

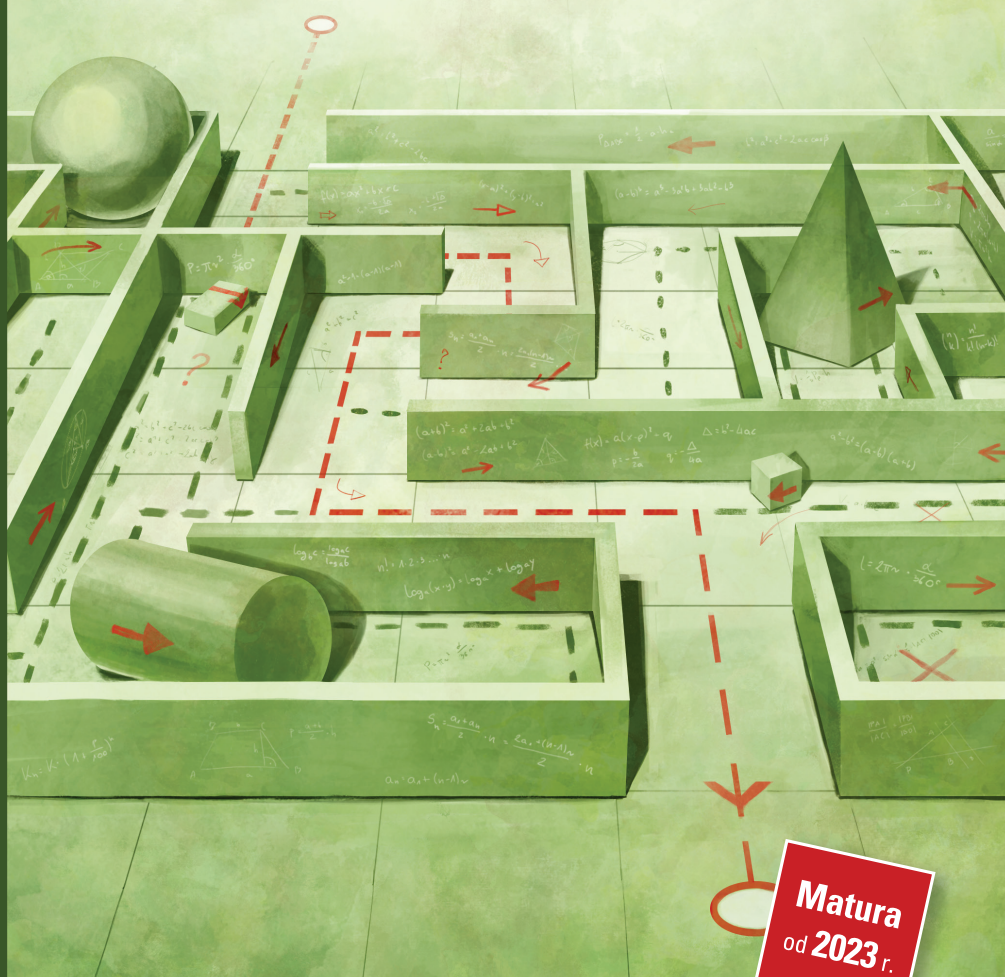
Praca zbiorowa



GPS w labiryncie matematyki

Zbiór zadań

POZIOM PODSTAWOWY



Matura
od 2023 r.

SPIS TREŚCI

Wstęp 5

Instrukcja dla korzystających z GPS 7

CZĘŚĆ PIERWSZA

Zadania odpowiadające maturalnym wymaganiom egzaminacyjnym
od roku 2023, zgodne z wcześniejszą podstawą programową 9

CZĘŚĆ DRUGA

Zadania uzupełniające do zadań pierwszej części pod kątem nowych
wymagań egzaminacyjnych, obowiązujących w latach 2023–2024 35

CZĘŚĆ TRZECIA

Zadania pomocne w przygotowaniu się do matury z matematyki
według nowej formuły od roku 2023 83

ODPOWIEDZI

Odpowiedzi do części pierwszej 129

Odpowiedzi do części drugiej 138

Odpowiedzi do części trzeciej 156

Szanowni Państwo Nauczyciele!

