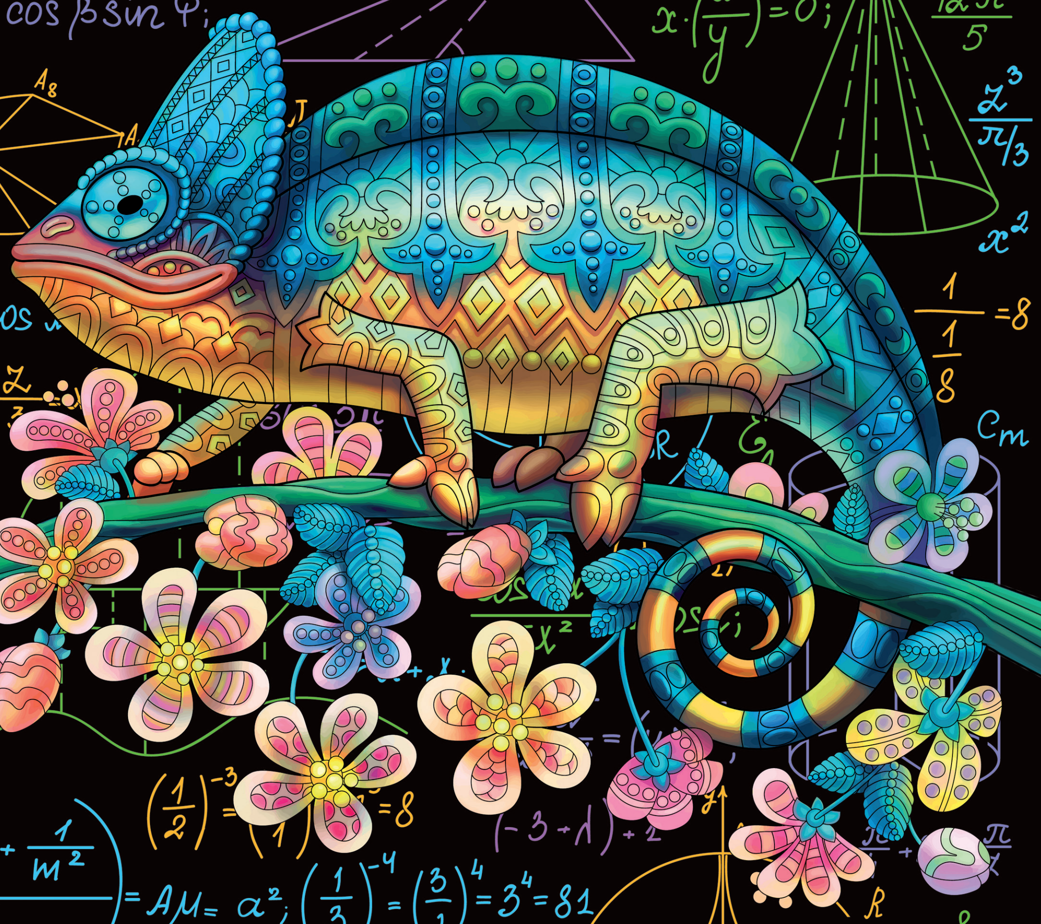
Michał Szurek

SPACERY MATEMATYCZNE

Zachwyć się liczbami i figurami!



Michał Szurek

Urodził się 5 kwietnia 1946 r. w Warszawie. Wykształcenie zdobył na Uniwersytecie Warszawskim: magisterium – 1968 r., doktorat – 1976 r., habilitacja – 1995 r. Dyscypliny naukowe: topologia oraz geometria algebraiczna.

Pracownik naukowy Uniwersytetu Warszawskiego od 1968 r. aż do przejścia na emeryturę w 2010 r. W tym czasie prowadził także semestralne wykłady dla studentów na zagranicznych uczelniach, m.in.: McGill University (Kanada, 1984 r.), University of Notre Dame (USA, 1987 r.), University of British Columbia (Kanada, 1990 r.), Universität Bayreuth (Niemcy, 1992 r.), a także na Uniwersytecie Jagiellońskim w Krakowie (w latach 2001–2007).

Aktywny działacz w Krajowym Funduszu na Rzecz Dzieci (1985 r. – obecnie).

Ważniejsze nagrody i wyróżnienia: nagroda Rektora Uniwersytetu Warszawskiego za pracę doktorską (1976 r.); nagroda im. Samuela Dicksteina Polskiego Towarzystwa Matematycznego za całokształt pracy na rzecz matematyki (2004 r.); Medal „Zasłużony dla kultury polskiej" Ministra Kultury i Dziedzictwa Narodowego (2013 r.) za twórczość poetycką o tematyce górskiej.

Publikacje:

- comiesięczne felietony matematyczne w czasopiśmie *Młody Technik* (1978 r. – obecnie),
- współautorstwo podręcznika matematycznego do liceum z serii „I ty zostaniesz Euklidesem" (wyd. Adam, 1990 r.),
- wybrane książki o matematyce: *Opowieści matematyczne* (wyd. WSiP, 1987 r.), *Komputer po raz pierwszy* (wyd. Adam, 1990 r.), *Opowieści geometryczne* (wyd. WSiP, 1995 r.), *Matematyka dla Humanistów* (wyd. Mozaika, 2000 r.), *Wykłady o Nauczaniu Matematyki* (8 tomów, wyd. GWO, 2006 r.), *Matematyka przy kominku* (wyd. BTC, 2008 r.), *Gawędy matematyczne* (wyd. BTC, 2011 r.), *Matematyka dla młodych i dociekliwych* (w przygotowaniu, wyd. Nowik), *Podróże matematyczne* (wyd. OE*KP, 2016 r.) – nagrodzone medalem SALONU EDUKACJI na Targach Kielce 2016.

Hobby: 1) matematyka, 2) matematyka, 3) matematyka.

Żonaty, troje dzieci (córka – polonistka, córka – muzyk, syn – informatyk).

Wzrost, waga, numer buta – wskazówka: jeśli sumę wzrostu w cm i wagi w kg, pomnożoną przez numer buta, podzieli się przez jedną piątą tej liczby, to wyjdzie pięć.

Ulubione potrawy: brak danych.

Ulubione liczby: 1, 41 i 116. (Autor uczęszczał do 41. Liceum Ogólnokształcącego w Warszawie, dojeżdżając autobusem nr 116. Gdy jechał na egzamin maturalny z matematyki, podjechał autobus o numerze bocznym 1, co uznał za dobrą wróżbę. Sprawdziło się: zdał maturę :)

Spis treści

„Lubię matematykę, bo tam mogę kupić 608 arbuzów i nikt nie zapyta, po co mi tyle…"

(Zasłyszane od uczennicy)

Od autora

Zgodnie z dawnym, dobrym obyczajem, najpierw się przedstawię – jestem Michał Szurek. Urodziłem się jeszcze w dziewiętnastej półsetce lat minionego tysiąclecia. Wiek, w którym się trochę wbrew swojej woli znalazłem (mam na myśli nie stulecie, lecz liczbę lat), ma wiele zalet. Jedną z nich jest przyznawanie – takim osobom jak ja – prawa do snucia opowieści o nieco sinusoidalnej treści. Poza tym nie muszę gnać na długie, męczące wycieczki po polach, lasach i górach. Mogę chodzić na spacery. A na spacerze dobrze się myśli…

Treść książki krąży wokół szkolnego programu nauczania, czasem oddalając się od niego znacznie, by za chwilę znowu się przybliżyć. W książce zachowuję się trochę jak przewodnik górski: prowadzę zwykle po dolinach i łagodnych stokach, ale od czasu do czasu proponuję, żeby zboczyć z utartego szlaku na jakąś turnię. Zachęcam do podążania za mną. Nie zawsze będzie łatwo, ale gwarantuję, że wspólnie przeżyjemy wspaniałą przygodę.

Od początku mojej nauczycielskiej drogi zastanawiam się nieustannie: czego uczyć w szkole, jakiej matematyki, czy można to robić inaczej i czy warto. Czy zmiany nie będą zbyt gwałtowne? Te myśli przewijają się przez całą książkę, chociaż rzadko piszę o tym wprost. Przez cały czas mam w pamięci, że naszym wspólnym zadaniem jest przygotowanie dzisiejszej młodzieży do dorosłego życia, w tym do pracy w zawodach, których jeszcze nie ma – a w szkołach są już dzieci, które będą żyć w XXII wieku.

Nauczyciele byli kiedyś przewodnikami swoich uczniów po dobrze znanym obszarze. Pokazywali im góry, jeziora, lasy, uczyli, gdzie są trudności, pułapki i niebezpieczeństwa. Mieli to już „przećwiczone". Teraz trzeba ich doprowadzić do celu, którego nie znają ani nauczyciele, ani uczniowie, ani w ogóle nikt. Mało tego, teren jest zamglony, a my jesteśmy w nim po raz pierwszy. Często jeszcze znajdujemy na drodze kłody, pozostawione chyba celowo, żeby było trudniej…

Nie tak dawno (jakieś 250 lat temu) nauczyliśmy się dzielić nauczanie na oddzielne dyscypliny i ta specjalizacja wciąż postępuje. Mówimy, że to nieuchronne, tak wielki jest przyrost wiedzy. Mimo wszystko starajmy się być interdyscyplinarni i wykorzystujmy podejście matematyczne do poszerzania naszej wiedzy o tym, co dookoła. Biorąc to pod uwagę, zachęcam do przeczytania także tych fragmentów, których nie zaliczylibyśmy do tradycyjnie rozumianej matematyki. Niejeden z moich Czytelników pomyśli zapewne: „Po co mi to? ”. Bo czy jest potrzebna wiedza, kto napisał „Pana Tadeusza”? Jakie rządy sprawował król Burburyk? Kiedy żyły dinozaury? Gdzie leżą Pireneje? Co to są mitochondria? Gdzie spotkamy połowę sumy podstaw? Wydaje się Wam, że 90% wiedzy szkolnej się nie przyda. Macie rację – wydaje się Wam!

