprzeczny.

2. Boki trójkąta ABC zawierają się w prostych o równaniach: $y = x$, $3x - y + 6 = 0$, $3y + x - 8 = 0$. Wyznacz współrzędne wierzchołków trójkąta.



Współrzędne punktu A wyznaczysz, rozwiązując układ równań $\begin{cases} 3x - y + 6 = 0 \\ 3y + x - 8 = 0 \end{cases}$.

Możesz zastosować metodę podstawiania, wyznaczyć y z pierwszego równania ($y = 3x + 6$) i podstawić do drugiego: $3(3x + 6) + x - 8 = 0$.

Stąd $x = -1$ i $y = -3 + 6 = 3$, więc $A = (-1, 3)$.

Współrzędne punktu B wyznaczysz, rozwiązując układ równań $\begin{cases} y = x \\ 3y + x - 8 = 0 \end{cases}$,

$x = 2$, $y = 2$, więc $B = (2, 2)$.

Współrzędne punktu A wyznaczysz, rozwiązując układ równań $\begin{cases} 3x - y + 6 = 0 \\ y = x \end{cases}$.

Stąd $C = (-3, -3)$.

3. Wybierz układy sprzeczne:

A. $\begin{cases} y = \left(\sqrt{3}+1\right)x + 7 \\ y = \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}+1}\right)x - 1 \end{cases}$

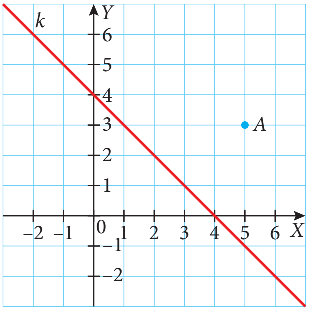
B. $\begin{cases} y = \left(\sqrt{3}+1\right)x - 3 \\ y = \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}-1}\right)x + 1 \end{cases}$

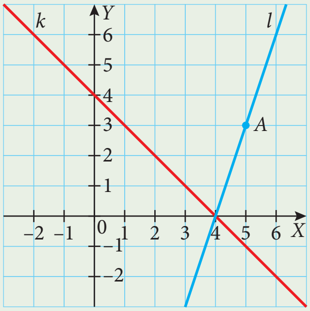
C. $\begin{cases} y = \left(\sqrt{3}+1\right)x - 5 \\ y = \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}\right)x + \sqrt{3} \end{cases}$

D. $\begin{cases} y = \left(\sqrt{3}-1\right)x - 4 \\ y = \left(\sqrt{3}+1\right)x - 4 \end{cases}$

Interpretacja geometryczna układu sprzecznego to proste równoległe. Jeżeli proste są przedstawione w postaci kierunkowej, to proste są równoległe, gdy mają takie same współczynniki kierunkowe (współczynniki przy x). Wystarczy przedstawić te współczynniki w takiej postaci, aby można było je porównać. Najprościej usunąć niewymierności z mianowników.
Odpowiedź: C.

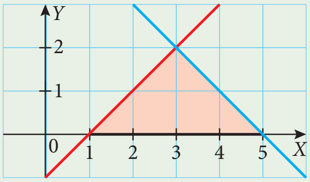
4. Na rysunku przedstawiona jest prosta k i punkt A. Narysuj prostą l przechodzącą przez punkt A tak, aby proste k i l były ilustracją graficzną układu równań o rozwiązaniu $x = 4$ i $y = 0$.





Zaznacz na rysunku punkt B o współrzędnych $(4, 0)$.
Poprowadź prostą l przez punkty A i B.

5. Oblicz pole trójkąta wyznaczonego przez proste o równaniach: $y = x - 1$ i $x + y = 5$ oraz oś OX.



Wierzchołki trójkąta są punktami przecięcia odpowiednio prostych $y = x - 1$ i $y = 0$, $y = x - 1$ i $x + y = 5$, $x + y = 5$ i $y = 0$. Rozwiąż układy równań.

$$\begin{cases} y = x - 1 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = x - 1 \\ y = -x + 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = -x + 5 \\ y = 0 \end{cases}$$

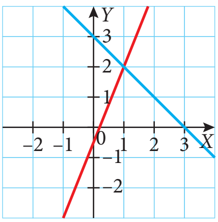
$x = 1, y = 0$ | $x = 3, y = 2$ | $x = 5, y = 0$

Podstawa trójkąta to odcinek o długości 4 (bo 5 – 1), a wysokość to odcinek o długości 2.

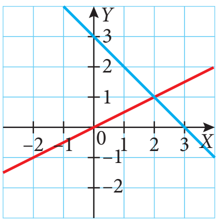
Odpowiedź: Pole $P = 4$ j^2.

6. Który z rysunków jest graficzną ilustracją układu $\begin{cases} 2x + y = 0 \\ y - x = 3 \end{cases}$?

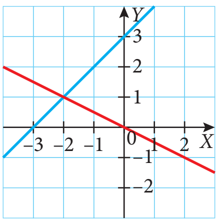
A.



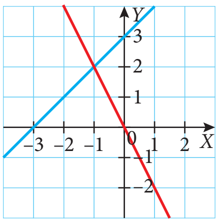
B.



C.



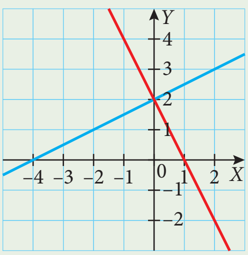
D.