Niniejszy zbiór zadań jest skierowany przede wszystkim do tych uczniów, którzy mają duże trudności z nauką matematyki.

Zbiór ten, z założenia, ma być wsparciem dla uczniów i nauczycieli w procesie nauczania matematyki w szkole ponadpodstawowej. Książka zawiera zestaw zadań bazowych, które są odzwierciedleniem wymagań szczegółowych zapisanych w podstawie programowej. Dodatkowo pod każdym zadaniem bazowym zamieszczono ćwiczenia, które przedstawiają w różnych aspektach zagadnienia odnoszące się do tego zadania. Taka konstrukcja zbioru umożliwi uczniom mającym trudności z nauką matematyki utrwalenie i doskonalenie elementarnych umiejętności matematycznych poprzez wielokrotne rozwiązywanie tych samych zadań z dokładnością do zmiany danych liczbowych. Ta forma pracy powinna dać uczniom dużą szansę na uzyskanie pozytywnego wyniku egzaminu maturalnego z matematyki na poziomie podstawowym.

Zadania zostały opracowane przez zespół nauczycieli szkół ponadpodstawowych województwa świętokrzyskiego w ramach Seminarium Jakości Kształcenia Matematycznego, działającego od roku 2003 na Politechnice Świętokrzyskiej.

Zbiór składa się z trzech części.

Część pierwsza powstała w odpowiedzi na zapotrzebowanie nauczycieli realizujących program zajęć przygotowujących do egzaminu maturalnego z matematyki na poziomie podstawowym w ramach projektu „Matematyka bez poprawki” Świętokrzyskiego Kuratora Oświaty w porozumieniu z Politechniką Świętokrzyską. Ta część zbioru zawiera zadania odpowiadające wymaganiom egzaminacyjnym egzaminu maturalnego w 2022 r. Ze względu na adresatów, zwrócono uwagę głównie na te umiejętności, które są niezbędne w rozwiązywaniu zadań zamkniętych i zadań krótkiej odpowiedzi, z wyjątkiem zadań na dowodzenie. Kształcone umiejętności powinny także stanowić dla każdego ucznia gwarancję uzyskania na maturze pojedynczych punktów za zadania otwarte rozszerzonej odpowiedzi.

Część druga utrzymana jest w tym samym stylu i jest uzupełnieniem części pierwszej o zadania odpowiadające wymaganiom egzaminacyjnym egzaminu maturalnego w latach 2023–2024. W tej części również nie uwzględniono zadań otwartych na dowodzenie. Ze względu na założone cele, położono akcent na zrozumienie podstawowych pojęć matematycznych i osiągnięcie wysokiej sprawności rachunkowej. Pominęto zadania otwarte rozszerzonej odpowiedzi (w tym zadania optymalizacyjne).

Część trzecia zawiera zadania, których dotychczas nie było na egzaminie maturalnym. Typy tych zadań wprowadza Informator o egzaminie maturalnym z matematyki od 2023 r. na poziomie podstawowym oraz arkusz pokazowy opublikowany przez CKE. Są to zadania: typu „prawda – fałsz”, na dobieranie, wyboru wielokrotnego oraz „z luką”. Zamieszczone zadania typu „q, ponieważ p” (opracowane na podstawie: J. Daniel, E. Rzepecka, E. Warzecha, A. Zawada, Egzamin Ósmoklasisty – Vademecum nauczyciela, ORE, Warszawa 2018) są dopełnieniem części pierwszej i drugiej w zakresie dowodzenia, gdyż można je traktować, jako krótkie dowody.