Uczymy się chętniej, jeżeli coś nas zaciekawi, zainteresuje, wciągnie. Jak uczyć się w obecnych czasach? Oczywiście inaczej niż kiedyś! Mamy teraz smartfony, laptopy, tablety i setki aplikacji. Jak znaleźć równowagę? Nie może być tak, jak za króla Ćwieczka, ale na pewno musimy umieć wykopać dołek zwykłą łopatą – nawet, jeżeli są koparki. Zmieniła się rola szkoły i nauczyciela. Gdy karierę pedagogiczną zaczynał mój Ojciec, w wiejskiej szkole na Podlasiu, blisko sto lat temu, szkoła była głównym ośrodkiem kultury w promieniu wielu kilometrów, a rolą nauczyciela było tylko przekazywanie wiedzy. Zbyteczne będzie wspominać, jak to się zmieniło. Moja córka (nauczycielka w szkole podstawowej) ma torbę na zakupy z napisem „Nauczyciel – osoba, która pomaga rozwinąć skrzydła”. I to mi się najbardziej podoba. POMAGA. Tylko tyle i aż tyle.

Mówi się, że nauczyciel jest jak wielbłąd. Niech to nikogo nie obraża, bo nie o garb tu chodzi, a o rzecz bardziej subtelną. Jak głosi bardzo stare zadanie, pewien Arab zapisał synom w testamencie stado wielbłądów. Najstarszy syn miał dostać połowę stada, średni – jedną trzecią, a najmłodszy – jedną dziewiątą. Okazało się, że stado liczy 17 sztuk. Jak to podzielić? Poszli po radę do kadiego. „W porządku, da się zrobić”. Przyszedł ze swoim wielbłądem. „Pożyczam go wam”. Teraz mamy 18 sztuk i podział jest łatwy. Najstarszy dostaje połowę, 9 sztuk, średni – jedną trzecią, a więc 6, a najmłodszy – dziewiątą część z 18, czyli 2. W sumie mamy $9 + 6 + 2 = 17$. „Zadanie rozwiązane, zabieram swojego wielbłąda”. I wszystko stało się jasne i proste! Czy bez tej pomocy daliby radę?

Zachęcam Was do uważnej lektury tej książki, do smakowania poszczególnych rozdziałów, ich fragmentów. Chciałbym wszystkich zainteresować matematyką, pomóc ją zrozumieć i się z nią zaprzyjaźnić. Z jednym celem i nadzieją: uważam, że to wszystkim dobrze zrobi. Przyniesie dużo pożytku i chyba mało zaszkodzi.

Zachwyćcie się liczbami i figurami!

Zachwyćcie się matematyką wokół Was!

SPACER 5.

Pięć, pět, päť, pet, pieci, п'ять, пет, пяць, five, fünf, fënnef, fem, fimm, quinque, cinq, cinco, cinc, cinci, kvin, πέντε, penki, viisi, viis, ხუთი

Cztery kąty, a piec piąty • Po stawie pływa, kaczka się nazywa • Pięć darów umysłu • Pięć motywów poznania • Co mieszka w pięciokącie? • Kaktowik • Pięciaki • Kodowanie • Dodekaedr • Obrazy liczbowe

Liczba 5 jest dostojna, uroczysta, tajemna, a jednak jakaś swojska. Na spacer wybrałem się oczywiście w piątek. Najpierw jednak odpytam Czytelników z podstaw. Zacznę od języków.

Zadanie 5.1.

Rozpoznaj języki, w których liczba 5 jest właśnie taka, jak w tytule. Zanim spojrzysz na odpowiedź, pomyśl, przypomnij sobie napisy obcojęzyczne (w czasie wyjazdów zagranicznych, albo z filmów i książek). Na pewno rozpoznasz angielski, francuski i niemiecki. Bez trudności poznasz języki słowiańskie: gdy w Czechach, Słowacji, Serbii, Słowenii, Ukrainie, Chorwacji powiesz po polsku „pięć” – zrozumieją. Oczywiście jeżeli nie znasz dobrze tych języków, możesz nie odróżnić czeskiego od słowackiego i słoweńskiego. Czy rozpoznajesz języki romańskie? Na pewno. Wzięły się z łaciny (5 = quinque). A skandynawskie? Też, bo przecież to vijf, viis, viisii i domyślasz się, że to pochodna *five*. W jakim języku może istnieć słowo penki? Wskazówka: sąsiadujemy z tym krajem. Wreszcie tajemnicze ostatnie „pięć”. Nie sądzę, żebyś znał/a ten język, ale może poznasz po alfabecie? Nie, to nie arabski, ani nie dalekowschodni!

Zadanie 5.2.

Liczba podzielna przez 10 jest podzielna przez 5. Czy jest prawdziwe twierdzenie odwrotne?

A oto wersja tego pytania bez użycia słów *twierdzenie odwrotne*. Czy z tego, że „liczba podzielna przez 10 jest podzielna przez 5” wynika, że podzielność przez 5 i przez 10 to jedno i to samo?

Zadanie 5.3.

Czy jest prawdą, że liczba niepodzielna przez 5 jest też niepodzielna przez 10? A może przeciwnie: liczba niepodzielna przez 10 musi być niepodzielna przez 5?

Zadanie 5.4.

Kilka pytań typu *tak, czy nie*? Jeżeli liczba jest podzielna przez 3 i jest podzielna przez 5, to jest podzielna przez $3 \cdot 5 = 15$. *Prawda to czy fałsz*? Jeżeli liczba jest podzielna przez 5 i przez 7, to jest podzielna przez $5 \cdot 7 = 35$. *Prawda to czy fałsz*? Jeżeli liczba jest podzielna przez 5 i jest podzielna przez 9, to jest podzielna przez $5 \cdot 9 = 45$. *Prawda to czy fałsz*? Jeżeli liczba jest podzielna przez 5 i przez 10, to jest podzielna przez $5 \cdot 10 = 50$. *Prawda to czy fałsz*? Jeżeli liczba jest podzielna przez 5 i przez 11, to jest podzielna przez $5 \cdot 11 = 55$. *Prawda to czy fałsz*? Jeżeli liczba nie jest podzielna przez 50, to nie jest podzielna ani przez 5, ani przez 10? *Prawda to, czy fałsz*? Jeżeli liczba nie jest podzielna przez 55, to nie jest podzielna ani przez 5, ani przez 11. *Prawda czy fałsz*?

Teraz trochę o piątce wokół nas. W szkole, do której ja chodziłem, to była najwyższa ocena. Tak jest zresztą i teraz w szkołach wyższych. Pamiętam film „Piątka z ulicy Barskiej” – o trudnej młodzieży wczesnych lat powojennych. Film był propagandowy, ale – z wyjątkiem zakończenia – niegłupi.

Zadanie 5.5.

W jakich sportach drużyna jest pięcioosobowa? Jakie konkurencje wchodzą w skład pięcioboju nowoczesnego, a jakie były w starożytnej Grecji? Czy jest taka konkurencja lekkoatletyczna *pentatlon*?

Pentatlon tworzy najpiękniejszych ludzi,
a to był kwiat pentatlonu...
Jan Parandowski, *Dysk Olimpijski*

***

Jak i przy poprzednich spacerach, pomówmy o przysłowiach liczbowych.

Zadanie 5.6.

Czy „mówić piąte przez dziesiąte” to znaczy „powiedzieć tylko połowę”. A może to to samo, co „pleść trzy po trzy”? Jakie znaczenie ma powiedzenie: „to jak piąte koło u wozu”. Czy to to samo, co „potrzebne jak dziura w moście”, albo „jak kwiatek do kożucha”? „Znam to jak swoje pięć palców”. Czy to znaczy to samo, co „znam jak własną kieszeń”?

Zadanie 5.7.

Dlaczego słowo „kwinta” kojarzy się z liczbą 5? Czym jest w muzyce interwał kwinty? Czy znasz piosenkę, w której pojawia się kwinta? Co znaczy zwrot „spuścić nos na kwintę”? Czy to ma coś wspólnego z muzyką?

Zadanie 5.8.

Pierwsi chrześcijanie rysowali na piasku rybę, żeby się wzajemnie rozpoznać. Co rysowali pitagorejczycy? Dlaczego pięciokąt to „pentagram”, a Zielone Świątki to po angielsku „Pentecost”? Co to ma wspólnego z liczbą 5? Co to jest Pięcioksiąg?

Zadanie 5.9.

Ile metrów ma kwintal?

Zadanie 5.10.

Czy słusznie obrazisz się, gdy ktoś powie, że brak ci piątej klepki?

Zadanie 5.11.

Ściśnij palce swojej ręki. Co zobaczysz? Zaciśniętą pięść. Ile masz palców u rąk? Pięć! Czy widzisz jakiś związek: pięć – pięść? A teraz daj komuś takie zadanie. Zadaj pierwsze pytanie: ile jest palców u jednej ręki? Dla efektu pokaż! Następnie: ile jest palców u dwóch rąk? Pokaż dwie ręce z rozportartymi palcami. Dziesięć! Teraz rzuć szybkie pytanie, w dodatku tonem, wymagającym szybkiej odpowiedzi: a u dziesięciu rąk? Zobaczysz, że sporo ludzi odpowie: 100.

Zadanie 5.12.

Gdzie jest Pentagon i dlaczego tak się nazywa?

Zadanie 5.13.

Co to jest pentoda (wskazówka: powstała przez rozwinięcie tetrody)?

Zadanie 5.14.

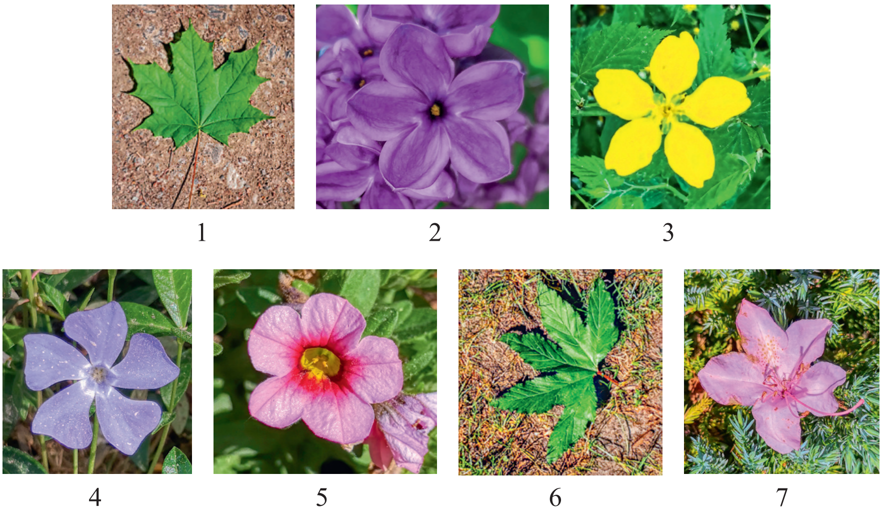
Wiesz na pewno, że mamy pięć zmysłów. Czy potrafisz je wymienić? Stephen Hawes, angielski poeta tworzący miedzy średniowieczem a renesansem, wyodrębnił pięć „darów umysłu”. Pewnie nie wiesz, co miał na myśli…

Zadanie 5.15.

