

2. Przykładowe scenariusze lekcji

Scenariusz nr 1

Zakres podstawowy

Temat lekcji: „Przeprawa przez rzekę – wprowadzenie do klasycznej definicji prawdopodobieństwa”.

Celem lekcji jest wprowadzenie uczniów w zagadnienia związane z doświadczeniem losowym. Pokazanie, że do danego doświadczenia można budować różne modele matematyczne opisujące to doświadczenie. Pokazanie uczniom, że wygodnie posługiwać się takimi modelami matematycznymi, w których zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne.

Czas trwania lekcji – jedna jednostka lekcyjna (45 minut).

Forma pracy – praca w grupach, praca z całą klasą.

Materiały pomocnicze – pionki, monety 10-groszowe, instrukcje gry (załącznik nr 1), plansze do gry (załącznik nr 2), kartka do odnotowywania wyników rzutu (załącznik nr 3), kartka do wykonania diagramu (załącznik nr 4).

Uwaga: Nauczyciel prosi, aby na te lekcję każdy uczeń przyniósł po trzy monety 10-groszowe i pionki do gry.

Kolejne etapy	Przebieg lekcji	Czas	Umiejętności kształtowane na lekcji
I faza Zaangażowanie	Nauczyciel informuje uczniów, że na dzisiejszej lekcji będą organizować przeprawę przez rzekę. Dzieli klasę na zespoły 4-osobowe. Każdy zespół otrzymuje 16 pionków oraz instrukcję gry (załącznik nr 1), planszę do gry (załącznik nr 2), kartkę do odnotowywania wyników rzutów (załącznik nr 3), kartkę, na której ma być wykonany diagram (załącznik nr 4).	5 minut	Komunikacja nauczyciel–uczeń.
II faza Badanie	Uczniowie zapoznają się z instrukcją gry; nauczyciel pyta, czy rozumieją zasady; wyjaśnia wątpliwości i daje sygnał do rozpoczęcia gry.	5 minut	Czytanie tekstu ze zrozumieniem, komunikacja uczeń–uczeń i uczeń–nauczyciel.

2. Przykładowe scenariusze lekcji

III faza Przekształcanie	Uczniowie prowadzą grę. Każda grupa wykonuje diagram. Uczniowie próbują wyciągnąć wnioski z zaobserwowanych wyników.	10 minut	Praca w grupie, rozwiązywanie problemów, komunikacja uczeń–uczeń.
IV faza Prezentacja	Grupa zwycięska (lub najbliższa zwycięstwa) prezentuje swoją strategię. Przedstawia również diagram ukazujący wyniki rzutów w tej grupie.	5 minut	Autoprezentacja, komunikowanie się uczeń–uczeń i uczeń–nauczyciel.
V faza Przekształcanie	Uczniowie wraz z nauczycielem zastanawiają się, jak zbudować model matematyczny, który poprawnie opisałby grę <i>Przeprawa przez rzekę</i> . Nauczyciel uzasadnia zalety modelu, który poprawnie opisuje grę i w którym zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne; podaje „klasyczną definicję prawdopodobieństwa” (podręcznik, str. 131, 132).	15 minut	Prowadzenie dyskusji, argumentowanie.
VI faza Refleksja	Uczniowie oceniają przebieg lekcji od strony osiągniętych celów i atrakcyjność zajęć. Nauczyciel podsumowuje pracę uczniów.	5 minut	Pogłębianie procesu uczenia się; wnioskowanie.

Załącznik nr 1

Przeprawa przez rzekę

Instrukcja gry

Otrzymujecie planszę i 16 pionków.

Na planszy zaznaczone są cztery pola: 0, 1, 2 i 3. Możecie w dowolny sposób ustawić 16 pionków na tych polach (nawet wszystkie pionki na jednym polu). Następnie wykonujecie 16 rzutów trzema monetami 10-groszowymi. Jeśli w wyniku rzutu nie wypadł ani jeden orzeł, to z pola o numerze 0 przeprawiacie jeden pionek przez rzekę; jeśli wypadł tylko jeden orzeł, to przeprawiacie przez rzekę pionek z pola numer 1; jeśli wypadły dwa orły – pionek z pola numer 2, jeśli wypadły trzy orły – pionek z pola numer 3. Jeśli na danym polu nie ma żadnego pionka, to wykonujecie następny rzut.