I sposób:
Rozwiąż układ równań algebraicznie. Otrzymasz rozwiązanie $x = -1, y = 2$. Spośród rysunków wybierz ten, na którym proste przecinają się w punkcie $(-1, 2)$.

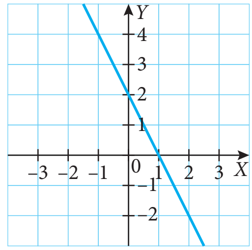
II sposób:
Przekształć równania do postaci $y = -2x$ i $y = x + 3$.
Na którym rysunku masz wykresy tych funkcji?
Odpowiedź: D.

7. Sprawdź, czy rozwiązanie układu równań $\begin{cases} 2y - x = 4 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$ należy do okręgu $x^2 + y^2 = 4$.



Rozwiąż układ graficznie lub algebraicznie.
$x = 0, y = 2$.
Teraz możesz postąpić na dwa sposoby.
I sposób: Podstaw otrzymane wartości do równania okręgu.
II sposób: Narysuj okrąg o środku w początku układu współrzędnych i promieniu 2. Sprawdź, czy punkt $(0, 2)$ należy do tego okręgu.
Odpowiedź: Tak.

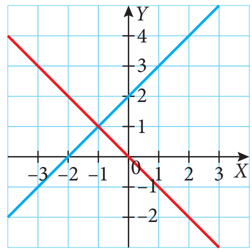
8. Napisz układ równań, którego interpretację geometryczną przedstawiono na rysunku.



Układ jest układem równań zależnych (układ nieoznaczony) i obrazują go dwie proste pokrywające się.

Odpowiedź: Np. $\begin{cases} y = -2x + 2 \\ 5y = -10x + 10 \end{cases}$.

9. Napisz układ równań, którego interpretację geometryczną przedstawiono na rysunku.



Układ jest układem równań niezależnych o rozwiązaniu $x = -1$, $y = 1$.

Odpowiedź: $\begin{cases} y = -x \\ y = x + 2 \end{cases}$.

P3.3. Rozwiązywanie nierówności pierwszego stopnia z jedną niewiadomą

1. Rozwiąż nierówność: $\dfrac{7(x+1)}{3} - 2 > \dfrac{5(x-1)}{6}$.

$$\frac{7(x+1)}{3} - 2 > \frac{5(x-1)}{6}$$

Pomnóż obie strony nierówności przez wspólny mianownik. W tym wypadku jest to 6.

$$\frac{6 \cdot 7(x+1)}{3} - 12 > \frac{6 \cdot 5(x-1)}{6}$$

Skróć ułamki.

$$14(x+1) - 12 > 5(x-1)$$

Wykonaj działania po obu stronach nierówności

$$14x + 2 > 5x - 5$$

Odejmij od obu stron $5x$ i 2.

$$9x > -7$$

$$x > -\frac{7}{9}$$

Odpowiedź: Rozwiązaniem są wszystkie liczby rzeczywiste większe od $\left(-\dfrac{7}{9}\right)$.

2. Rozwiąż nierówność: $3(x + 3)^2 + 4(x - 2)(x + 2) < 7(x + 2)^2 + 3$. Ile liczb całkowitych ujemnych ją spełnia?

Zastosuj wzory skróconego mnożenia:
$(x - y)(x + y) = x^2 - y^2$, $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$,
a następnie wykonaj redukcję wyrazów podobnych po jednej i drugiej stronie nierówności. Przekształć do takiej postaci, aby po jednej stronie mieć wyrażenie z niewiadomą, a po drugiej – stałe.
Pamiętaj o tym, że kiedy dzielimy obie strony nierówności przez liczbę ujemną, to musimy zmienić jej zwrot na przeciwny.
$3(x^2 + 6x + 9) + 4(x^2 - 4) < 7(x^2 + 4x + 4) + 3$
$3x^2 + 18x + 27 + 4x^2 - 16 < 7x^2 + 28x + 28 + 3$
$7x^2 + 18x + 11 < 7x^2 + 28x + 31$
$-10x < 20$
$x > -2$
Jedyną liczbą całkowitą ujemną większą od (–2) jest (–1).
Odpowiedź: Jedna.

3. Rozwiąż nierówność: $\left(2 + \sqrt{5}\right)\left(\sqrt{5} - x\right) \leq 3\sqrt{5} + 7$. Jaka jest najmniejsza liczba całkowita, która ją spełnia?

Zauważ, że po lewej stronie nierówności, w jednym z nawiasów współczynnik przy niewiadomej x jest liczbą całkowitą. Nie warto więc wykonywać zapisanych mnożeń, bo otrzymasz niewymierny współczynnik przy x. Możesz za to obie strony nierówności pomnożyć przez $\left(2 - \sqrt{5}\right)$, aby skorzystać ze wzoru skróconego mnożenia. Jest to jednak liczba ujemna, więc trzeba zmienić zwrot nierówności.
$\left(2 + \sqrt{5}\right)\left(2 - \sqrt{5}\right)\left(\sqrt{5} - x\right) \geq \left(3\sqrt{5} + 7\right)\left(2 - \sqrt{5}\right)$
$(4 - 5)\left(\sqrt{5} - x\right) \geq 6\sqrt{5} - 15 + 14 - 7\sqrt{5}$
$-\sqrt{5} + x \geq -1 - \sqrt{5} \quad / + \sqrt{5}$
$x \geq -1$
Odpowiedź: (–1).