Do zadań bazowych i ćwiczeń zamieszczonych w każdej z części zbioru podano odpowiedzi, tak aby uczeń rozwiązujący samodzielnie zadania mógł zweryfikować wynik.

Autorzy

CZĘŚĆ TRZECIA

Zadania pomocne w przygotowaniu się do matury z matematyki według nowej formuły od roku 2023

I. LICZBY RZECZYWISTE

Zadanie 1. (1 pkt)

Dane są liczby $a = \sqrt[3]{-3}$ i $b = \sqrt[3]{-2}$.

Oceń prawdziwość poniższych zdań; zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Liczba $2a + 3b$ jest liczbą ujemną.	P	F
Liczba $\sqrt{-3a^3}$ jest liczbą wymierną.	P	F

Zadanie 2. (2 pkt)

Dane są liczby $a = \sqrt{27}$, $b = \sqrt[6]{27}$.

Uzupełnij tabelę; do każdego z poniższych sformułowań dobierz właściwe dokończenie spośród A–D, tak aby utworzone zdanie było prawdziwe.

2.1	Iloraz liczby a przez liczbę b jest równy	
2.2	Iloczyn liczb a i b jest równy	

A. 1 B. 3 C. 9 D. 27

Zadanie 3. (2 pkt)

Dane są liczby $a = \sqrt{25} - \sqrt[3]{-27} + \sqrt{27}$ oraz $b = \frac{10}{\sqrt[3]{-125}} + 3$.

Uzupełnij tabelę; do każdego z poniższych sformułowań dobierz właściwe dokończenie spośród A–D, tak aby utworzone zdanie było prawdziwe.

3.1	Liczba a jest liczbą	
3.2	Liczba b jest liczbą	

A. niewymierną B. pierwszą C. nieparzystą D. parzystą

Zadanie 4. (1 pkt)

Uzupełnij poniższe zdania; wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

Liczba $\sqrt{16} - \sqrt[3]{-8} + \sqrt{8}$ jest liczbą A / B.

A. wymierną B. niewymierną

Wartość wyrażenia $\frac{-4}{\sqrt[3]{a}} + 1$ jest liczbą ujemną dla C / D.

C. $a = -64$ D. $a = 27$

Zadanie 5. (2 pkt)

Dane są liczby $a = |(\sqrt{16} - 3)(\sqrt{16} + 3)|$ i $b = |\sqrt{5} - 3|$.

Dokończ zdanie; wybierz dwie odpowiedzi, tak aby dla każdej z nich otrzymane zdanie było prawdziwe.

Liczby a i b spełniają warunek

A. $a + b = 10 + \sqrt{5}$

B. $a - b = 4 + \sqrt{5}$

C. $a \cdot b = 21 + 7\sqrt{5}$

D. $a + b = 4 + \sqrt{5}$

E. $a \cdot b = 21 - 7\sqrt{5}$

Zadanie 6. (1 pkt)

Dane są liczby $a = (3\sqrt{2})^2 - (2\sqrt[3]{3})^3$ i $b = -4\sqrt{2}$.

Porównaj liczby a i b , uzupełnij zdanie, tak aby było prawdziwe.

Liczba a jest od liczby b .

Zadanie 7. (1 pkt)

Dane są liczby $x = 3 + \sqrt{5}$ i $y = 6\sqrt{5}$

Uzupełnij zdanie; wpisz odpowiednią liczbę w wykropkowane miejsce, tak aby zdanie było prawdziwe.

Wartość wyrażenia $x^2 - y$ jest równa

Zadanie 8. (2 pkt)

Dane są liczby: $a = \frac{\sqrt[4]{27}}{3}$, $b = \frac{1}{3\sqrt[4]{27}}$, $c = 3^{\frac{5}{4}}$, $d = \frac{3}{\sqrt[4]{27}}$ oraz $e = 3^{-\frac{1}{4}}$.

Dokończ zdanie; wybierz dwie odpowiedzi, tak aby dla każdej z nich otrzymane zdanie było prawdziwe.