Celem gry jest przeprowienie jak największej liczby (najlepiej wszystkich) pionków na drugą stronę rzeki.

Zastanówcie się, jak rozmieścić pionki, i ustawcie je na odpowiednich polach. Na planszy zapiszcie liczbę pionków umieszczonych na polach 0, 1, 2 i 3 na początku gry i na końcu, po wykonaniu 16 rzutów. Po każdym rzucie postawcie kreskę w odpowiednim polu na kartce do odnotowywania wyników.

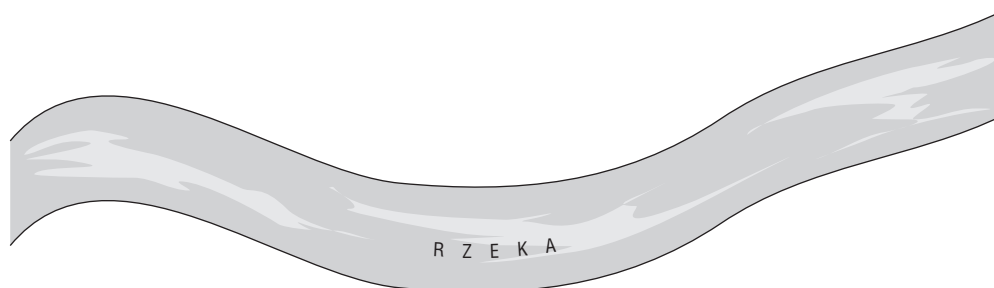
Na koniec wykonajcie diagram kolumnowy (na załączonej kartce) pokazujący, ile razy w 16 rzutach trzema monetami nie wypadł ani jeden orzeł, wypadł tylko jeden orzeł, wypadły tylko dwa orły, wypadły trzy orły.

Powodzenia!

2. Przykładowe scenariusze lekcji

Załącznik nr 2

Plansza do gry



--	--	--	--

0

1

2

3

Liczba pionków na początku gry				
	0	1	2	3

Liczba pionków na końcu gry				
	0	1	2	3

Uwagi i spostrzeżenia

W trakcie dyskusji nad budową modelu matematycznego mogą pojawić się następujące propozycje:

1. Przestrzeń zdarzeń elementarnych składa się z czterech elementów:

3 reszki, brak orłów	$({}^3R)$
2 reszki, 1 orzeł	$({}^2R {}^1O)$
1 reszka, 2 orły	$({}^1R {}^2O)$
brak reszek, 3 orły	$({}^3O)$

i każdemu zdarzeniu elementarnemu przypisujemy prawdopodobieństwo $\frac{1}{4}$. Taki

model należy odrzucić jako nieodzwierciedlający rzeczywistości. Z pierwszej części lekcji powinno wynikać, że zdarzenia elementarne $({}^2R {}^1O)$ lub $({}^1R {}^2O)$ pojawiały się ok. trzy razy częściej niż zdarzenia $({}^3R)$ czy $({}^3O)$.

2. Przestrzeń zdarzeń elementarnych składa się również z czterech elementów: $({}^3R)$, $({}^2R {}^1O)$, $({}^1R {}^2O)$, $({}^3O)$. Prawdopodobieństwa przypisujemy tak, by były one zgodne z doświadczeniem.

$({}^3R)$	\longrightarrow	$\frac{1}{8}$
$({}^2R {}^1O)$	\longrightarrow	$\frac{3}{8}$
$({}^1R {}^2O)$	\longrightarrow	$\frac{3}{8}$
$({}^3O)$	\longrightarrow	$\frac{1}{8}$

Budując modele 1. i 2., monety uważaliśmy za nierozróżnialne.

3. Budując ten model, monety uważamy za rozróżnialne. Za każdym razem patrzymy, jaki jest wynik: na pierwszej monecie, na drugiej i na trzeciej. Mamy więc osiem zdarzeń elementarnych (ciągów trójelementowych):

$(R, R, R), (R, R, O), (R, O, R), (O, R, R), (R, O, O), (O, R, O), (O, O, R), (O, O, O)$.