4. Karol ma 34 lata, a jego syn Jacek ma 7 lat. Wybierz nierówność, która określa odpowiedź na pytanie: „Za ile lat Karol będzie mniej niż trzy razy starszy od Jacka?”.

A. $34 + x > 3(7 + x)$;
B. $34 + x < 3(7 + x)$;
C. $3(34 + x) < (7 + x)$;
D. $34 + x \leq 3(7 + x)$.

Odpowiedź: B.

5. Sylwek startował w czterech etapach „Biegów na orientację” i uzyskał w nich odpowiednio 94, 84, 88, 86 punktów. Ile musi uzyskać w piątym etapie, aby średnia punktów ze wszystkich etapów była nie mniejsza niż 90?

Rozwiąż nierówność: $\frac{94 + 84 + 88 + 86 + x}{5} \geq 90$.
$\frac{352 + x}{5} \geq 90$, czyli $x \geq 98$.
Odpowiedź: Sylwek w piątym biegu musi zdobyć co najmniej 98 punktów.

6. Iloraz inteligencji (IQ) obliczamy, dzieląc wiek umysłowy (wskazany przez standardowe testy) przez wiek życia i mnożąc ten stosunek przez 100: $\mathrm{IQ} = \frac{w_u}{w_z} \cdot 100$.

Jaki jest zakres wieku umysłowego pewnej grupy siedmiolatków, jeśli ich IQ mieści się między 75 a 125?

$75 \leq \mathrm{IQ} \leq 125$, czyli $\frac{w_u}{7} \cdot 100 \geq 75$ i $\frac{w_u}{7} \cdot 100 \leq 125$.
Gdy rozwiążesz każdą z powyższych nierówności, otrzymasz $w_u \geq 5{,}25$ i $w_u \leq 8{,}75$, czyli: $5{,}25 \leq w_u \leq 8{,}75$.
Odpowiedź: Wiek umysłowy dzieci mieści się między 5,25 a 8,75 roku.

7. Rozwiąż nierówność: $5 - [(8x + 7) - 18x] < 9x$.

Odpowiedź: $x < 2$.

8. Rozwiąż nierówność: $(3x + 2)^2 - x > 13 + 2x + 9x^2$.

Zastosuj wzór skróconego mnożenia $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
Odpowiedź: $x > 1$.

9. Rozwiąż nierówność: $\frac{2x-1}{2} - \frac{x-3}{6} \leq \frac{1-15x}{12} + 2$.

Pomnóż obie strony nierówności przez wspólny mianownik (12). Pamiętaj o tym, że kreska ułamkowa pełni rolę nawiasu, więc gdy usuniesz mianownik, weź w nawias wyrażenia znajdujące się w licznikach:
$6(2x - 1) - 2(x - 3) \leq (1 - 15x) + 24$.
Odpowiedź: $x \leq 1$.

10. Rozwiąż nierówność: $(x + 4)^2 > x^2 + 8x$.

$x^2 + 8x + 16 > x^2 + 8x$, więc $x^2 + 8x + 16 - x^2 - 8x > 0$, zatem: $16 > 0$.
Odpowiedź: Ta nierówność jest nierównością bezwarunkową, prawdziwą dla każdej liczby rzeczywistej.

11. Wyznacz wszystkie liczby pierwsze spełniające nierówność:
$(x-5)^2 - 2x^2 + \left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right) \geq -98$.

Zastosuj wzory skróconego mnożenia i wykonaj redukcję wyrazów podobnych: $-10x + 22 \geq -98$, czyli $-10x \geq -110$.
Podziel obie strony nierówności przez (-10), nie zapominając o zwrocie nierówności na przeciwny: $x \leq 11$.
Odpowiedź: Liczby pierwsze spełniające tę nierówność to: 2, 3, 5, 7, 11.

P3.4. Rozwiązywanie równań kwadratowych z jedną niewiadomą

1. Wybierz równanie, które ma dokładnie jedno rozwiązanie:
A. $x^2 - 4x + 2 = 0$; B. $x^2 - 4x - 4 = 0$; C. $x^2 - 4x + 4 = 0$; D. $x^2 - 4x - 2 = 0$.

I sposób: Oblicz wyróżnik trójmianu. Równanie ma jedno rozwiązanie, gdy wyróżnik jest równy zero.
II sposób: Równanie ma jedno rozwiązanie, gdy lewa jego strona jest kwadratem pewnego dwumianu. Możesz więc zastosować wzór skróconego mnożenia.
Odpowiedź: C.

2. Rozwiąż równanie: $-(2+x)^2 = \left(x-\sqrt{10}\right)\left(x+\sqrt{10}\right)$.

Pamiętaj o kolejności działań, najpierw podnieś dwumian do kwadratu, korzystając ze wzoru skróconego mnożenia. $-(4 + 4x + x^2) = x^2 - 10$. Sprowadź równanie kwadratowe postaci ogólnej: $x^2 + 2x - 3 = 0$.
Odpowiedź: $x = -3$ lub $x = 1$.

3. Rozwiąż równanie: a) $x^2 - 25 = 0$; b) $x^2 - 4x = 0$.

Oba równania są równaniami niezupełnymi i można je łatwo rozwiązać, przedstawiając lewe ich strony w postaci iloczynowej.
a) W tym podpunkcie skorzystaj ze wzoru skróconego mnożenia na różnicę kwadratów: $(x-5)(x+5) = 0$, gdy $x = 5$ lub $x = -5$.
b) Wyłącz wspólny czynnik przed nawias.
Odpowiedź: $x = 0$ lub $x = 4$.