Co mają wspólnego: Pendżab i Kanczendzonga?

***

Wizyta w parku. Liść klonu, bez pięciopłatkowy, złotlin, barwinek, surfinia, wierzbówka, różanecznik.



Fot. 5.1. Kwiaty o pięciu płatkach, liście z pięcioma rozgałęzieniami w mojej okolicy

Fot. 5.2. Kaczki w Smreczyńskim Stawie w Tatrach uwielbiają pięciokąt foremny (fot. Tadeusz Guranowski)

Kaktowik

Czy można sobie wyobrazić prostszy sposób zapisywania liczb niż „nasz” – pozycyjny i dziesiętny? Cyfry 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 – ustawione w określonym porządku dają wszystko. Przypomnę, że „pozycyjny” znaczy, że wartość cyfry zależy od miejsca, na którym się znajduje. W liczbie 111 każda jedynka ma inną wartość: pierwsza sto, druga dziesięć, trzecia jeden. To wiemy. Czytelnicy tej książki pewnie nie pamiętają trudności, jakie mieli z „przekraczaniem progu dziesiątkowego”. Nauczyciele wiedzą, że między działaniem 3 + 5 a 4 + 8 jest przepaść dydaktyczna. Zresztą, łatwo jest nawet w pamięci wykonać odejmowanie 864 – 512. Odejmujemy cyfra po cyfrze, nic nie „pożyczając”. Inaczej jest na przykład z 523 – 487.

Odejmij w pamięci 923 – 847. Czy to się w ogóle da bez kalkulatora? Jeżeli o godzinie 8:47 stoisz na peronie i czekasz na pociąg, który przyjedzie o 9:23, to ile minut będziesz czekać? Każdy chyba obliczy to przez dopełnienie: do dziewiątej jest 13 minut, a zatem będę czekać 13 + 23 = 36 minut.

Nie mamy wątpliwości, że system dziesiątkowy przyjął się, bo mamy dziesięć palców u obu rąk. Ale przecież u jednej ręki mamy 5 palców, a łącznie z dwiema nogami – nawet 20. Może zatem system piątkowy albo dwudziestkowy byłyby równie naturalny, a może lepszy?

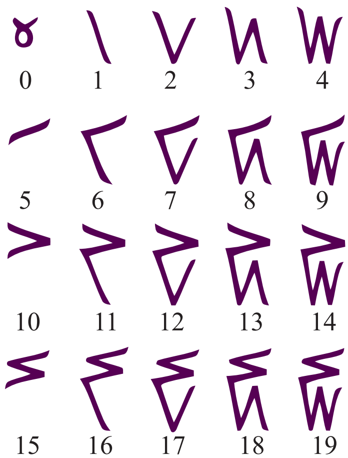
Dwunastkowo-dwudziestkowy układ był obecny w brytyjskim systemie monetarnym od XVIII wieku. Funt szterling dzielił się na 20 szylingów a szyling na 12 pensów. Dopiero w 1971 roku zrezygnowano z tego podziału i wprowadzono metryczny: funt to 100 pensów. Ślady liczenia „po 20” mamy w języku francuskim (quatre-vingt to 80) i duńskim (ćwiczenie: zobacz nazwy liczebników 70, 80 i 90 po duńsku), a nawet po ukraińsku 40 jest „dziwnie”: *sorok* (сорок).

W początkach lat 90. ubiegłego wieku uczniowie w małej szkółce inuickiej (czyli mniej więcej eskimoskiej, choć to zdaje się niewłaściwe uproszczenie), w miejscowości Kaktowik na Alasce, zaczęli narzekać na trudności z zapisywaniem liczb cyframi arabskimi. W ich języku nazwy liczb są bowiem oparte na systemie dwudziestkowym, a nie dziesiętnym. Postanowili stworzyć własny sposób zapisywania liczb. Pomógł im nauczyciel, William Bartley. Stworzono zasady.

1. Znaki mają być proste i łatwe do napisania (najlepiej bez odrywania ołówka czy pióra od papieru – takie figury nazywają się w matematyce jednobieżne).
2. Mają być obrazkowe, czyli ma być jasne powiązanie znaku z reprezentowaną liczbą.
3. Mają się zdecydowanie różnić od cyfr arabskich.
4. Powinny ładnie wyglądać.

Po pewnym czasie opracowano taki system. Przyjął się i został uznany przez kalifornijskie Unicode Consortium – organizację zajmującą się właśnie legalizacją różnego rodzaju kodów (pierwszym na liście był alfabet Morse'a).

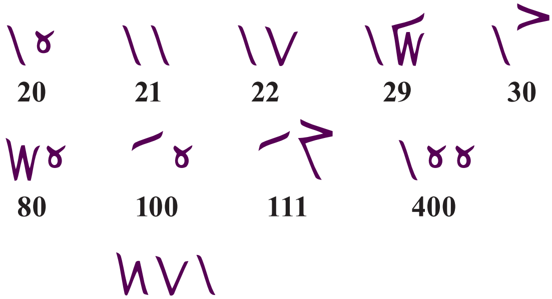
Zobaczmy, jak logiczny i prosty jest to system. Cyfry tworzymy tak: (rys. 5.3.). Zero to zawijasek, jedynka to jedna kreska, dwójka – dwie, trójka – trzy, czwórka – cztery. Logiczne, prawda? Ale piątka to nie pięć kresek, tylko jedna ukośna na górze. Odzywają się echa zarówno rzymskiego sposobu zapisywania liczb (jeszcze nie zapomnieliśmy, że V to 5), jak i układu piątkowego, stosowanego na przykład przez Majów w Ameryce Południowej (rys. 5.4.). Dziesiątka w systemie kaktowik to dwie kreski na górze, ustawione w dzióbek; piętnaście to trzy kreski w zygzak. Najbardziej natrudzimy się przy 19: zygzaczek na górze, cztery kreski na dole.



Rys. 5.3. Cyfry od 0 do 19 w systemie kaktowik.

I tak, jak miałeś/miałaś w szkole trudności z progiem dziesiątkowym (może nie pamiętasz, ale tak było!) , czyli ze zrozumieniem, że z jedynki i zera powstaje dziesięć, tak tu będziesz mieć trudności z progiem dwudziestkowym. Dwadzieścia inuickie to tak, jak nasze dziesięć.

Jak zatem zapisać nasze 20 w kaktowik? To „jedynka" i zero, a zatem mamy:



$$3 \cdot 20^2 + 2 \cdot 20 + 1 = 1241$$

Zadanie 5.16.

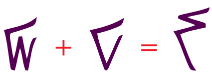
Zapisz w systemie kaktowik liczby 888, 1000, 2023.

Zadanie 5.17.

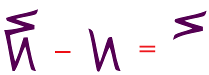
Co to za liczby:

System wydaje się sztuczny i dziwny. Dla nas, dziesiątkowców. Choć trudno w to uwierzyć, ma wiele zalet. Po pierwsze, wielkie liczby mają na ogół mniej cyfr. Po drugie, cyfry są „geometryczne” i można „geometrycznie” wykonywać działania arytmetyczne:

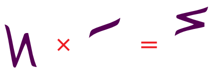
Jedna kreska plus jedna kreska to dwie kreski!



Tu trzeba trochę popatrzeć. Po lewej stronie mamy na górze dwie kreski, a na dole sześć (**W** i **V**). Sześć kresek na dole to jedna na górze. Zgadza się: 9 + 7 = 16.



Odejmowanie. Proste jak drut. Wycieramy gumką, co mamy odjąć, czyli ***И***. 18 odjąć 3 to 15.



Skoro „pięć” to jedna pałeczka na górze, to „razy pięć” jest przeniesieniem mnożnej ***И*** na górę. 3 razy 5 równa się 15.

A oto dwa bardziej wyrafinowane przykłady. 75 : 5. Przypomnę, że 75 jest tu dzielną, a 5 dzielnikiem. Aby zapisać 75 w kaktowik, musimy obliczyć „po naszemu”, że to jest 3 · 20 + 15.

75 : 5 = 15

20546 : 41 = 501 reszta 5

Widzimy charakterystyczne **V** w dzielnej (także na górze, w „rzędzie piątek”). Czarne **V** mieści się „jeden raz” w czerwonym, fioletowym i niebieskim. Wynikiem są zatem trzy pałeczki, w tym jedna ukośna „na górze” – i zostaje „zielona” reszta.

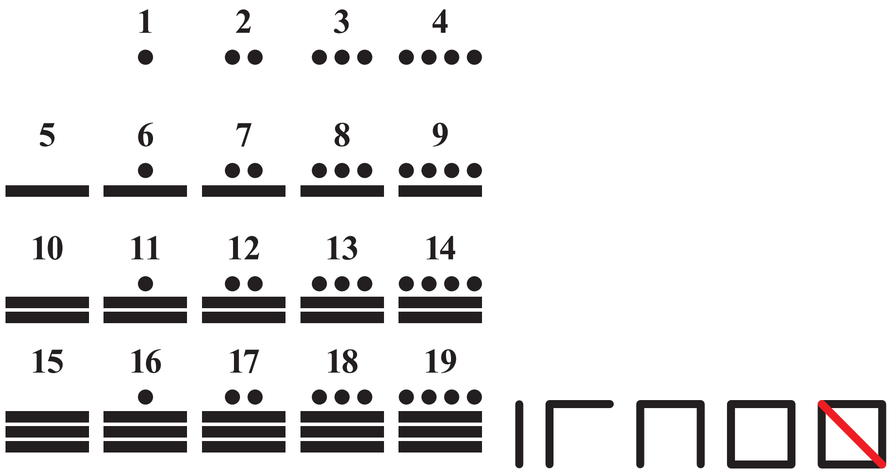
Prawda, jak sympatyczny jest kaktowik? Jest jednak w nim coś „gorszego” niż u nas. Tabliczka mnożenia! Ale za to jak ciekawie wygląda! Narysuj!