Prawdziwa jest równość:

A. $e = a$

B. $e = b$

C. $e = c$

D. $e = d$

E. $a = 3c$

F. $c = 3d$

Zadanie 9. (2 pkt)

Dokończ zdanie; wybierz dwie odpowiedzi, tak aby dla każdej z nich otrzymane zdanie było prawdziwe.

Liczba $\frac{\sqrt{2} - \sqrt{8}}{\sqrt{2}}$ jest

A. liczbą niewymierną. **B.** równa -1 .

C. równa $1 - \sqrt{8}$.

D. liczbą całkowitą.

E. równa $\sqrt{2} - 2$.

F. równa $\frac{(\sqrt{2} - \sqrt{8})^2}{2}$.

Zadanie 10. (1 pkt)

Dane są liczby $a = 1 - 2\sqrt{5}$ i $b = -4\sqrt{5}$.

Czy liczba $a^2 - b$ jest wymierna? Wybierz odpowiedź A albo B i jej uzasadnienie spośród 1., 2. albo 3.

A.	Tak,	ponieważ	1.	$1^2 - (2\sqrt{5})^2 = -19.$
			2.	$21 - 4\sqrt{5} + 4\sqrt{5} = 21.$
B.	Nie,		3.	$1^2 + (2\sqrt{5})^2 + 4\sqrt{5} = 21 + 4\sqrt{5}.$

Zadanie 11. (1 pkt)

Dane są liczby $a = 2\sqrt[3]{3}$ i $b = \sqrt[3]{-24}$.

Czy liczba $2\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{-24}$ jest równa 0? Wybierz odpowiedź A albo B i jej uzasadnienie spośród 1., 2. albo 3.

A.	Tak,	ponieważ	1.	liczba b jest liczbą przeciwną do liczby a .
			2.	iloczyn liczb b i a jest liczbą ujemną.
B.	Nie,		3.	różnica liczb $a - b$ jest liczbą dodatnią.

Zadanie 12. (1 pkt)

Dane są liczby $a = \frac{2^{-3} \cdot 2^6}{2^{-2}}$ i $b = \frac{3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{3}{2}}}{3^{-2}}$.

Uzupełnij zdanie; wpisz odpowiednią liczbę w wykropkowane miejsce, tak aby zdanie było prawdziwe.

Liczba a jest o mniejsza od liczby b .

Zadanie 13. (2 pkt)

Dana jest liczba $a = \frac{63^4}{3^8 \cdot 7^3}$.

Uzupełnij tabelę; do każdego z poniższych sformułowań dobierz właściwe dokończenie spośród A–D, tak aby utworzone zdanie było prawdziwe.

13.1	Liczba $(a - 5)^2$ jest równa	
13.2	Liczba $a^2 - 6^2$ jest równa	

A. 1

B. 4

C. 13

D. 24

Zadanie 14. (1 pkt)

Dane jest wyrażenie $\frac{2^{26} + 2^{27} + 2^{28}}{(2^7 + 2^7)^3}$.

Czy wartość tego wyrażenia jest liczbą podzielną przez 7? Wybierz odpowiedź A albo B i jej uzasadnienie spośród 1., 2. albo 3.

A.	Tak,	ponieważ	1.	liczba 2^{26} nie jest podzielna przez 7.
			2.	wartość tego wyrażenia można zapisać w postaci $7 \cdot 2^2$.
B.	Nie,		3.	wykładnik potęgi 2^{28} jest podzielny przez 7.

Zadanie 15. (2 pkt)

Dane są liczby $a = \log_2 20$ oraz $b = \log_2 5$.

Uzupełnij tabelę; do każdego z poniższych sformułowań dobierz właściwe dokończenie spośród A–D, tak aby utworzone zdanie było prawdziwe.