4. Pokój ma 5 m długości, a jego wysokość i szerokość są równe. Pole powierzchni ścian pokoju, łącznie z drzwiami i oknami, jest równe 48 m^2. Jakie są wymiary pokoju?

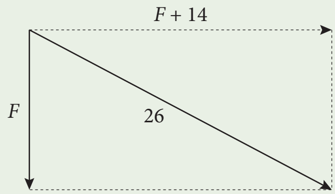
Oznacz nieznaną szerokość pokoju, np. x. Dwie ściany są kwadratami o boku x, a dwie prostokątami o bokach 5 i x. Pole powierzchni wszystkich ścian jest więc równe: $2x^2 + 10x$. Ułóż i rozwiąż odpowiednie równanie kwadratowe. Spośród rozwiązań $x_1 = -8$ i $x_2 = 3$, wybierz spełniające warunki zadania.
Odpowiedź: Pokój ma długość 5 m, szerokość 3 m i wysokość 3 m.

5. Wyznacz współczynniki b i c, wiedząc, że pierwiastkami równania $3x^2 + bx + c = 0$ są liczby (-2) i 3.

Możesz skorzystać z postaci iloczynowej funkcji kwadratowej, tzn.: $3(x + 2)(x - 3)$. Gdy wykonasz wskazane działania, otrzymasz równanie kwadratowe postaci $3x^2 + bx + c = 0$, z którego odczytasz wartości współczynników.
Odpowiedź: $b = -3$, $c = -18$.

3

6. Z dwóch sił działających na ciało pod kątem prostym jedna jest większa od drugiej o 14 N. Znajdź wartości obu sił, gdy wartość siły wypadkowej jest równa 26 N.



Ułóż równanie, korzystając z twierdzenia Pitagorasa: $F^2 + (F + 14)^2 = 26^2$.
Skorzystaj ze wzoru skróconego mnożenia, a następnie wykonaj redukcję wyrazów podobnych.
$2F^2 + 28F + 196 = 676$, czyli $F^2 + 14F - 240 = 0$.
Dodatnie rozwiązanie tego równania to $F = 10$ N.
Odpowiedź: Szukane siły mają wartości 10 N i 24 N.

7. Dwa statki spotkały się na morzu. Po spotkaniu jeden popłynął na wschód z prędkością 18 węzłów, a drugi na północ z prędkością 24 węzłów. Po jakim czasie znajdą się w odległości 60 mil morskich od siebie (mierzonej w linii prostej)?

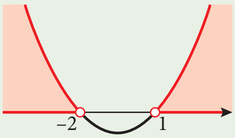
Wykonaj rysunek i wprowadź oznaczenia. Drogę, jaką pokonał pierwszy ze statków w czasie t, możesz oznaczyć $18t$, a drugi – $24t$. Ułóż równanie, korzystając z twierdzenia Pitagorasa.
Odpowiedź: Po dwóch godzinach.

8. W roku 2015 na uroczystości urodzin zapytano jubilata, ile ma lat. Jubilat odpowiedział: „Jeśli swój wiek sprzed 20 lat pomnożę przez swój wiek za rok, to otrzymam rok mojego urodzenia". Ułóż odpowiednie równanie, rozwiąż je i zapisz, w którym roku urodził się ten jubilat.

Jeżeli przez x oznaczysz aktualny wiek jubilata, to 20 lat przed rokiem 2015 miał on $(x - 20)$ lat, a w następnym po 2015 będzie miał $(x + 1)$ lat.
Szukane równanie to: $(x - 20)(x + 1) = 2015 - x$.
Rozwiąż to równanie i spośród jego pierwiastków wybierz to, które spełnia warunki zadania. Wiek jubilata w 2015 roku to 55 lat.
Odpowiedź: Urodził się w 1960 roku.

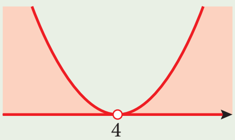
P3.5. Rozwiązywanie nierówności kwadratowych z jedną niewiadomą

1. Rozwiąż nierówność $2x^2 + 2x - 4 > 0$.



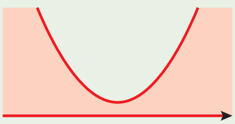
$a = 2 > 0$, $\Delta = 36 > 0$, $x_1 = -2$, $x_2 = 1$.
Naszkicuj wykres funkcji kwadratowej i odczytaj rozwiązanie na podstawie wykresu.
Odpowiedź: $x < -2$ lub $x > 1$,
czyli $x \in (-\infty, -2)$ lub $x \in (1, \infty)$.

2. Rozwiąż nierówność $x^2 - 8x + 16 > 0$.



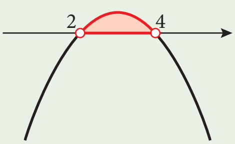
$a = 1 > 0$, $\Delta = 0$, $x_1 = x_2 = 4$.
Naszkicuj wykres funkcji kwadratowej i odczytaj rozwiązanie na podstawie wykresu.
Odpowiedź: $x < 4$ lub $x > 4$,
czyli $x \in (-\infty, 4)$ lub $x \in (4, \infty)$.

3. Rozwiąż nierówność $x^2 - 2x + 16 > 0$.



$a = 1 > 0$, $\Delta = -60 < 0$.
Naszkicuj wykres funkcji kwadratowej.
Odpowiedź: Nierówność jest prawdziwa dla dowolnego x.