Każde z tych zdarzeń elementarnych pojawiało się mniej więcej z taką samą częstością (można to sprawdzić zaznaczając trzema kolorami monety, co pozwoli ustalić ich kolejność i powtórzyć grę *Przeprawa przez rzekę*). Każdemu ze zdarzeń elementarnych przypisujemy prawdopodobieństwo $\frac{1}{8}$. Łatwo zauważyć (podręcznik str. 131, 132), że

w takim przypadku prawdopodobieństwo zajścia dowolnego zdarzenia A zawartego w przestrzeni Ω , jest równe ilorazowi liczby zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A przez liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych.

Scenariusz nr 2

Zakres podstawowy

Temat lekcji: „Opracowywanie danych statystycznych”.

Celem lekcji jest praktyczne sprawdzenie, w jakim stopniu uczniowie opanowali podstawowe pojęcia dotyczące statystyki (klasyfikowanie danych, obliczanie średniej, mediany, odchylenia standardowego) i sposoby prezentowania danych.

Czas trwania lekcji – trzy jednostki lekcyjne (135 minut).

Forma pracy – praca w grupach.

Materiały pomocnicze, środki dydaktyczne – ankiety przeprowadzone w klasie, kalkulatory, arkusze papieru, flamastry.

Na tę lekcję uczniowie powinni przygotować sobie odpowiedzi na pięć pytań (załącznik nr 1).

Kolejne etapy	Przebieg lekcji	Czas	Umiejętności kształtowane na lekcji
I faza Zaangażowanie	Nauczyciel informuje uczniów, co będzie przedmiotem zajęć. Uczniowie wpisują odpowiedzi na pytania (załącznik nr 1) do pięciu ankiet (każda ankieta na oddzielnej kartce). Następnie nauczyciel dzieli klasę na pięć grup. Każda grupa dostaje wyniki jednej ankiety do opracowania.	20 minut	Komunikacja nauczyciel–uczeń.
II i III faza Badanie i przekształcanie	Uczniowie w grupach zapoznają się z danymi, które otrzymali. Przeprowadzają klasyfikację danych, wyznaczają średnią wartość, medianę, odchylenie standardowe. Zastanawiają się, jakie wnioski wynikają z zebranych danych. Przygotowują się do prezentacji (rysują wykresy spisują uwagi i wnioski). Nauczyciel obserwuje pracę uczniów, w razie potrzeby odpowiada na pytania i wątpliwości.	25 minut	Komunikacja uczeń–uczeń i nauczyciel–uczeń, praca w grupie.
IV faza Prezentacja	Każda grupa przedstawia w możliwie najatrakcyjniejszy sposób wyniki swojej pracy.	60 minut	Autoprezentacja, komunikacja uczeń–uczeń i uczeń–nauczyciel.

2. Przykładowe scenariusze lekcji

V faza Refleksja	Uczniowie dyskutują nad tym, czego dowiedzieli się o swojej klasie, wyciągają wnioski. Oceniają wystąpienie każdej grupy. Nauczyciel podsumowuje i ocenia pracę uczniów.	30 minut	Umiejętne prowadzenie dyskusji, argumentowanie, ocenianie i samoocenie.
---------------------	--	----------	---

Załącznik nr 1

1. Ile książek przeczytałeś (przeczytałaś) w ciągu ostatniego roku?
2. Ile godzin dziennie przeznaczasz średnio na naukę w domu od poniedziałku do piątku?
3. Ile godzin dziennie przeznaczasz średnio na odpoczynek (w tym oglądanie telewizji) od poniedziałku do piątku?
4. Ile razy byłeś (byłaś) w kinie lub w teatrze w zeszłym roku?
5. Ile godzin tygodniowo przeznaczasz średnio na zajęcia sportowe (poza obowiązkowymi lekcjami WF)?