15.1	Liczba a jest większa od liczby b o	
15.2	Połowa sumy liczb a i b jest mniejsza od liczby a o	

A. 1 B. 2 C. 2,5 D. 15

Zadanie 16. (2 pkt)

Dane są liczby: $a = \log_5 \frac{1}{5}$, $b = 2\log_6 3 + \log_6 4$ i $c = \log_{\frac{1}{9}} 3$.

Dokończ zdanie; wybierz dwie odpowiedzi, tak aby dla każdej z nich otrzymane zdanie było prawdziwe.

Dla liczb a , b i c zachodzi zależność:

A. $a < b < c$. B. $a + b + 2c = 0$. C. $c < 2a - b$.
D. $-3a + b - 2c = 4$ E. $a < c < b$. F. $-2b - 3a + c = -7\frac{1}{2}$.

Zadanie 17. (1 pkt)

Uzupełnij poniższe zdania; wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

Liczba $\log 5,32$ jest większa od liczby $\log 0,532$ o A / B.

A. 1 B. 4,788

Różnica liczb $\log_3 \sqrt{27}$ i $\log_3 \sqrt[6]{27}$ jest równa C / D.

C. 3 D. 1

Zadanie 18. (1 pkt)

Wiadomo, że $a = \log_{\frac{1}{2}}(x-2) - 2\log_{\frac{1}{2}} 3$. Czy dla $x = 3\frac{1}{8}$ liczba $a + 3$ jest liczbą podzielną przez 3?

Wybierz odpowiedź A albo B i jej uzasadnienie spośród 1., 2. albo 3.

A.	Tak,	ponieważ	1.	żadna z liczb $\log_{\frac{1}{2}}\left(3\frac{1}{8} - 2\right)$ i $2\log_{\frac{1}{2}} 3$ nie jest liczbą podzielną przez 3.
			2.	liczba $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{9}$ jest liczbą podzielną przez 3.
B.	Nie,		3.	suma liczby $\log_{\frac{1}{2}} 1\frac{1}{8} - 2\log_{\frac{1}{2}} 3$ i liczby 3 jest liczbą parzystą.

Zadanie 19. (2 pkt)

Suma trzech liczb jest równa 1260. Druga liczba jest o 20% mniejsza od pierwszej, a trzecia stanowi 40% sumy pierwszej i drugiej liczby.

Uzupełnij tabelę; do każdego z poniższych sformułowań dobierz właściwe dokończenie spośród A–D, tak aby utworzone zdanie było prawdziwe.

19.1	Trzecia liczba jest równa	
19.2	Pierwsza z liczb jest większa od liczby drugiej o	

A. 500

B. 400

C. 360

D. 100

Zadanie 20. (1 pkt)

Jeśli w 75 g wody rozpuścimy 5 g cukru, to otrzymamy roztwór o stężeniu 6,25%. Czy jeśli w 75 g wody rozpuścimy 50 g cukru, to otrzymamy roztwór cukru o stężeniu 62,5%?

Wybierz odpowiedź A albo B i jej uzasadnienie spośród 1., 2. albo 3.

A.	Tak,	ponieważ	1.	zwiększając ilość cukru, bez zmiany ilości wody, zwiększamy stężenie roztworu.
			2.	cukru jest 10 razy więcej i $6,25 \cdot 10 = 62,5$.
B.	Nie,	ponieważ	3.	po rozpuszczeniu 50 g cukru w 75 g wody stężenie roztworu jest równe 40%.

Zadanie 21. (1 pkt)

Dane są cztery liczby: n , $n + 1$, $n + 2$, $n + 3$, przy czym n jest liczbą naturalną.

Czy iloczyn tych liczb jest liczbą podzielną przez 24? Wybierz odpowiedź A albo B i jej uzasadnienie spośród 1., 2. albo 3.