4. Rozwiąż nierówność: $-x^2 + 6x - 8 > 0$.



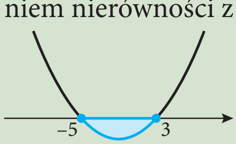
$a = -1 < 0$, $\Delta = 4 > 0$, $x_1 = 2$, $x_2 = 4$.
Naszkicuj wykres funkcji kwadratowej i odczytaj rozwiązanie na podstawie wykresu.
Odpowiedź: $x > 2$ i $x < 4$, czyli $x \in (2, 4)$.

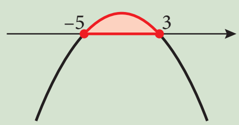
5. Wskaż nierówność, której rozwiązaniem jest przedział $\langle -5, 3\rangle$:

A. $(x + 3)(x - 5) \le 0$;
B. $(x - 3)(x + 5) \ge 0$;
C. $(3 - x)(x + 5) \ge 0$;
D. $(x + 3)(5 - x) \ge 0$.

A. $a = 1 > 0$, $x_1 = -3$, $x_2 = 5$;
B. $a = 1 > 0$, $x_1 = -5$, $x_2 = 3$;
C. $a = -1 < 0$, $x_1 = -5$, $x_2 = 3$;
D. $a = -1 < 0$, $x_1 = -3$, $x_2 = 5$.

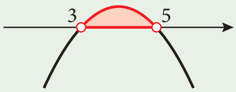
W każdym wypadku odczytaj wartość a i x_1, x_2.
Podany przedział nie może być rozwiązaniem nierówności z punktów A i D.





Odpowiedź: Jak widać na podstawie wykresów, przedział jest rozwiązaniem nierówności z punktu C.

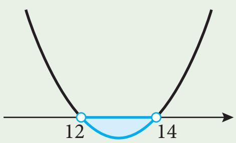
6. Rozwiąż nierówność: $(x + 2)^2 - 8 > 2(x - 1)^2 + 9$.

$x^2 + 4x + 4 - 8 > 2(x^2 - 2x + 1) + 9$ $-x^2 + 8x - 15 > 0$, $a = -1 < 0, \Delta = 4 > 0, x_1 = 3, x_2 = 5$ 	Skorzystaj ze wzorów skróconego mnożenia na kwadrat dwumianu i przekształć nierówność do postaci: $ax^2 + bx + c > 0$. Pamiętaj o kolejności działań. Najpierw wykonaj potęgowanie, a potem mnożenie. Rozwiązanie ustal na podstawie szkicu wykresu. Odpowiedź: $x \in (3, 5)$.

7. Maciej w rozmowie z kolegą stwierdza:

– *Miałem dziś pecha. Zarobiłem trochę punktów karnych i dwa mandaty.*
– *A ile punktów dostałeś?*
– *Gdybyś liczbę punktów pomnożył przez liczbę o 26 mniejszą, a do wyniku dodał 168, czyli prędkość, z jaką jechałem, to otrzymałbyś liczbę ujemną.*

Ile punktów karnych otrzymał Maciej?

$x(x - 26) + 168 < 0$ $x^2 - 26x + 168 < 0$ 	Oznacz x – liczba punktów karnych. Pamiętaj, że x jest liczbą całkowitą. Ułóż nierówność, przekształć trójmian z lewej strony nierówności do postaci ogólnej. $a = 1 > 0, \Delta = 4 > 0, x_1 = 12, x_2 = 14$. Rozwiązaniem nierówności jest przedział (12, 14). Jedyną liczbą całkowitą należącą do tego przedziału jest 13. Odpowiedź: Maciej otrzymał 13 punktów karnych.

8. Rozwiąż nierówności:

a) $x^2 > x + 20$	Odpowiedź: $x < -4$ lub $x > 5$.
b) $x^2 > x$	Odpowiedź: $x < 0$ lub $x > 1$.
c) $2x^2 \leq x - 5$	Odpowiedź: Brak rozwiązania.
d) $x^2 + 25 \leq 10x$	Odpowiedź: $x = 5$.

P3.6. Korzystanie z definicji pierwiastka do rozwiązywania równań typu $x^3 = -8$

1. Korzystając z definicji pierwiastka, rozwiąż równanie:

a) $x^3 + 8 = 0$	$x^3 = -8$, więc $x = \sqrt[3]{-8}$. Odpowiedź: $x = -2$.
b) $(x - 4)^3 = -27$	$\sqrt[3]{-27} = -3$, więc $x - 4 = -3$. Odpowiedź: $x = 1$.
c) $(2x - 13)^3 = -64$	$\sqrt[3]{-64} = -4$, więc $2x - 13 = -4$ Odpowiedź: $x = 4{,}5$.
d) $12 + (x + 7)^3 = 4$	To równanie jest równoważne równaniu: $(x + 7)^3 = -8$ $\sqrt[3]{-8} = -2$, więc $x + 7 = -2$. Odpowiedź: $x = -9$.

2. Firma zdeponowała w banku kwotę 120 000 zł. Jaka była roczna stopa procentowa w tym banku, jeśli po trzech latach na koncie firmy znajdowało się 207 360 zł?

Jeżeli przez K oznaczysz wartość zdeponowanej kwoty, przez p – roczną stopę procentową, przez K_3 – kwotę znajdującą się na koncie po trzech latach, to możesz zapisać zależność między tymi wartościami w postaci wzoru: $K_3 = K \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^3$. Przekształć wzór: $1 + \frac{p}{100} = \sqrt[3]{\frac{K_3}{K}}$, czyli

$p = 100 \cdot \sqrt[3]{\frac{K_3}{K}} - 100$.