***

Na spacerze, jak to na spacerze. Przychodzą do głowy różne myśli i skojarzenia. Przylatują i odlatują. Do mnie przyleciała taka oto refleksja. Jest w naszej historii wiele punktów zwrotnych – przyjęliśmy takie, a nie inne umowy i nie ma odwrotu, a w każdym razie byłby trudny. Jeździmy prawą stroną, chociaż ruch lewostronny był naturalny: na konia wsiadało się z lewej strony, a nadjeżdżającego z przeciwka innego podróżnego bezpieczniej było mieć po prawej stronie – nie jest żadną dyskryminacją stwierdzenie, że znaczna większość z nas jest praworęczna. W 1967 roku Szwecja przeszła na ruch prawostronny i był to chyba ostatni moment, żeby to zrobić. Dziś przecież nikt nawet nie myśli, żeby Wielka Brytania dostosowała się do reszty Europy. Pięćdziesiąt lat temu w Kanadzie przyjęto system metryczny – i musiało odejść całe pokolenie, żeby mieszkańcy zaczęli myśleć w kilometrach, a nie w milach. Zresztą, nie trzeba szukać w odległych krajach. Piszący te słowa praktycznie nie opanował „nowych" (wprowadzonych blisko pół wieku temu) jednostek siły (newton i pochodne). Gdybyśmy (my, jako ludzkość) przyjęli dwudziestkowy system pozycyjny i liczyli tak, jak w kaktowik, obecny dziesiątkowy wydałby się dziwny. Dwadzieścia cyfr do opanowania, zamiast dziesięciu – to chyba niewielki problem?

Pomyśl o innych podobnych sytuacjach i zwyczajach. Których z naszych przyzwyczajeń już nie da się odwrócić?

A ja przypomniałem sobie, jak mój dziadek zaznaczał, ile koszy z węglem wniesiono do piwnicy. Sam stosuję, gdy coś liczę.

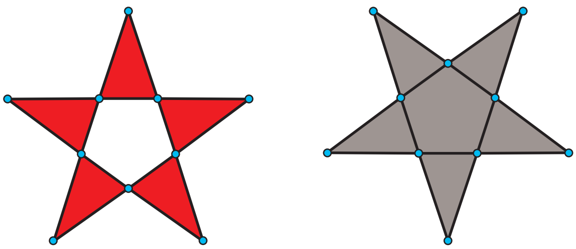


Rys. 5.4. Cyfry Majów i mojego dziadka sposób liczenia „ile tego było". Lubiłem i lubię liczyć, ile jest wagonów w długim pociągu towarowym.

***

Regularną pięcioramienną gwiazdę nazywamy pentagramem. Figura ta obrosła w symboliczne znaczenie. Fascynowała pitagorejczyków w VI wieku przed naszą erą. Była ich znakiem, symbolem doskonałości, życia i zdrowia. Rysowali pentagram na piasku jako znak rozpoznawczy, podobnie jak pierwsi chrześcijanie rybę. Co prawda, pentagram miał mistyczne znaczenie już przed Pitagorasem. Babilończycy umieszczali go na pojemnikach z żywnością, żeby się nie psuła. Pierwsi chrześcijanie widzieli w nim symbol pięciu ran Jezusa. Potem poszło gorzej – obecnie ten symbol jest dla niektórych symbolem szatana. Ale uściślijmy – są pentagramy dobre i złe. Ten dobry („biały”) jest zwrócony w górę jednym wierzchołkiem. W złym („czarnym”) wierzchołek zwrócony jest w dół, a w górę wystają dwa, niby rogi kozła (rys. 5.6.). Oczywiście wybieramy ten dobry, radosny symbol ogólnoludzki. Na ilu flagach państwowych on jest, trudno zliczyć. Na większości z nich gwiazda jest „dobrym” pentagramem; na żadnej wierzchołek nie jest skierowany w dół, choć zdarzają się lekko przekrzywione. Na rys. 5.7. mamy flagę Panamy. Nie lubiany przez połowę kibiców krakowskich klub Wisła Kraków ma jako symbol białą gwiazdę (dla uściślenia: druga połowa kibiców nie lubi Cracovii i kłótnia trwa od ponad 100 lat).

Rys. 5.5. Felga pentagramowa (fot. Tomasz Szwed)

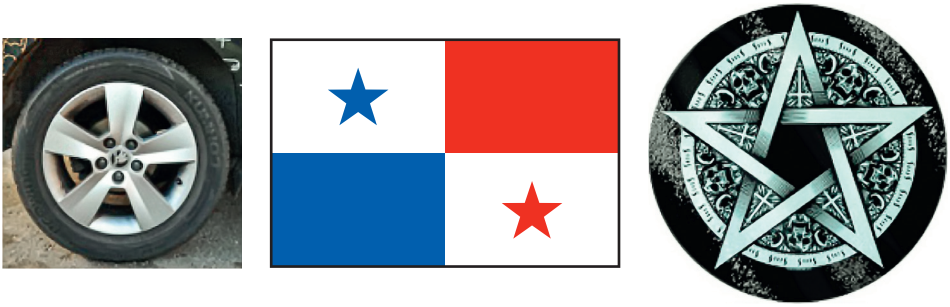


Rys. 5.6. Pentagram: po lewej dobry, po prawej zły

Zadanie 5.18.

Wyznacz miarę kąta ostrego w pentagramie.

Gdy zaczniesz oglądać koła samochodów na swoim osiedlu, w swoim miasteczku czy wiosce, zauważysz, że najczęściej zdarzają się felgi z motywem pięciokąta – na przykład takim, jak na rys. 5.7. Właściwie to nie są felgi, tylko kołpaki nałożone na koła, ale zostanę przy tej nazwie. W środku zdjęcia jest flaga Panamy.

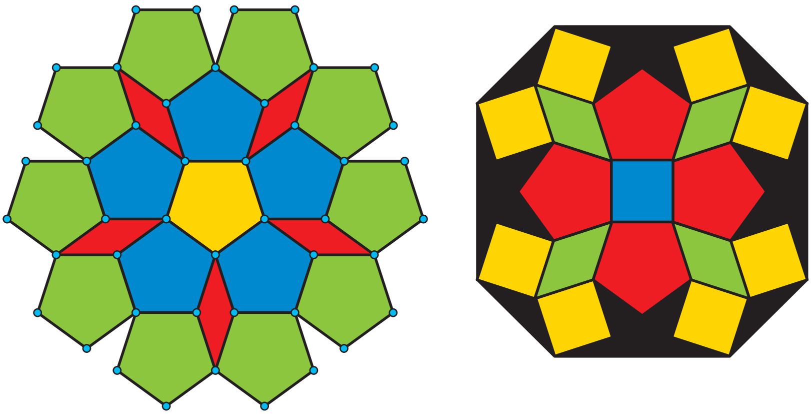


Rys. 5.7. Felga w samochodzie mojego sąsiada, flaga Panamy i średniowieczny talizman.

***

UKŁADANKI

Jeszcze do niedawna na moim osiedlu były ulice pokryte *trylinką* – sześciokątnymi płytami betonowymi. Trzy sześciokąty foremne dobrze pasują do siebie i dlatego można nimi wypełniać płaszczyznę. Gorzej z pięciokątami. Przystawmy do siebie trzy pięciokąty – zostanie miejsce, w które nie da się wcisnąć czwartego. Ale to motyw do ciekawych układanek. Prezentuję dwie.



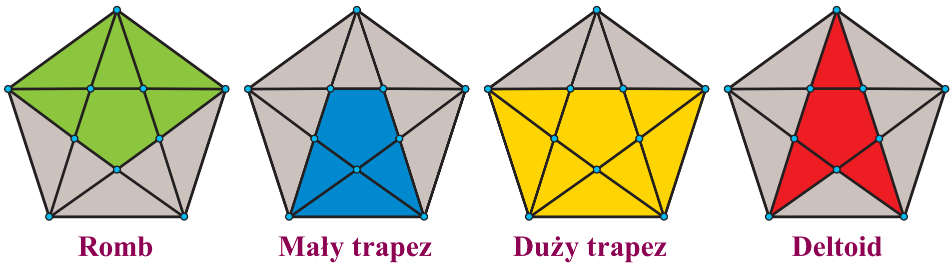
Rys. 5.8.

Zadanie 5.19.

Gdzie są romby na rys. 5.8.? Wyznacz miary ich kątów.

A skoro mowa o wyobraźni geometrycznej…, co można zobaczyć w pięciokącie?

Ile tu figur!



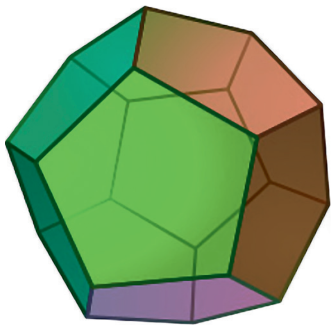
Rys. 5.9.

***

NIESAMOWITA BRYŁA: DODEKAEDR

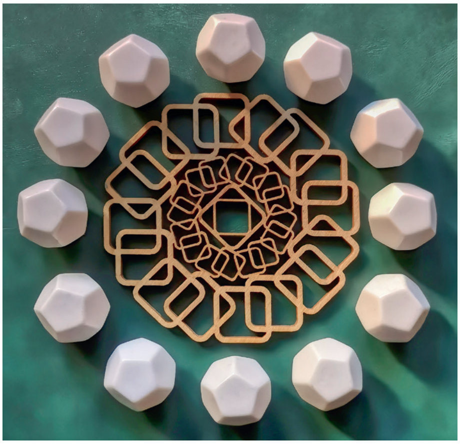
Widzieliśmy, że pięciokątów foremnych nie można ułożyć jeden przy drugim tak, by wypełniały płaszczyznę bez szpar i nakładek. Trójkąty, kwadraty i sześciokąty nadają się do tego, inne wielokąty foremne już nie. Ale gdy nachylimy pięciokąty, to utworzy się daszek. Z dwunastu pięciokątów powstanie bryła. Będzie miała 12 ścian – i nazywa się odpowiednio: dwunastościan (foremny). W innych językach to „dodekaedr” – to jeszcze z greckiego: dodecahedron (δωδεκάεδρον, bo δώδεκα, czyli dōdeka to 12).

Oto typowy rysunek (rys. 5.10.).

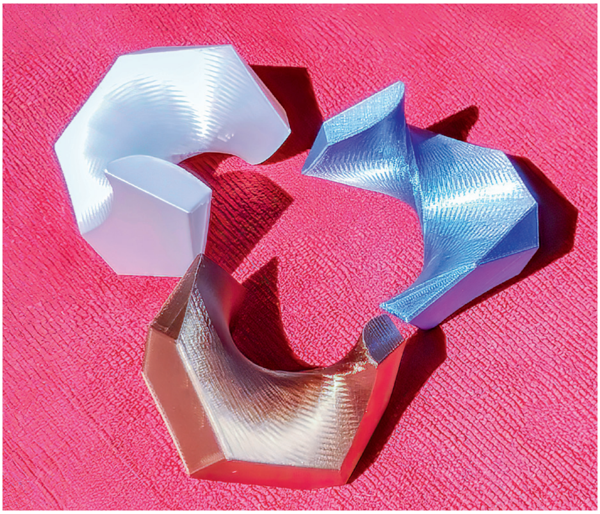


Rys. 5.10.