Uwagi i spostrzeżenia

1. Liczba ankiet może być modyfikowana przez nauczyciela (np. w zależności od liczebności klasy). Również treść pytań może być zmieniana.
2. Przydzielając do opracowania wyniki ankiet należy zwrócić uwagę na to, że niektóre wyniki są nieco łatwiejsze do opracowania (pytanie 4), inne mogą być nieco trudniejsze (pytanie 3).
3. Warto zwrócić uwagę, by w każdej grupie był co najmniej jeden kalkulator z funkcjami statystycznymi. Skróci to czas przeznaczony na obliczenia.
4. Lekcję tę można przeprowadzić również w klasach z zakresem rozszerzonym matematyki. Wówczas na realizację należy przeznaczyć godziny z puli godzin do dyspozycji nauczyciela.
5. Ta lekcja daje nauczycielowi możliwość oceny wiadomości i umiejętności uczniów z całego działu *Elementy statystyki*.

Scenariusz nr 3

Zakres rozszerzony

Temat lekcji: „Ciągłość funkcji w punkcie”.

Wprowadzenie. Lekcję można przeprowadzić w trzeciej klasie liceum realizującej zakres rozszerzony matematyki. Zakłada się, iż uczniowie posiadli umiejętność obliczania granicy funkcji w punkcie.

Celem lekcji jest zapoznanie uczniów z pojęciem ciągłości funkcji w punkcie.

Czas trwania lekcji – jedna jednostka lekcyjna (45 minut).

Forma pracy – praca z całą klasą.

Materiały pomocnicze – plansze z wykresami funkcji (załącznik nr 1), zadania (załącznik nr 2) – przygotowuje nauczyciel.

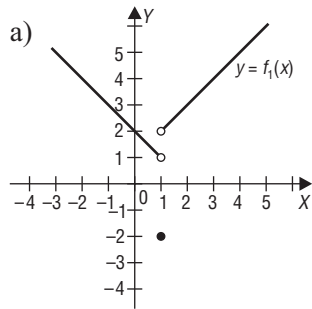
Kolejne etapy	Przebieg lekcji	Czas	Umiejętności kształtowane na lekcji
I faza Wprowadzenie	Nauczyciel: <ul style="list-style-type: none"> – informuje uczniów, co będzie przedmiotem zajęć; zapisuje temat na tablicy; – podkreśla, że przedmiotem zainteresowania będzie ciągłość funkcji w punkcie; informuje przy tym, że chodzi o te punkty w otoczeniu których funkcja jest określona; oznajmia, że ciągłość funkcji w punkcie należy kojarzyć z „nierozzerwalnością wykresu funkcji” w badanym punkcie; – informuje podopiecznych, że wyniki ich pracy posłużą do zdefiniowania pojęcia ciągłości funkcji w punkcie; – wiesza plansze z wykresami funkcji (załącznik nr 1); – zachęca, aby uczniowie przeanalizowali wykresy funkcji; – poleca, aby uczniowie: <ul style="list-style-type: none"> • wybrali te funkcje, które są określone w otoczeniu punktu x_0 – podanego obok wzoru funkcji • wśród wybranych funkcji wskazali te, które są ciągłe w punkcie x_0 • zastanowili się nad powodem nieciągłości niektórych z nich (w razie potrzeby podpowiada, aby uczniowie zbadali istnienie granicy funkcji w punkcie x_0, a w przypadku jej istnienia porównali wartość granicy z wartością funkcji w tym punkcie). 	5 minut	Komunikacja nauczyciel–uczeń.