Podstaw dane. Skorzystaj z faktu, że $\sqrt[3]{1{,}728} = 1{,}2$.
Odpowiedź: $p = 20\%$.

3. Krawędź sześcianu ma długość x. Sześcian o krawędzi o 10 cm dłuższej ma objętość równą 8000 cm^3. Oblicz długość krawędzi pierwszego sześcianu.

$(x + 10)^3 = 8000$. Skorzystaj z faktu, że $\sqrt[3]{8000} = 20$.
Odpowiedź: Pierwszy sześcian miał krawędź o długości 10 cm.

4. 3 osoby wsiadły do windy w budynku o n piętrach. Gdyby w budynku było o cztery piętra mniej, to osoby te mogłyby wysiąść z windy na 125 sposobów. Ile jest pięter?

Rozwiąż równanie: $(n - 4)^3 = 125$.
Odpowiedź: W budynku jest 9 pięter.

5. Rozwiąż równanie: $8\left(2x - \dfrac{3x+1}{2}\right)^3 + 1 = 0.$

Przekształć równanie do postaci: $\left(\dfrac{x-1}{2}\right)^3 = \dfrac{-1}{8}.$
Skorzystaj z definicji pierwiastka.
Rozwiąż otrzymane równanie: $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{-1}{2}.$
Odpowiedź: $x = 0$.

3

P3.7. Korzystanie z własności iloczynu przy rozwiązywaniu równań typu $x(x+1)(x-7) = 0$

1. Rozwiąż równanie: $(x-1)(2x-3)(x+6) = 0.$

Zauważ, że iloczyn jest równy zero, kiedy jeden z czynników jest równy zero, tzn. $abc = 0 \Leftrightarrow a = 0$ lub $b = 0$, lub $c = 0$.
W tym wypadku $(x-1) = 0$ lub $(2x-3) = 0$, lub $(x+6) = 0$.
Odpowiedź: rozwiązaniami równania są liczby: -6, 1 oraz 1,5

2. Rozwiąż równanie: $(5x-10)(x^2+4x+4) = 0.$

Rozłóż drugi nawias na czynniki, korzystając ze wzoru na kwadrat sumy: $(5x-10)(x+2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ lub $x = -2$.

3. Rozwiąż równanie: $(x^2-5x+6)(x^2-4) = 0.$

$(x^2-5x+6) = 0$ lub $(x^2-4) = 0$. Rozwiązując pierwsze równanie kwadratowe, otrzymasz pierwiastki $x_1 = 2$, $x_2 = 3$.
Drugie równanie możesz rozłożyć na czynniki, korzystając ze wzoru skróconego mnożenia na różnicę kwadratów:
$(x-2)(x+2) = 0 \Leftrightarrow x = -2$ lub $x = 2$.
Odpowiedź: Równanie ma trzy rozwiązania: -2, 2, 3.

4. Ile rozwiązań ma równanie: $(x^2-10x+25)(2x^2+10x)(x^2-4x-5) = 0$?

Każdy z czynników możesz przedstawić w postaci iloczynowej, korzystając ze wzorów skróconego mnożenia lub postaci iloczynowej funkcji kwadratowej. Równanie przyjmie więc postać: $2x(x-5)^2(x+5)(x-5)(x+1) = 0$, czyli: $2x(x-5)^3(x+5)(x+1) = 0.$
Odpowiedź: Równanie ma cztery pierwiastki.

5. Rozwiąż równanie: $8(x - 1) + (x - 1)(x^2 + 4) = 0$.

Wyłącz wspólny czynnik przed nawias.
Iloczyn $(x - 1)(x^2 + 12)$ jest równy 0, jeśli $x = 1$.

P3.8. Rozwiązywanie prostych równań wymiernych prowadzących do równań liniowych lub kwadratowych, np. $\frac{x+1}{x+3} = 2$, $\frac{x+1}{x} = 2x$

1. Rozwiąż równanie: $x + \frac{8}{x} = 6$.

$x^2 - 6x + 8 = 0$ $\Delta = 4 > 0$, $x_1 = 2$, $x_2 = 4$	Równanie ma sens, jeśli $x \neq 0$. Pomnóż równanie stronami przez x. Rozwiąż otrzymane równanie kwadratowe. Odpowiedź: $x_1 = 2$, $x_2 = 4$.

2. Rozwiąż równanie: $\frac{x-4}{x+1} = \frac{2x+1}{x-3}$.

$(2x + 1)(x + 1) = (x - 3)(x - 4)$ $2x^2 + 3x + 1 = x^2 - 7x + 12$ $x^2 + 10x - 11 = 0$ $\Delta = 144 > 0$, $x_1 = -11$, $x_2 = 1$	Równanie ma sens, jeśli $x \neq -1$ i $x \neq 3$. Skorzystaj z własności proporcji (iloczyn wyrazów skrajnych jest równy iloczynowi wyrazów środkowych. Uporządkuj i rozwiąż otrzymane równanie kwadratowe. Oba pierwiastki równania kwadratowego należą do dziedziny równania. Odpowiedź: $x_1 = -11$, $x_2 = 1$.