Fot. 5.11. Dwunastościan z piłeczek pingpongowych. Konstrukcja autora.



Fot. 5.12. Dwanaście dwunastościanów w dwunastokącie. W środku – moja podstawka pod kubek.



Fot. 5.13. Dwunastościan wydrukowany na drukarce 3D, rozłożony na trzy części.

Zadanie 5.20.

Ile wierzchołków i krawędzi ma taki dwunastościan foremny?

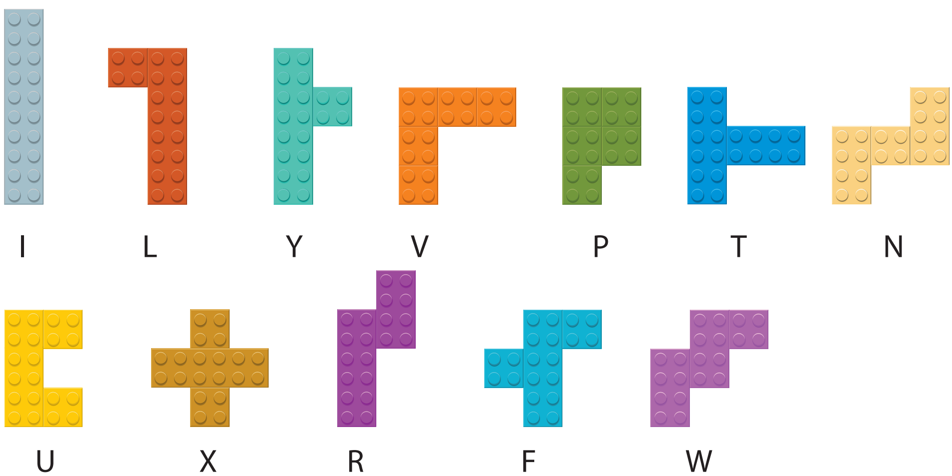
Gdy żył Platon (V–IV wiek p.n.e.) „ludzkość" znała cztery wielościany foremne – cudzysłów postawiłem dlatego, że takimi sprawami interesowała się mała garstka filozofów. Co prawda, Akademia Platońska przetrwała aż do roku 529 naszej ery i została zamknięta decyzją „administracyjną". Cesarz Justynian uznał ją za jedną z instytucji pogańskich, a więc nieprawomyślnych. Rok 529 lepiej symbolizuje koniec Starożytności i początek Średniowiecza – niż tradycyjnie przyjmowany rok 476, czyli rok ostatecznego upadku zachodniego Cesarstwa Rzymskiego.

Wróćmy do Platona. Jego uczniowie odkryli piąty wielościan foremny. Właśnie dwunastościan. Ładna bryła i w dodatku zbudowana z mistycznych pięciokątów foremnych. Tu mieli nasi filozofowie kłopot. Cztery wielościany pasowały im do czterech żywiołów: czworościan-ogień, sześcian-ziemia, ośmiościan-powietrze, dwudziestościan-woda. Co zrobić z piątym wielościanem? Od razu znaleźli „odpowiedź”: dodekaedr (z greckiego: dwunastościan) to symbol Kosmosu, uniwersu, wszechrzeczy, Wszechświata, ładu kosmicznego.

Platończycy mieli dobrą intuicję – właśnie dwunastościan pojawia się nieoczekiwanie w różnych działach matematyki. Sam byłem zdziwiony, że w mojej (już byłej) specjalności matematycznej („wiązki wektorowe”) odkryłem go w skomplikowanej konfiguracji tychże wiązek. To było drobne odkrycie i nie przyniosło mi sławy, ale bardzo je lubiłem. Zbieram różne kostki dwunastościenne, a w dowód „sympatii” dla tej bryły sklejałem ją z różnych materiałów i kolorowałem na różne sposoby – co zresztą dawało dobry materiał do zadań matematycznych dla uczniów gimnazjów. Tak, tak, gimnazjów… Na fot. 5.11. mamy dwunastościan sklejony z piłeczek pingpongowych, pogrupowanych w cztery układy po pięć w każdym.

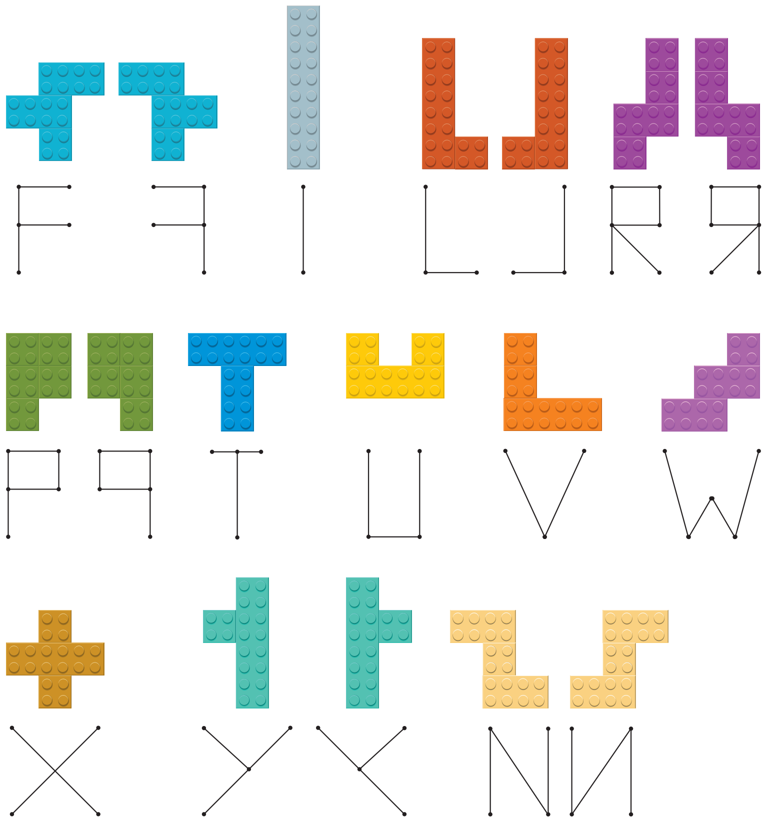
PIĘCIAKI

Takiego słowa nie ma w naszej mowie, nawet w specyficznym języku matematyki. Mówimy na to „pentomino”, ale mój neologizm wydał mi się przyjemny, swojski, trochę ludowy nawet. Pięciaki muszą być sympatyczne. I są. Układałem je wiele razy z dziećmi i nauczycielami. Od przedszkolnej zabawy dochodzimy do matematyki z wysokiej półki. Weźmy klocki Lego. Ułóżmy z nich takie figury. Przypominają litery i stąd te oznaczenia.



Fot. 5.14. To są właśnie pięciaki

Dla niektórych figur ich lustrzane odbicie jest inne, niż ta figura. Gdy uwzględnimy i to, nasza kolekcja się powiększy (fot. 5.15.)

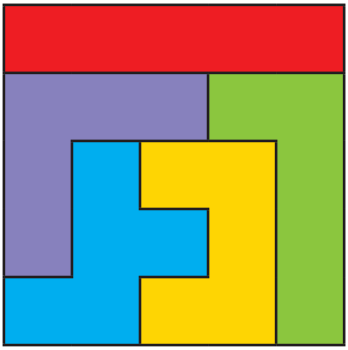


Fot. 5.15. Pięciaki z uwzględnieniem symetrii

Czy potrafisz ułożyć z takich „pięciaków" kwadrat 5 na 5 – ale żeby wszystkie klocki były różne? Na pewno – to można na wiele sposobów. Każdy taką mozaikę możemy zakodować w pewien sposób. Najlepiej zrozumiemy to na przykładzie.

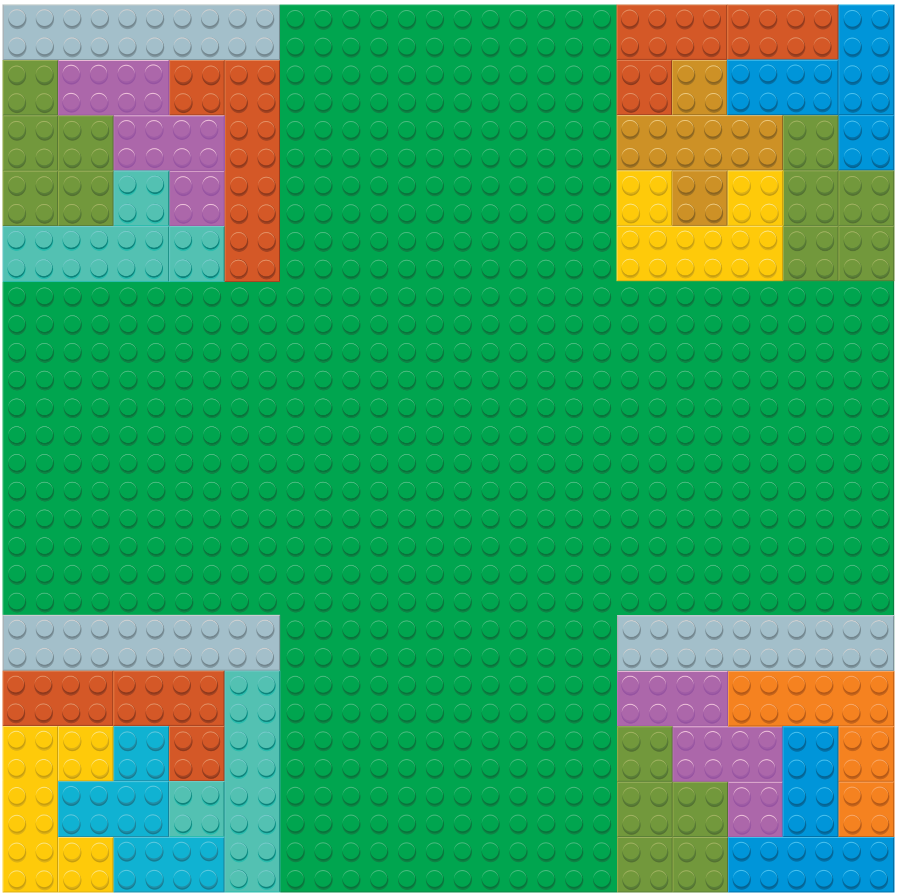
Do układanki z rys. 5.16. użyłem klocków I, L, V, U, F. Najpierw liczę, jakie długości mają odcinki brzegu kwadratu, należące do poszczególnych figur. Prostokąt I ma obwód 5 + 5 + 1 + 1 = 12, z czego 7 jest na brzegu całego kwadratu. W tabelce na przecięciu wiersza poziomego I i pionowej kolumny I umieszczam 7. Zielona figura L ma na brzegu odcinek długości 5, a zatem na przecięciu L – L wstawiam 5. Fioletowe V ma na brzegu 3, żółte U – odcinek długości 2, a błękitne F – długości 3. Te liczby wstawiam na przekątnej. Sprawdzam, czy się nie pomyliłem: 7 + 5 + 3 + 2 + 3 = 20. Zgadza się: kwadrat 5 na 5 ma obwód 20.