2. Przykładowe scenariusze lekcji

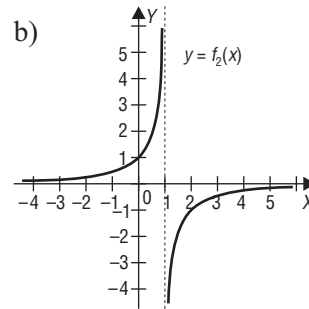
II faza Badanie	<p>Uczniowie samodzielnie:</p> <ul style="list-style-type: none"> – analizują wykresy funkcji; – wybierają spośród przedstawionych te funkcje, które są określone w otoczeniu punktu x_0; – wśród wybranych funkcji wskazują te, które są nieciągłe oraz funkcję ciągłą w punkcie x_0; – „szukają” przyczyn nieciągłości funkcji – badają istnienie granicy w punkcie x_0, a w przypadku jej istnienia porównują z wartością funkcji w tym punkcie; – notują swoje spostrzeżenia, formułują wnioski. <p>Nauczyciel:</p> <ul style="list-style-type: none"> – nadzoruje pracę samodzielną uczniów; – dba o dyscyplinę i tempo pracy; – w razie potrzeby udziela rad i wskazówek. 	10 minut	Komunikacja uczeń–uczeń i nauczyciel–uczeń; analizowanie, wnioskowanie.
III faza Prezentacja	<p>Uczniowie wybrani przez nauczyciela prezentują swoje spostrzeżenia i wnioski na tablicy. Pozostali analizują informacje przedstawione przez kolegów i porównują z własnymi wynikami.</p> <p>Nauczyciel nadzoruje pracę uczniów.</p> <p>* Oczekiwane wyniki pracy uczniowskiej.</p> <ul style="list-style-type: none"> ➤ Spośród przedstawionych na planszy funkcji, tylko trzy są określone w otoczeniu punktu x_0: $y = f_1(x)$, $y = f_4(x)$ oraz $y = f_5(x)$. Pierwsze dwie nie są ciągłe w punkcie x_0, trzecia z nich jest ciągła w punkcie x_0. ➤ Powodem nieciągłości funkcji $y = f_1(x)$ w punkcie $x_0 = 1$ jest brak granicy funkcji w tym punkcie, bowiem granice jednostronne funkcji w tym punkcie są różne ($\lim_{x \rightarrow 1^-} (-x + 2) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x + 1) = 2$). 	5 minut	Autoprezentacja, komunikacja uczeń–nauczyciel, uczeń–uczeń, analizowanie, wnioskowanie, argumentowanie.

	<p>➤ Powodem nieciągłości funkcji $y = f_4(x)$ w punkcie $x_0 = 0$ jest fakt, że granica funkcji w punkcie $x_0 = 0$ nie jest równa wartości funkcji w tym punkcie $(\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1, f(0) = 2)$.</p> <p>➤ Funkcja $y = f_5(x)$ jest ciągła w punkcie $x_0 = -1$. Istnieje granica funkcji w punkcie $x_0 = -1$ i jej wartość jest równa wartości funkcji w tym punkcie $(\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -2 = f(-1))$.</p>		
IV faza Przetwarzanie informacji	<p>Nauczyciel zachęca uczniów do zdefiniowania pojęcia funkcji ciągłej w punkcie. Uczniowie na podstawie własnych spostrzeżeń, we współpracy z nauczycielem, „budują” nowe pojęcie matematyczne: <u>Definicja</u> „Niech funkcja f będzie określona w pewnym otoczeniu punktu x_0. Funkcja f jest ciągła w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje (skończona) granica $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ i zachodzi równość $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$”</p>	5 minut	Komunikacja nauczyciel–uczeń, analizowanie, wnioskowanie.
V faza Praca samodzielna uczniów	<p>Nauczyciel: zapisuje treści zadań na tablicy (załącznik nr 2); poleca, aby uczniowie pracując parami (w ławkach) przedstawili rozwiązania zadań na kartkach, podpisali kartki nazwiskami autorów rozwiązań i po skończonej pracy oddali je nauczycielowi. Określa czas pracy na 10 minut.</p>	15 minut	Komunikacja uczeń–uczeń.
VI faza Podsumowanie	<p>Nauczyciel zadaje pracę domową: poleca, aby uczniowie przeczytali rozdział 1.4 „Ciągłość funkcji w punkcie” (str. 51 – 55), <i>Podręcznik. Cz. 2. Elementy analizy matematycznej</i> i zapoznali się z pojęciami „lewostronna ciągłość funkcji w punkcie” oraz „prawostronna ciągłość funkcji w punkcie”. Uczniowie wspólnie z nauczycielem oceniają przebieg lekcji, stopień zaangażowania w pracę, efekty jakie uzyskali. Wyciągają wnioski i zgłaszają uwagi, które mogą przyczynić się do podniesienia efektywności pracy na kolejnych lekcjach.</p>	5 minut	Pogłębienie procesu uczenia się; wnioskowanie.