3. Rozwiąż równanie: $\frac{4}{x-6} = x + \frac{x-2}{x-6}$.

$4 = x(x - 6) + (x - 2)$ $x^2 - 5x - 6 = 0$ $\Delta = 49 > 0$, $x_1 = -1$, $x_2 = 6$	Równanie ma sens, jeśli $x \neq 6$. Pomnóż równanie stronami przez $(x - 6)$. Uporządkuj otrzymane równanie kwadratowe. Z założenia wynika, że rozwiązaniem nie może być liczba 6. Odpowiedź: Równanie ma jedno rozwiązanie $x = -1$.

4. Drużyna piłkarska wygrała x meczów i przegrała y. Jaką częścią wszystkich rozegranych meczów jest liczba wygranych meczów, o ile nie było wyników remisowych?

A. $\frac{x}{x+y}$; B. $\frac{x}{y}$; C. $\frac{x+y}{x}$; D. $\frac{x-y}{x+y}$.

Zauważ, że drużyna łącznie rozegrała $x + y$ meczów. Zatem prawdziwa jest odpowiedź A.

3

5. W jakiej odległości od soczewki o ogniskowej 10 cm należy ustawić przedmiot, aby odległość między przedmiotem a obrazem wynosiła 72 cm? Równanie soczewki to $\frac{1}{f} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, gdzie f to ogniskowa, x – odległość przedmiotu od soczewki, a y – odległość obrazu od soczewki.

$\frac{1}{10} = \frac{1}{x} + \frac{1}{72-x}$	Odległość między przedmiotem a obrazem jest równa $x + y$. Podstaw do równania soczewki $(72 - x)$ za y.
$\frac{1}{10} = \frac{72}{x(72-x)}$	Dodaj ułamki po prawej stronie równania, sprowadzając je najpierw do wspólnego mianownika.
$x(72 - x) = 720$ $x^2 - 72x + 720 = 0$ $\Delta = 2304$, $x_1 = 12$, $x_2 = 60$	Skorzystaj z własności proporcji, a następnie rozwiąż otrzymane równanie kwadratowe.
	Odpowiedź: Przedmiot należy ustawić w odległości 12 cm lub 60 cm od soczewki.

6. Wyznacz takie liczby a i b, aby zachodziła równość $\frac{a}{x+3} + \frac{b}{x-4} = \frac{3x-5}{(x+3)(x-4)}$, jeśli $x \neq -3$ i $x \neq 4$.

Sprowadź ułamki po lewej stronie równania do wspólnego mianownika i dodaj je do siebie.

Otrzymasz $\frac{ax - 4a + bx + 3b}{(x+3)(x-4)}$, czyli $\frac{(a+b)x - 4a + 3b}{(x+3)(x-4)}$. Mianowniki ułamków znajdujących się po obu stronach równości są równe. Wystarczy więc, jeśli porównasz liczniki. Będą one równe wtedy, gdy współczynniki przy x i wyrazy wolne będą równe. Ułóż i rozwiąż odpowiedni układ równań.

$$\begin{cases} a + b = 3 \\ -4a + 3b = -5 \end{cases}$$

Odpowiedź: $a = 2$, $b = 1$.

CZY JUŻ UMIESZ?

3.1. Rozwiązaniem równania $ax + 4(x - 2) = 16$ jest liczba $x = 4$. Współczynnik a jest równy:

A. -2; B. 4; C. 2; D. 0.

3.2. Który z poniższych układów równań można otrzymać po przekształceniu układu równań: $\begin{cases} 3x - y = 5 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases}$?

A. $\begin{cases} y = 3x - 5 \\ 2x - 9x - 15 = 1 \end{cases}$ B. $\begin{cases} y = 3x - 5 \\ 2x - 9x + 15 = 1 \end{cases}$

C. $\begin{cases} y = 5 - 3x \\ 2x + 15 - 9x = 1 \end{cases}$ D. $\begin{cases} y = 5 - 3x \\ 2x - 15 + 9x = 1 \end{cases}$

3.3. Ile liczb pierwszych jest rozwiązaniem nierówności: $(x + 2)^2 \leq (x - 3)^2 + 25$?

A. 1; B. 2; C. 3; D. nieskończenie wiele.

3.4. Liczby: (-3), (-2), 2, 3 są rozwiązaniami równania:

A. $(x^2 + 4)(x - 3)^2(x + 3) = 0$; B. $(x^2 - 4)(x^2 + 9)(x - 3) = 0$;
C. $(x^2 - 4)(x + 3)^2(x - 3) = 0$; D. $(x^2 - 9)(x^2 + 4)(x + 3) = 0$.

3.5. Wybierz równanie, które nie ma rozwiązań:

A. $5x^2 + 19 = 0$; B. $5x^2 + 19x = 0$; C. $5x^2 - 19 = 0$; D. $5x^2 - 19x = 0$.

3.6. Dane są trzy równania: $x(x^2 + 4)(x - 1) = 0$, $\dfrac{2x}{2x - 1} = \dfrac{3x + 2}{3x}$, $x^3 = -8$. Liczba 2 jest rozwiązaniem:

A. tylko jednego równania; B. wszystkich równań;
C. dwóch równań; D. żadnego z równań.

3.7. Pewna liczba cukierków została podzielona między dwoje dzieci. Dostały po 15 cukierków. Ile cukierków dostałoby każde dziecko, gdyby tę samą liczbę cukierków należało podzielić między 6 dzieci?

A. 45; B. 5; C. 3; D. 10.

3.8. Majster wykonuje jeden detal w ciągu 7 minut, a jego uczeń potrzebuje na to 10 minut. Pracując razem, wykonali 102 detale. Ile detali wykonał majster, a ile jego uczeń?