Na jakiej długości I styka się z L ? Rzut oka na rysunek 5.16. i mamy odpowiedź: 2. W tabelce na przecięciu I oraz L wstawiam 2. Na jakiej długości stykają się U, F – inaczej mówiąc, jak długą mają wspólną granicę? Widzimy, że jest to łamana długości 5. W tabelce wstawiamy tę liczbę w przecięciu U i F , oraz oczywiście F, U. Dlaczego na przecięciu wiersza I i kolumny F jest zero? To jasne: obszary te nie stykają się.



	I	*L*	*V*	*U*	*F*
I	7	2	3	0	0
L	2	5	1	4	0
V	3	1	3	1	4
U	0	4	1	2	5
F	0	0	4	5	3

Rys. 5.16



Rys. 5.17.

Zadanie 5.21.

Ułożyłem z klocków takie oto mozaiki (fot. 5.17). Zakoduj je. Zbuduj kwadraty o takich kodach:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} F & I & L & U & V \end{array} \\ \begin{array}{c} F \\ I \\ L \\ U \\ V \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 & 4 \\ 2 & 7 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 4 & 1 \\ 5 & 2 & 4 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 1 & 6 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} L & W & P & U & V \end{array} \\ \begin{array}{c} L \\ W \\ P \\ U \\ V \end{array} & \begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 4 & 6 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} F & I & L & U & Y \end{array} \\ \begin{array}{c} F \\ I \\ L \\ U \\ Y \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 4 & 3 \\ 0 & 7 & 1 & 0 & 4 \\ 4 & 1 & 6 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

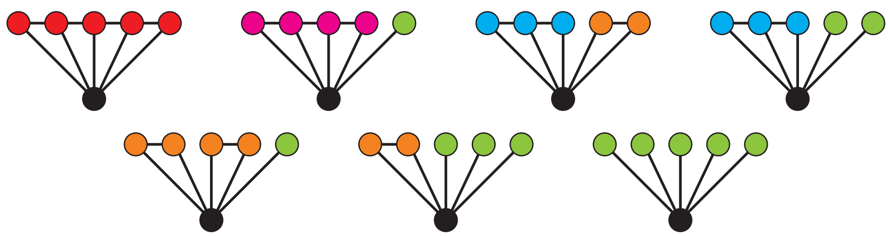
***

Wrócimy teraz do pierwszych klas szkoły podstawowej i niepostrzeżenie znajdziemy się na uniwersytecie.

Przedstawienie liczby w postaci sumy mniejszych (dokładniej: niewiększych) nazywamy w arytmetyce *podziałem* tej liczby. Na przykład podziałami liczby 2023 mogą być 1999 + 19 + 3 + 2, 1000 + 333 + 333 + 304 + 53, ale także 1 + 1 + 1 + … + 1, oczywiście 2023 razy. Samo „2023" też jest podziałem.

Zadanie 5.22.

Oblicz bez użycia kalkulatora: 4 + 1, 3 + 2, 3 + 1 + 1, 2 + 2 + 1, 2 + 1 + 1 + 1, 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1. To proste. Dodałeś, dodałaś? Brawo. Wyszło 5? Na pewno. A teraz narysuj te sumy. Z takim poleceniem „*narysuj dodawanie*" spotkaliśmy się już na pierwszym spacerze. Ile jest podziałów liczby 3? Narysuj je. A na rysunku 5.18 widzisz jeszcze inne rysunkowe przedstawienie podziałów liczby 5. Na pewno rozumiesz, o co chodzi. To kolejno 5, 4 + 1, 3 + 2, 3 + 1 + 1, 2 + 2 + 1, 2 + 1 + 1 + 1, 1 + 1 + 1 + 1 + 1. Matematycy nazywają takie diagramy drzewami z jednym korzeniem. Korzeń to ta kropka u dołu. Dla mnie to jednak bardziej są bukiety kwiatów niż drzewa. Może narysujesz to samo, tylko żeby były kwiaty?

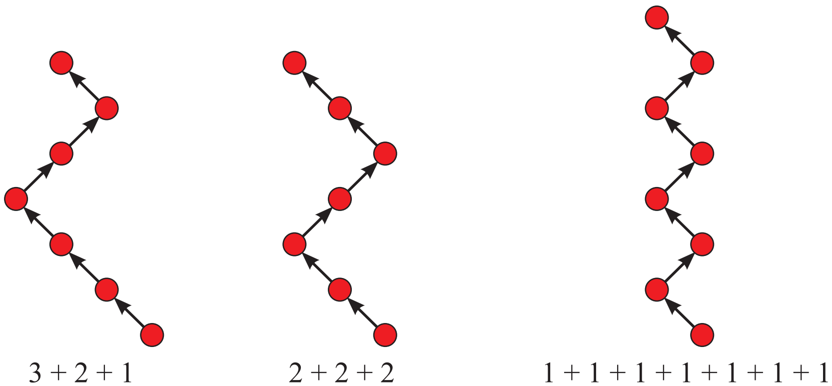


Rys. 5.18.

W matematyce badamy grafy, czyli połączone odcinki, niekoniecznie zamykające się w wielokąt. Po co? Po pierwsze, to ciekawe i matematykowi to wystarczy. Po drugie jednak, taki graf to sieć połączeń: drogowych, kolejowych – ale najważniejsze są oczywiście sieci, po których przesyłane są informacje. Jak najlepiej zaprojektować sieć, jak obliczyć jej przepustowość – to jedno z zadań matematyki.

Zadanie 5.23.

Oto jeszcze inny obraz podziałów liczb 6 i 7. Czy umiesz narysować pozostałe? Czy potrafisz wykorzystać klocki do pokazania podziałów?



Rys. 5.19

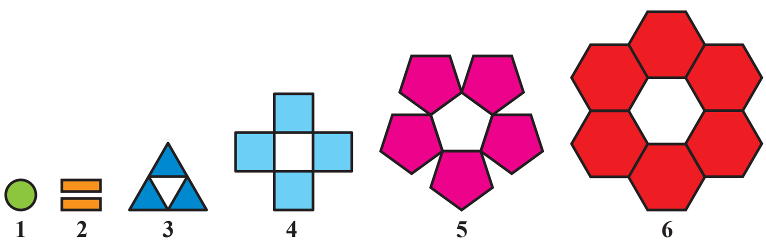
Zadanie 5.24.

Teraz spójrz: liczba podziałów dla kolejnych liczb 2, 3, 4, 5, 6 to 2, 3, 5, 7, 11. Co to za liczby? Co zapowiada ciąg 2, 3, 5, 7, 11? Wydaje się, że to kolejne liczby pierwsze! To ile podziałów ma liczba 7? Zobaczmy: jaka liczba pierwsza następuje po 11? Trzynaście! Nie ma wątpliwości! „Musi być” zatem 13 podziałów liczby 7. Ale czy na pewno? Oj! Jeżeli masz cierpliwość, to sprawdź.

Aha. Napisałem: jeżeli masz cierpliwość, to… A jeżeli nie masz? No, to może jest okazja, by ją sobie wyrobić?

Zadanie 5.25.

Na rysunku 5.20. masz propozycję, jak przedstawiać kolejne liczby za pomocą figur geometrycznych. Trochę to skomplikowane i niepraktyczne – ale jakie ładne rysunki wychodzą! Spróbuj zrobić efektowne rysunki dla liczb 7, 8, 9.



Rys. 5.20

Odpowiedzi i komentarze do zadań z tego spaceru

Odpowiedź do zadania 5.1.

Z pierwszym słowem to łatwo. Pięć to po polsku pięć. Potem mamy kolejno: czeski, słowacki, chorwacki + bośniacki, łotewski, ukraiński, bułgarski + macedoński + serbski, białoruski, angielski, niemiecki, luksemburski, duński + norweski + szwedzki, islandzki, łacina, francuski, portugalski, kataloński, rumuński, esperanto, grecki, litewski, fiński, estoński, gruziński.

Komentarz do zadania 5.2.

Chyba nikt nie powie, że podzielność przez 5 i przez 10 to jedno i to samo, ale mylenie warunku dostatecznego i koniecznego to codzienność; niekiedy przez niewiedzę, niekiedy by kłamać w celach reklamowych. „Weź udział w naszym konkursie i wygraj motocykl! To takie proste – wystarczy wypełnić kupon!”

W filmie Stanisława Barei „Co mi zrobisz, jak mnie złapiesz?” jest taka rozmowa: „To złodziej!” „I pijak, bo każdy pijak to złodziej!”. Mam nadzieję, że rozumiesz, z czego naśmiewał się reżyser (a raczej autor scenariusza).

Odpowiedź do zadania 5.3.

Tak, nie.

Odpowiedź do zadania 5.4.

Prawda, prawda, prawda, fałsz, prawda, fałsz, fałsz.

Komentarz do zadania 5.5.

Poszukaj sam(a). Pozwolę sobie na wspomnienia. Grałem w szkolnej drużynie koszykówki. Zdobyliśmy złoty medal w I Warszawskiej Olimpiadzie Młodzieży. Miałem na koszulce numer 5. Kapitanem naszej szkolnej drużyny był Andrzej Seweryn. Tak, tak, *ten* Andrzej Seweryn, słynny aktor.

Przypomnę tylko, że w starożytnej Grecji na pięciobój składały się: bieg na długość „stadionu”, ok. 200 metrów, skok w dal (skakano z miejsca, z ciężarkami dla rozmachu), rzut dyskiem, rzut oszczepem i zapasy. Pięciobój lekkoatletyczny istnieje – jest rzadko rozgrywany. Do lat osiemdziesiątych była to dla kobiet konkurencja olimpijska, potem zmieniono na heptatlon, czyli siedmiobój.