A.	Tak,	ponieważ	1.	wśród danych liczb jest liczba podzielna przez 2 i jest także inna liczba podzielna przez 3.
			2.	wśród danych liczb jest liczba podzielna przez 4, jest także inna liczba podzielna przez 2 i jest liczba podzielna przez 3.
B.	Nie,	ponieważ	3.	wśród danych liczb może nie być liczby podzielnej przez 8.

Zadanie 22. (1 pkt)

Wśród liczb: -9 , -3 , 0 , 3 , 9 jest pięć liczb całkowitych, w tym trzy naturalne.

Oceń prawdziwość poniższych zdań; zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

W przedziale $(3, 9)$ jest dokładnie 5 liczb naturalnych.	P	F
W przedziale $(-\infty, 9)$ jest nieskończenie wiele liczb całkowitych.	P	F

Zadanie 23. (1 pkt)

Uzupełnij poniższe zdania; wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

Przedział liczbowy $(-3, 4)$ to zbiór wszystkich liczb A / B, które są większe od -3 i mniejsze od 4.

A. całkowitych

B. rzeczywistych

Wszystkie liczby należące do przedziału $(0, +\infty)$ są C / D.

C. dodatnie

D. naturalne

101a) baza 2 a1) 2 a2) 5 a3) 8

b) baza 1 oraz 4 b.1) 1,2 oraz 5,4 b.2) 6 oraz 8 b.3) 1, 5, 6

c) baza 2, 3, 4, 7, 8 c.1) 8, 9, 10, 15 c.2) 5, 12 c.3) 3

102) baza $\frac{4\sqrt{5}}{5}$

102.1) $\sqrt{\frac{14}{3}}$ 102.2) $\sqrt{\frac{12}{7}}$ 102.3) $\sqrt{\frac{12}{7}}$ 102.4) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ 102.5) $\sqrt{\frac{478}{75}}$

103) baza $\sqrt{\frac{6}{5}}$, 4 103.1) $\sqrt{\frac{46}{15}}$, 4 103.2) $\sqrt{\frac{9}{5}}$, 3 103.3) $\sqrt{\frac{18}{5}}$, 5

104) baza $x = 5$, $\sqrt{\frac{26}{7}}$ 104.1) $x = 1$, $\sqrt{\frac{17}{5}}$ 104.2) $x = 9$, $\sqrt{10}$ 104.3) $x = 3$, $\sqrt{\frac{12}{5}}$

ODPOWIEDZI DO CZĘŚCI TRZECIEJ

I. LICZBY RZECZYWISTE

1. P, P 2.1 B 2.2 C 3.1 A 3.2 C 4. B, D 5. B, E

6. Liczba a jest mniejsza od liczby b

7. Wartość wyrażenia $x^2 - y$ jest równa 14.

8. A, F 9. B, D 10. TAK, 2 11. TAK, 1

12. Liczba a jest o 49 mniejsza od liczby b 13.1 B 13.2 C

14. TAK, 2

15.1 B 15.2 A 16. B, E 17. A, D 18. TAK, 2

19.1 C 19.2 D 20. Nie, 3 21. TAK, 2 22. F, P

23. B, C 24. NIE, 3 25.1 B 25.2 C 26. F, P

27. Do zbioru rozwiązań tej nie należą następujące liczby naturalne: 2, 3, 4

28.1 B 28.2 C 29. B, D 30. TAK, 1

II. WYRAŻENIA ALGEBRAICZNE

31.1 C 31.2 A 32.1 C 32.2 D 33. B, C

34. P, P 35. A, C 36. B, F 37. P, F

38. Pierwiastkami wielomianu $H(x)$ są liczby $-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$. 39. P, F 40. F, P

41. B, D 42. Dla $x = \sqrt{3}$ wartość wielomianu jest równa $4\sqrt{3}$.

43. P, P 44. P, F 45. P, F 46.1 A 46.2 B 47. B, E 48. A, F

49. Wartość wyrażenia dla $x = 2\sqrt{2}$ jest większa od wartości tego wyrażenia dla $x = 3\sqrt{2}$.