A. uczeń 28, majster 74; B. uczeń 32, majster 70;
C. uczeń 40, majster 62; D. uczeń 42, majster 60.

3.9. Wskaż nierówność, której rozwiązaniem są liczby z przedziału $(-7, 2)$.

A. $(x + 7)(2 - x) < 0$; B. $(x - 7)(2 + x) < 0$;
C. $(x + 7)(x - 2) > 0$; D. $(x + 7)(2 - x) > 0$.

3.10. Rozwiązaniem równania $\dfrac{x^2 - 25}{x - 5} = 0$ jest:

A. $x = -5$ lub $x = 5$; B. tylko $x = 5$;
C. $x = -25$ lub $x = 25$; D. tylko $x = -5$.

3.11. Rozwiąż równanie: $x(4x + 16)^3(x^2 + 6x + 9) = 0$.

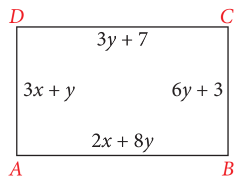
3.12. Boki trójkąta ABC zawierają się w prostych o równaniach: $x - 3y + 10 = 0$, $y = 2x + 5$, $3x - y + 14 = 0$. Wyznacz współrzędne wierzchołków trójkąta ABC.

3.13. Motorower przebył drogę z Karpacza do Jeleniej Góry z prędkością $v_1 = 40$ km/h, a z powrotem z prędkością $v_2 = 24$ km/h. Jaka jest średnia prędkość motoroweru w obie strony?

3.14. Obwód prostokąta jest równy 20 m. Dobierz długości boków tak, aby jego pole było większe niż 21 m^2.

3.15. Oblicz obwód prostokąta.

Wskazówka. Rozwiąż układ równań, porównując odpowiednie boki prostokąta.



3.16. Szerokość pierścienia kołowego jest równa 2 cm. Oblicz wyrażone liczbami naturalnymi długości promieni okręgu zewnętrznego i wewnętrznego, aby pole pierścienia było mniejsze od 28π cm^2, a większe od 20π cm^2.

3.17. Karina zdeponowała w banku kwotę 12 000 zł. Jaka była roczna stopa procentowa w tym banku, jeśli po trzech latach na jej koncie znajdowało się 13 891,5 zł ?

3.18. W jednym stopie stosunek miedzi do cynku jest równy 2 : 3, a w drugim 3 : 7. Ile kg każdego z tych stopów należy wziąć, aby otrzymać 12 kg stopu o stosunku miedzi do cynku równym 3 : 5?

3.19. Dane są punkty $A = (3, 1)$ i $B = (6, 3)$ oraz prosta $y = 2x - 3$. Znajdź na danej prostej taki punkt P, aby prawdziwa była równość $|AP|^2 + |BP|^2 = 13$.

ODPOWIEDZI

1.1.	1.2.	1.3.	1.4.	1.5.	1.6.	1.7.	1.8.	1.9.
C	B	A	D	C	D	B	A	C

1.10. Około 37 razy.
1.11. 10, 5,26%
1.12. $x = 5\frac{5}{9}$ g
1.13. B

2.1.	2.2.	2.3.	2.4.	2.5.	2.6.	2.7.	2.8.	2.9.	2.10.
C	C	A	D	D	A	C	D	B	D

2.11. 0
2.12. $5x(b-1)^2$
2.13. 420
2.14. $22 + 12\sqrt{2}$
2.15. $a = 6b$

3.1.	3.2.	3.3.	3.4.	3.5.	3.6.	3.7.	3.8.	3.9.	3.10.
C	B	B	C	A	A	B	D	D	D

3.11. $x = -4$ lub $x = -3$ lub $x = 0$
3.12. $(-4, 2), (-1, 3), (-9, -13)$
3.13. 30 km/h
3.14. Boki muszą być dłuższe niż 3 m i krótsze niż 7 m.
3.15. 30,8
3.16. $r = 5$ cm, $R = 7$ cm
3.17. 5%
3.18. Trzeba wziąć 9 kg pierwszego stopu i 3 kg drugiego.
3.19. $(3, 3)$ lub $P = (2{,}8; 2{,}6)$

Matematyka

Kompendium ułatwi uczniom skuteczne i efektywne przygotowanie się do matury z matematyki w **zakresie podstawowym**. Obejmuje wszystkie treści nauczania, których znajomość będzie sprawdzana na egzaminie od roku 2015.

Składa się z 10 rozdziałów, które odpowiadają poszczególnym działom wymagań z podstawy programowej. Każdy rozdział zawiera:

- wykaz wymagań z podstawy programowej, dotyczących danego działu oraz wymagań gimnazjalnych
- wiadomości teoretyczne „w pigułce"
- zadania „na rozgrzewkę"
- zadania o różnym stopniu trudności z propozycjami rozwiązań i odpowiedziami – przypisane do każdego wymagania z podstawy programowej
- zadania do samodzielnego rozwiązania „Czy już umiesz?" (z odpowiedziami na końcu książki).

Jest to zbiór prawie 800 zadań, z czego ponad 450 z rozwiązaniami i wskazówkami.

Do kompendium załączono zestaw wzorów matematycznych przydatnych na maturze oraz do rozwiązywania zadań w tym zbiorze.

W przygotowaniu kompendium maturalne obejmujące treści nauczania z matematyki w **zakresie rozszerzonym**.

Dobry trening dziś, to mniejszy stres jutro...

ISBN 978-83-7594-116-6
9 788375 941166

MKLP