Komentarz do zadania 5.6.

„Piąte przez dziesiąte” to znaczy „mówić nieporządnie, chaotycznie, omijając szczegóły”. Bywało, że z lekcji rozumiałeś coś „piąte przez dziesiąte”? Natomiast „pleść trzy po trzy” to mówić byle co, bez związku, nonsensy, może trochę prawdy, trochę fałszu. „Piąte koło u wozu” to coś niepotrzebnego, nieprzydatnego, stanowiącego niepotrzebny balast. Powiedzenie powstało w czasach przedsamochodowych, kiedy jeździło się wozem drabiniastym (czy wiesz, co to jest?). Obecnie każdy samochód ma owo piąte koło, najczęściej pod bagażnikiem. „Potrzebny jak dziura w moście" to coś nie tylko niepotrzebnego, ale coś, co wręcz przeszkadza. Natomiast kwiatek wpięty do kożucha to niepotrzebna, niepasująca ozdoba i nie mająca żadnego znaczenia (w domyśle: nie ociepla dodatkowo), choć nie przeszkadza. „Znać coś jak własną kieszeń" znaczy, że mogę tam wszystko znaleźć. Uważam na przykład, że znam Tatry jak własną kieszeń, choć nie pasowałoby „jak swoje pięć palców". Mam za to kolegę, o którym mogę powiedzieć, że zna samochód jak swoje pięć palców. Potrafi wszystko w nim naprawić i rozumie, jak działa każdy mechanizm.

Komentarz do zadania 5.7.

W muzyce kwinta to interwał między pięcioma kolejnymi stopniami skali, na przykład c-g, d-a, e-h. Trójdźwięk toniczny c-e-g gamy C-dur („matki wszystkich gam", klasyczne do-re-mi-fa-sol-la-si-do) słyszymy w piosence o kotku, który wskoczył na płotek **i mru-ga**. Powiedzenie „spuścić nos na kwintę" pochodzi najprawdopodobniej z szermierki i oznacza „piątą pozycję", pozycję obronną, z pochyloną głową. Można dopatrywać się i związku z muzyką i wyścigami konnymi, ale to mało prawdopodobne. W każdym razie „spuścić nos na kwintę" oznacza rezygnację i smutek z nią związany. Nie spuszczaj nosa na kwintę, jeżeli dostaniesz jedynkę z klasówki – a po prostu bardziej przyłóż się do nauki.

Komentarz do zadania 5.8.

W języku starogreckim *pente* (*πέντε*) znaczy *pięć*. Niezależnie od tego, czy uważasz się za chrześcijanina, czy nie, powinieneś/aś wiedzieć, że Zielone Świątki to inaczej Pięćdziesiątnica, Zesłanie Ducha Świętego – uroczystość sięgająca głęboko w czasy pogańskie. W niektórych krajach obchodzone jest bardzo uroczyście.

Komentarz do zadania 5.9.

Zanikająca już nazwa kwintal to po prostu 100 kg. Ale nie pochodzi to od piątki, tylko od arabskiego *qinṭār*. W potocznej mowie kwintal był też nazywany „metrem". Z dzieciństwa pamiętam powiedzenie dziadków: „mamy w piwnicy dwa metry ziemniaków". Czyli 200 kg.

Komentarz do zadania 5.10.

Nieposiadanie piątej klepki to synonim nierozgarnięcia, braku rozsądku, nieumiejętność logicznego myślenia – choć może jeszcze nie głupoty. No, tak, ogólnie rzecz biorąc, obrażanie się nie jest dobrym pomysłem. Mam nadzieję, że ten/

ta, kto wyraża się o tobie tak negatywnie, sam(a) *w piętkę goni*.

Komentarz do zadania 5.11.

Językoznawcy też się zastanawiają, czy pięć – pięść to przypadek. Może tak, może nie. Jeżeli znasz niemiecki, to spójrz: zehn = 10, Zehe = palec u nogi. Dlaczego dla Rzymian V oznaczało 5, to przecież zrozumiałe. Jakby wyglądał nasz system numeracyjny, gdybyśmy wyewoluowali z wiewiórek, które mają cztery palce? Ale nie zastanawiaj się nad tym. Chyba szkoda czasu. Czy umiesz już posługiwać się kaktowikiem?

Komentarz do zadania 5.12.

Na pewno wiesz.

Komentarz do zadania 5.13.

To taka elektroda. Dioda ma dwa, tetroda ma cztery, pentoda pięć. Czego dwa, czego cztery, czego pięć? Ja też nie wiedziałem, ale zajrzałem do Wikipedii. Napiszę jednak i ogólniejszy komentarz, skąd przyszła mi do głowy „pentoda” – na elektronice się nie znam. W jednym z opowiadań pioniera literatury science-fiction, Stanisława Lema (1921–2006) śpiewa się piosenkę:

Cóż to za robot piękny i młody?
I cóż to za robotniczka?
On jej z pudełka daje pentody,
Ona mu diody z koszyczka.

Mam nadzieję, że Czytelnicy wiedzą, jakiego wiersza jest to pastisz. Skomentują to tak: czytanie jest ważne. Literatura jest ważna. Poszerza horyzonty. Dostarcza skojarzeń. Wciąga.

Odpowiedź do zadania 5.14.

Pięć zmysłów: wzrok, słuch, dotyk, węch i smak. Pięć darów umysłu (według Stephena Hawesa, 1515): zdrowy rozum, wyobraźnia, fantazja, abstrakcja, pamięć.

A oto inne pożyteczne maksymy związane z liczbą 5. Mało kto z Czytelników zna łacinę. Szkoda. „Rozbiory zdań łacińskich” uczyły myślenia nie gorzej niż matematyka. Spróbuj choć ładnie *przeczytać* tekst łaciński. No i zastosuj się do rady tam zawartej.

Quinque sacre claves dicuntur stare sophie;
Prima frequens studium, finem nescitque legendi.
Altera: que relegis memori commitere menti.
Tertia: que nescis percrebra rogatio rerum.
Quarta est verus honor sincero corde magistri.
Quinta iubet vanas mundi contemprere gazas.

Mówią o istnieniu pięciu rzeczy do świętej mądrości.
Pierwsza to częsta nauka nie znająca końca czytania.
Druga: to, co powtórnie przeczytane, powierzaj rozumowi obdarzonemu pamięcią.
Trzecia: bardzo często pytaj o rzeczy, których nie wiesz.
Czwarta to prawdziwy i szczery szacunek dla mistrza.
Piąta zaleca, by mieć w pogardzie próżne skarby świata.

(*Księga Tobiasza*, Mateusz z Vendôme, 1185 r., tłum. Andrzej Borowski)

Pięć motywów poznania według Bernarda z Clairvaux:

1) Są ludzie, którzy chcą wiedzieć jedynie po to, aby wiedzieć: to prosta ciekawość.
2) Inni chcą wiedzieć po to, aby w ten sposób zyskać rozgłos: to jest żałosna próżność.
3) Są tacy, którzy osiągają wiedzę dla pieniędzy lub zaszczytów: ich motyw jest brzydki.
4) Ale są tacy, którzy chcą wiedzieć, aby zbudować innych: to jest miłość.
5) Inni – aby się zbudować: to jest mądrość.

Bernard z Clairvaux był cystersem, jednym z największych kontynuatorów myśli św. Augustyna w średniowieczu. Żył w latach (ok.) 1090–1153, bardzo długo jak na tamte czasy i warunki, w których mieszkał. Aby poskromić swoją pychę, latami mieszkał w niewielkiej kamiennej celi, zalewanej przez wodę. Jeśli chcesz też „poskramiać swoją pychę", to nie musisz naśladować jego sposobu.

Odpowiedź do zadania 5.15.

W obu nazwach jest liczba 5. Pendżab (= Kraina Pięciu Rzek) to kraina historyczna wzdłuż granicy indyjsko-pakistańskiej. Nazwa pochodzi z języka perskiego: panj = 5, āb = woda, a odnosi się do pięciu dopływów Indusu.

Kanczendzonga to góra w Himalajach, trzeci co do wysokości szczyt Ziemi, 8586 metrów. W języku tybetańskim znaczy to Pięć Skarbnic Wielkiego Śniegu. Dla lokalnej ludności wierzchołek jej wierzchołek jest świętym miejscem. Pierwsi zdobywcy Kanczendzongi, (25 maja 1955 r., Brytyjczycy George Band i Joe Brown) musieli przedtem obiecać, że na samym szczycie nie staną. Zatrzymali się na kilka metrów przed nim. O ile wiem, teraz już wierzeń tubylców się nie szanuje.

Odpowiedź do zadania 5.16.

W naszym systemie 888 to jest osiem setek, osiem dziesiątek i osiem jednostek. W kaktowiku progami są 20, 400, 8000. Piszemy:

$888 = 2 \cdot 400 + 4 \cdot 20 + 8,$

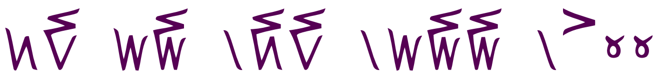
$1000 = 2 \cdot 400 + 10 \cdot 20 + 0,$

$2023 = 5 \cdot 400 + 1 \cdot 20 + 3,$

a więc

888 1000 2023

Odpowiedź do zadania 5.17.



77 99 777 9999 10 000

Odpowiedź do zadania 5.18.

36°.

Odpowiedź do zadania 5.19.

Po lewej brązowe romby mają kąty 36° i 144°. Po prawej 54° i 126°.

Rozwiązanie zadania 5.20.

No cóż, ścian jest 12. Przypomniał mi się pewien student, który nie wiedział, ile ścian ma sześcian. Potem zresztą śmiał się ze swojej niewiedzy.

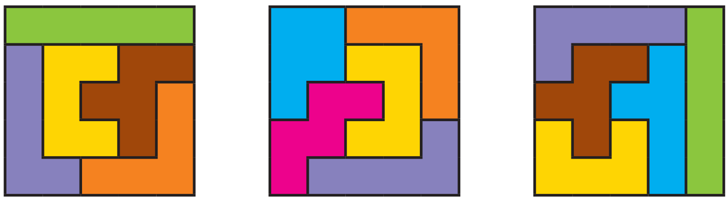
Dwunastościan składamy z dwunastu pięciokątów. Mają one w sumie 60 boków. Ale krawędzi jest dwa razy mniej, a zatem 30, bo przecież jedna krawędź jest wspólna dla dwóch ścian. Liczmy wierzchołki. W dwunastu pięciokątach jest 60 wierzchołków, ale w każdym schodzą się trzy, a więc mamy „tylko” 20 wierzchołków.