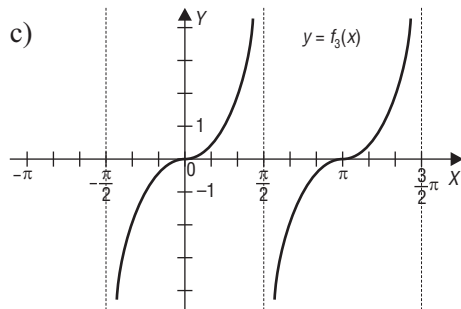
Załącznik nr 1



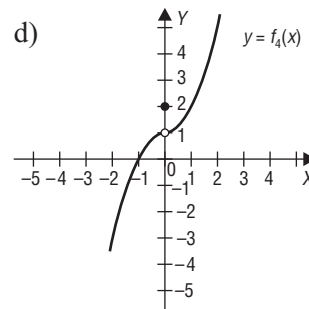
$$f_1(x) = \begin{cases} -x + 2 & \text{dla } x < 1 \\ -2 & \text{dla } x = 1, x_0 = 1 \\ x + 1 & \text{dla } x > 1 \end{cases}$$



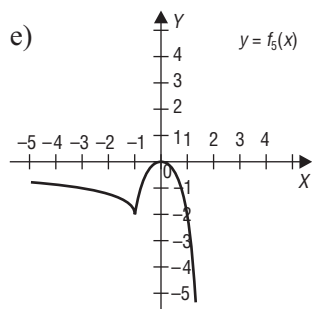
$$f_2(x) = \frac{1}{1-x}, x_0 = 1$$



$$f_3(x) = \operatorname{tg} x, x_0 = \frac{\pi}{2}$$



$$f_4(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{dla } x > 0 \\ 2 & \text{dla } x = 0, x_0 = 0 \\ -x^2 + 1 & \text{dla } x < 0 \end{cases}$$



$$f_5(x) = \begin{cases} \frac{2}{x} & \text{dla } x \leq -1 \\ -2x^2 & \text{dla } x > -1 \end{cases}, x_0 = -1$$

Załącznik nr 2

Zadanie 1.

$$\text{Zbadaj ciągłość funkcji } f(x) = \begin{cases} -\frac{2}{x} & \text{dla } x \in (-\infty, -2) \\ x^2 + x - 2 & \text{dla } x \in (-2, 3) \\ -\frac{1}{2}x^2 + 3x + 5\frac{1}{2} & \text{dla } x \in (3, +\infty) \end{cases}$$

w punktach $x_1 = -2$ oraz $x_2 = 3$.

Zadanie 2.

$$\text{Wyznacz tę wartość parametru } a \in \mathbf{R}, \text{ dla której funkcja } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{2 - x} & \text{dla } x \neq 2 \\ \frac{1}{2}a + x & \text{dla } x = 2 \end{cases}$$

jest ciągła w punkcie $x_0 = 2$. Dla znalezionej wartości parametru, narysuj jej wykres.

Uwagi i spostrzeżenia

Lekcja ta pobudza uczniów do aktywności. Zachęca do poszukiwania związków i zależności. Owocem tych poszukiwań jest sformułowanie definicji ciągłości funkcji w punkcie. Wiedza zdobywana w sposób aktywny jest lepiej przyswajana i zapamiętywana przez uczniów.

V faza lekcji ma dostarczyć nauczycielowi informacji o tym, w jakim stopniu nowe pojęcie zostało przez uczniów przyswojone. Prace uczniowskie powinny być sprawdzone na następną lekcję i omówione. W zależności od „jakości” uzyskanych wyników nauczyciel będzie mógł podjąć decyzję, jakie przykłady i w jakiej liczbie należałoby przygotować na kolejną jednostkę lekcyjną, aby pojęcie ciągłości funkcji w punkcie było przez uczniów zrozumiane. Autorów najlepszych prac można nagrodzić bardzo dobrą oceną, zaś autorom prac słabych należy jeszcze raz przybliżyć nowe pojęcie. Zadania do ćwiczeń można znaleźć w podręczniku na stronie 161 (zadania 1.54 – 1.56).