Odpowiedź do zadania 5.21.

W prawym górnym rogu mojej układanki (rys. 5.17.) jest

$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} L & P & T & U & X \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} L \\ P \\ T \\ U \\ X \end{matrix} & \begin{pmatrix} 6 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 5 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

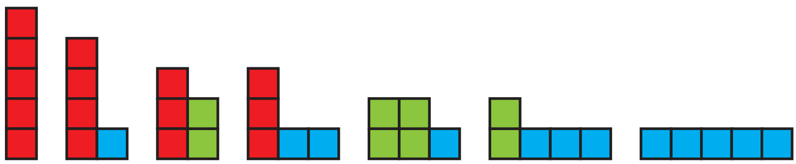
A zakodowane kwadraty są takie (rys. 5.21.). Mogą być trochę inne: w zależności od tego, jak położymy pierwszy klocek.



Rys. 5.21

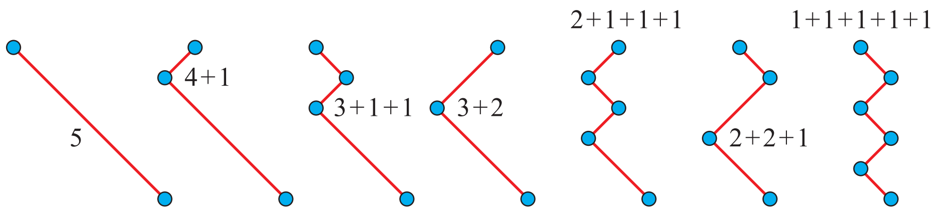
Komentarz do zadania 5.22.

Zgodzisz się na pewno, że sumy 5 + 0, 4 + 1, 3 + 2, 3 + 1 + 1, 2 + 2 + 1, 2 + 1 + 1 + 1, 1 + 1 + 1 + 1 + 1 można narysować na przykład w ten sposób (rys. 5.22.):



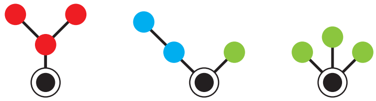
Rys. 5.22.

Ale można i tak:



Rys. 5.23.

Wyznaczenie podziałów liczby 3 jest proste. Arytmetyka daje: 3 = 2 + 1 = = 1 + 1 + 1. Innych możliwości nie ma, bo 2 + 1 jest tym samym podziałem, co 1 + 2. Można to rysować na różne sposoby, na przykład tak, jak w zadaniach 5.21 i 5.22, albo na przykład tak:



3, 2 + 1, 1 + 1 + 1

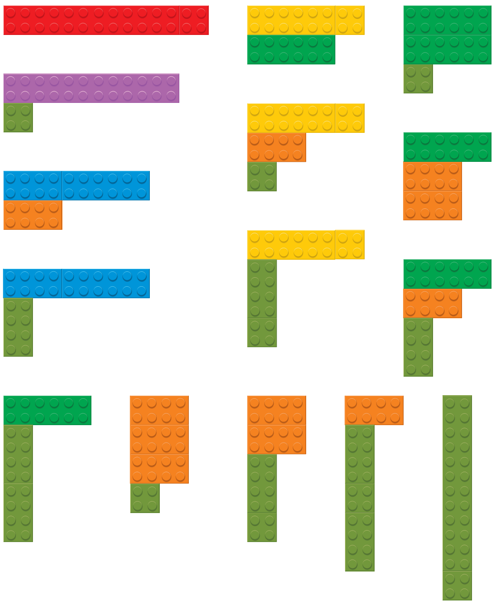
Rys. 5.24. Są trzy podziały liczby 3

Komentarz do zadania 5.23.

Na pewno umiesz.

Komentarz do zadania 5.24.

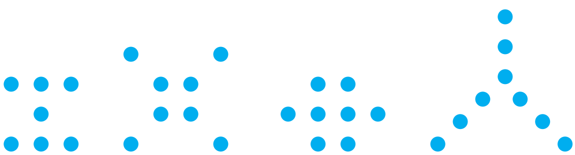
Przypuszczenie, że liczby podziałów to kolejne liczby pierwsze, wygląda zachęcająco, ale załamuje się na siódemce. Oto 15 podziałów liczby 7; zaczynamy od samej siódemki, a kończymy na sumie siedmiu jedynek. Nie znamy zgrabnego, ogólnego wzoru na liczbę podziałów dowolnej liczby.



Rys. 5.25.

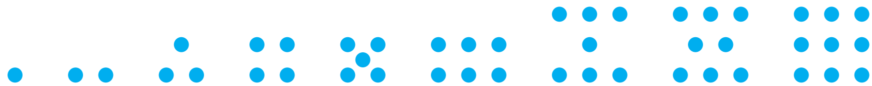
Komentarz do zadania 5.25.

Najczęściej spotykaną prezentację liczb w postaci układu kropek mamy na kostce do gry. Oto dalsze pomysły:



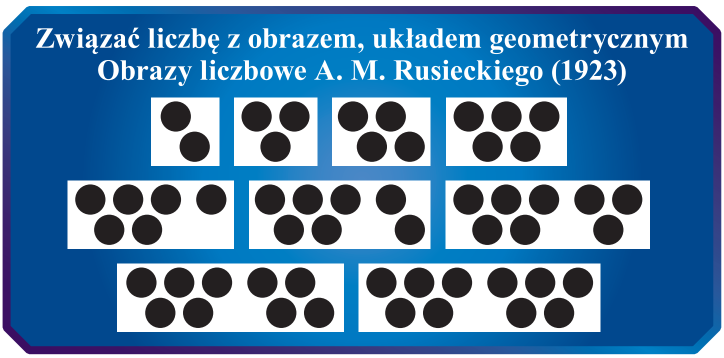
Rys. 5.26.

Ale sprawa jest (a raczej była) poważna. Od skojarzenia liczby z jej wizualnym przedstawieniem bierze się metoda nauczania arytmetyki, stosowana powszechnie aż do połowy XX wieku: metoda obrazów liczbowych. W tej metodzie każda liczba miała być kojarzona przez dzieci z pewnym układem kropek. Taką metodę postulowała Komisja Edukacji Narodowej. *Elementarz dla szkół parafialnych i narodowych* z 1785 roku podaje następujący układ (liczb 1 do 9)



Rys. 5.27.

Metoda ta była szeroko używana przez cały wiek XIX, a specjaliści wymyślali nowe, ich zdaniem lepsze układy (zob. rysunek 5.28). Jeszcze w latach trzydziestych XX wieku przeprowadzano poważne badania naukowe, które z tych układów lepiej służą swojemu celowi. W Polsce do lat sześćdziesiątych XX wieku stosowano układ Antoniego M. Rusieckiego. Obecnie traktujemy obrazy liczbowe tylko jako jeden ze sposobów, którym docieramy do umysłu dziecka i pomagamy mu w oswojeniu pojęcia liczby, którym przecież będzie się posługiwało przez całe życie. Zresztą, dziecko otoczone jest literami i liczbami. Nie jest już tak, jak jeszcze 100 lat temu w zapadłych wsiach wschodniej Polski.



Rys. 5.28.

Ale krytyka metody obrazów liczbowych dokonała się między innymi za sprawą szwajcarskiego psychologa Jeana Piageta (1896–1980). Najważniejszą cechą jego dydaktyki psychologicznej było odejście od koncepcji, że wiedza odciska się w naszym umyśle w sposób podobny do tego, jak pieczęć na woskowej tabliczce. Nie wystarczą same wzorce, same statyczne obrazy. Należy wprowadzać dynamiczne operacje. Dziś jest dla wszystkich jasne, że najpełniej uczymy się przez działanie. Działaj i ucz się. Dziwimy się nawet, że nie było to oczywiste dawniej.

Znów przed czytelnikami nieprzespane noce, bo książka wciąga niesamowicie. Chce się wiedzieć, co jeszcze ciekawego jest dalej, jakie problemy stawia przed czytającymi autor. To, że musimy uczyć inaczej, doskonale wiemy. Zmieniają się możliwości, zmienia się perspektywa widzenia swojej przyszłości przez młodych ludzi. Tylko jak ma to być „inaczej”? Autor we wstępie snuje rozważania o tym „inaczej”. Czy daje odpowiedzi – nie! I to jest właśnie cudowne, bo to czytelnik ma możliwość refleksji i własnych przemyśleń. Ale najważniejsze – dalej jest już tylko matematyka. Dużo problemów na różnych poziomach trudności, ciekawostek, historii. Wprowadzenie do problemów zawsze wiąże się z ciekawym tekstem. Autor jest ‘człowiekiem renesansu’. Historia, geografia, muzyka, …. – nie ma dziedziny, której by nie zgłębił i której nie wplótłby do problemów matematycznych. Książka dla nauczycieli i dla uczniów. I bardzo dobry pomysł na nagrody dla naszych dzieci i młodzieży.

Alina Przychoda, Prezes Stowarzyszenia Nauczycieli Matematyki

Ta książka zabiera czytelnika na spacer po baśniowej krainie matematyki. Przewodnikiem podczas tej podróży jest Mędrzec, który zna tutaj każdy zakątek i historie z nim związane. Jeśli zapytasz Go, jak z miejsca, w którym jesteś, dotrzeć do dowolnie wybranego, innego miejsca, z łatwością wskaże ci drogę. Z Jego pomocą dalekie staje się bliskie, trudne okazuje się łatwe, a nieosiągalne jest na wyciągnięcie ręki… Zawarte w tej książce „opowieści o nieco sinusoidalnej treści” są napisane z lekkością i swobodą, z jaką pisać może tylko ten, kto ma wiedzę, doświadczenie i prawdziwą pasję.

Barbara Barańska, Uniwersytet Pedagogiczny w Krakowie

Świetna książka! Każdemu z nas pozwoli zobaczyć, jak ciekawa jest matematyka i jak wieloma zagadnieniami się zajmuje. Mimo że stawia proste pytania, to odpowiedzi niekoniecznie są proste. Dzięki książce Profesora Szurka uczeń zachwyci się matematyką wokół siebie i pozna ją z innej niż na lekcjach strony. Jest to też dobra lektura dla każdego nauczyciela, pozwoli uatrakcyjnić lekcje matematyki i zaciekawić ucznia.

Ryszard Pagacz, nauczyciel matematyki